目　录

第一篇　基本部分

第二篇　专题部分

第1章 预备知识

1.1 引 言

在科学技术领域内，对于许多力学问题和物理问题，人们已经得到了它们应遵循的基本方程(常微分方程或偏微分方程)和相应的定解条件。但能用解析方法求出精确解的只是少数方程性质比较简单，且几何形状相当规则的问题。对于大多数问题，由于方程的某些特征的非线性性质，或由于求解区域的几何形状比较复杂，则不能得到解析的答案。这类问题的解决通常有两种途径。一是引入简化假设，将方程和几何边界简化为能够处理的情况，从而得到问题在简化状态下的解答。但是这种方法只是在有限的情况下是可行的，因为过多的简化可能导致误差很大甚至错误的解答。因此人们多年来寻找和发展了另一种求解途径和方法——数值解法。特别是近三十多年来，随着电子计算机的飞速发展和广泛应用，数值分析方法已成为求解科学技术问题的主要工具。

已经发展的数值分析方法可以分为二大类。一类以有限差分法为代表。其特点是直接求解基本方程和相应定解条件的近似解。一个问题的有限差分法求解步骤是：首先将求解域划分为网格，然后在网格的结点上用差分方程近似微分方程。当采用较多的结点时，近似解的精度可以得到改进。借助于有限差分法，能够求解某些相当复杂的问题。特别是求解建立于空间坐标系的流体流动问题，有限差分法有自己的优势。因此在流体力学领域内，它至今仍占支配地位。但用于几何形状复杂的问题时，它的精度将降低，甚至发生困难。

另一类数值分析方法是首先建立和原问题基本方程及相应定解条件相等效的积分提法，然后据之建立近似解法。例如配点法、最小二乘法、Galerkin 法、力矩法等都属于这一类数值方法。如果原问题的方程具有某些特定的性质，则它的等效积分提法可以归结为某个泛函的变分。相应的近似解法实际上是求解泛函的驻值问题。里兹法就属于这一类近似方法。上述不同方法在不同的领域或类型的问题中得到成功的应用。但是也只能限于几何形状规则的问题。其基本原因是：它们都是在整个求解区域上假设近似函数。因此，对于几何形状复杂的问题，不可能建立合乎要求的近似函数。而有限单元法的出现，是数值分析方法研究领域内重大突破性的进展。

有限单元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一组有限个、且按一定方式相互联结在一起的单元的组合体。由于单元能按不同的联结方式进行组合，且单元本身又可以有不同形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限单元法作为数值分析方法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数或及其导数在单元的各个结点的数值和其插值函数来表达。这样一来，一个问题的有限元分析中，未知场函数或及其导数在各个结点上的数值就成为新的未知量(也即自由度)，从而使一个连续的无限自由度问题变成

离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加，也即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高，解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解。

从应用数学角度来看，有限单元法基本思想的提出，可以追溯到 Courant[1]在 1943 年的工作，他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小位能原理相结合，来求解 St. Venant 扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因都涉足过有限单元的概念。但只是到 1960 年以后，随着电子数值计算机的广泛应用和发展，有限单元法的发展速度才显著加快。

现代有限单元法第一个成功的尝试，是将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题，这是 Turner，Clough[2]等人在分析飞机结构时于 1956 年得到的成果。他们第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。三角形单元的单元特性是由弹性理论方程来确定的，采用的是直接刚度法。他们的研究工作打开了利用电子计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年 Clough[3]进一步处理了平面弹性问题，并第一次提出了“有限单元法”的名称，使人们开始认识了有限单元法的功效。

三十多年来，有限单元法的理论和应用都得到迅速的、持续不断的发展。

从确定单元特性和建立求解方程的理论基础和途径来说，正如上面所提到的，Turner、Clough 等人开始提出有限单元法时是利用直接刚度法。它来源于结构分析的刚度法，这对我们明确有限单元法的一些物理概念是很有帮助的，但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963—1964 年，Besseling[4]，Melosh[5]和 Jones[6]等人证明了有限单元法是基于变分原理的里兹(Ritz)法的另一种形式，从而使里兹法分析的所有理论基础都适用于有限单元法，确认了有限单元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是有限单元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上规定的，而且事先不要求满足任何边界条件，因此它可以用来处理很复杂的连续介质问题。从 60 年代后期开始，进一步利用加权余量法来确定单元特性和建立有限元求解方程。有限单元法中所利用的主要是伽辽金(Galerkin)法。它可以用于已经知道问题的微分方程和边界条件、但是变分的泛函尚未找到或者根本不存在的情况，因而进一步扩大了有限单元法的应用领域。

三十多年来，有限单元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、传热学等连续介质力学领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计技术相结合。可以预计，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，有限单元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用效力的数值分析工具，必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用，其自身亦将得到进一步的发展和完善。

本章将简要地介绍学习有限单元法必要的预备知识。在 2，3 节分别讨论作为有限单元法理论基础的微分方程等效积分形式和变分原理以及基于它们的近似方法，也即加权余量法和里兹法。最后在第 4 节扼要地引述作为今后主要分析对象的弹性力学问题的基

本方程和与之等效的变分原理。

1.2 微分方程的等效积分形式和加权余量法

基于微分方程等效积分提法的加权余量法是求解线性和非线性微分方程近似解的一种有效方法。有限单元法中可以应用加权余量法来建立有限元求解方程，但它本身又是一种独立的数值求解方法。在这一节中我们将阐明加权余量法的基本概念，求解步骤和不同形式加权余量法的特点。

1.2.1 微分方程的等效积分形式

工程或物理学中的许多问题，通常是以未知场函数应满足的微分方程和边界条件的形式提出来的，可以一般地表示为未知函数 $\boldsymbol{u}$ 应满足微分方程组

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{u}) = \begin{Bmatrix} A_1(\boldsymbol{u}) \\ A_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{1.2.1}$$

域 Ω 可以是体积域、面积域等，如图 1.1 所示。同时未知函数 $\boldsymbol{u}$ 还应满足边界条件

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{u}) = \begin{Bmatrix} B_1(\boldsymbol{u}) \\ B_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \tag{1.2.2}$$

Γ 是域 Ω 的边界。

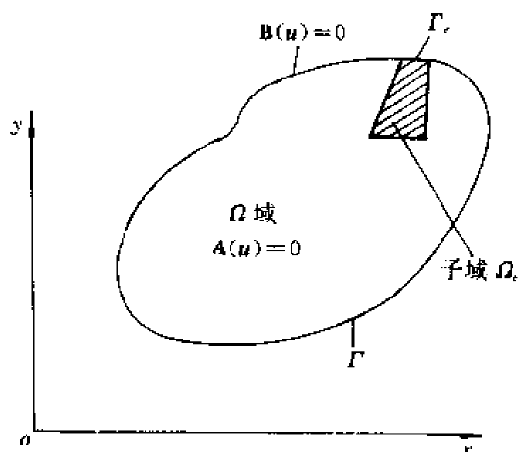


图 1.1 域 Ω 和边界 Γ

要求解的未知函数 $\boldsymbol{u}$ 可以是标量场（例如温度），也可以是几个变量组成的向量场（例如位移、应变、应力等）。$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 是表示对于独立变量（例如空间坐标、时间坐标等）的微分算子。微分方程数应和未知场函数的数目相对应，因此，上述微分方程可以是单个的方程，也可以是一组方程。所以在式(1.2.1)和(1.2.2)中采用了矩阵形式。

下面我们给出一个典型的微分方程，以后我们还要寻求它的解答。

例 1 二维稳态热传导方程

$$A(\phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q=0 \qquad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{1.2.3}$$

$$B(\phi)=\begin{cases}\phi-\bar{\phi}=0 & (\text{在 } \Gamma_\phi \text{ 上})\\ k\dfrac{\partial \phi}{\partial n}-\bar{q}=0 & (\text{在 } \Gamma_q \text{ 上})\end{cases} \tag{1.2.4}$$

这里 ϕ 表示温度；k 是热传导系数；$\bar{\phi}$ 和 $\bar{q}$ 是边界上温度和热流的给定值；n 是有关边界 Γ 的外法线方向；Q 是热源密度。

在上述问题中，若 k 和 Q 只是空间位置的函数时，问题是线性的。若 k 和 Q 亦是 ϕ 及其导数的函数时，问题就是非线性的了。

由于微分方程组(1.2.1)在域 Ω 中每一点都必须为零，因此就有

$$\int_\Omega \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega \equiv \int_\Omega (v_1 \mathrm{A}_1(\boldsymbol{u})+v_2\mathrm{A}_2(\boldsymbol{u})+\cdots)\mathrm{d}\Omega \equiv 0 \tag{1.2.5}$$

其中

$$\boldsymbol{V}=\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\end{Bmatrix} \tag{1.2.6}$$

$\boldsymbol{V}$ 是函数向量，它是一组和微分方程个数相等的任意函数。

式(1.2.5)是与微分方程组(1.2.1)完全等效的积分形式。我们可以断言，若积分方程(1.2.5)对于任意的 $\boldsymbol{V}$ 都能成立，则微分方程(1.2.1)必然在域内任一点都得到满足。这个结论的证明是显然的，假如微分方程 $\mathrm{A}(\boldsymbol{u})$ 在域内某些点或一部分子域中不满足，即出现 $\mathrm{A}(\boldsymbol{u})\neq 0$，马上可以找到适当的函数 $\boldsymbol{V}$ 使(1.2.5)的积分形式亦不等于零。上述结论则得到证明。

同理，假如边界条件(1.2.2)亦同时在边界上每一点都得到满足，对于一组任意函数 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 应当成立

$$\int_\Gamma \bar{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Gamma \equiv \int_\Gamma (\bar{v}_1\mathrm{B}_1(\boldsymbol{u})+\bar{v}_2\mathrm{B}_2(\boldsymbol{u})+\cdots)\mathrm{d}\Gamma \tag{1.2.7}$$

因此，积分形式

$$\int_\Omega \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma \bar{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1.2.8}$$

对于所有的 $\boldsymbol{V}$ 和 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 都成立是等效于满足微分方程(1.2.1)和边界条件(1.2.2)。我们把(1.2.8)式称为微分方程的等效积分形式。

在上述讨论中，隐含地假定(1.2.8)式的积分是能够进行计算的。这就对函数 $\boldsymbol{V}$、$\bar{\boldsymbol{V}}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 能够选取的函数族提出了一定的要求和限制，以避免积分中任何项出现无穷大的情况。

在(1.2.8)式中，$\boldsymbol{V}$ 和 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 只是以函数自身的形式出现在积分中，因此对 $\boldsymbol{V}$ 及 $\bar{\boldsymbol{V}}$ 的选择只需是单值的分别在 Ω 内和 Γ 上可积的函数就可以。这种限制并不影响上述"微分方程的等效积分形式"提法的有效性。$\boldsymbol{u}$ 在积分中还将以导数或偏导数的形式出现，它的选择将取决于微分算子 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{B}$ 中微分运算的最高阶次。例如有一个连续函数，它在 x 方向有一个斜率不连续点如图 1.2 所示。我们设想在一个很小的区间 Δ 中用一个连续变化来代替这个不连续。可以很容易地看出，在不连续点附近，函数的一阶导数是不定的，但是一阶

导数是可积的，即一阶导数的积分是存在的。而在不连续点附近，函数的二阶导数趋于无穷，使积分不能进行。如果在微分算子 **A** 中仅出现函数的一阶导数(边界条件的算子 **B** 中导数的最高阶数总是低于微分方程的算子 **A** 中导数的最高阶数)，上述函数对于 u 将是一个合适的选择。一个函数 在域内其本身连续，它的一阶导数具有有限个不连续点但在域内可积，这样的函数我们称之为具有 C_0 连续性的函数。可以类似地看到，如果在微分算子 **A** 出现的最高阶导数是 n 阶，则要求函数 u 必须具有连续的 $n-1$ 阶导数，即函数应具有 C_{n-1} 连续性。**一个函数在域内函数本身(即它的零阶导数)直至它的 $n-1$ 阶导数连续，它的第 n 阶导数具有有限个不连续点但在域内可积，这样的函数我们称之为具有 C_{n-1} 连续性的函数。**具有 C_{n-1} 连续性的函数将使包含函数直至它的 n 阶导数的积分成为可积。

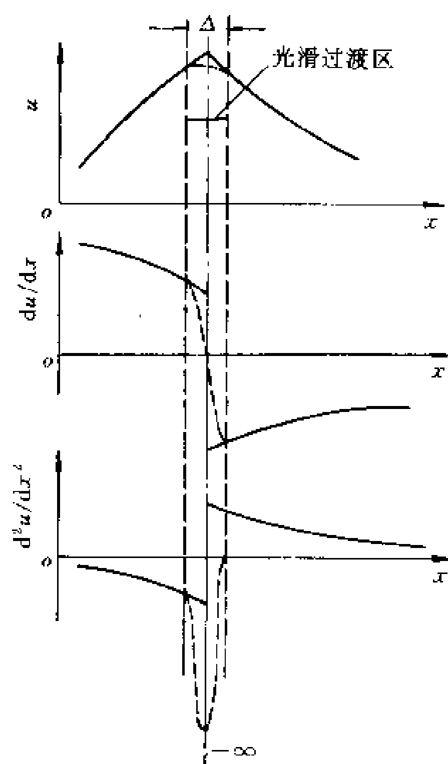


图 1.2 具有 C_0 连续性的函数

1.2.2 等效积分的"弱"形式

在很多情况下可以对(1.2.8)式进行分部积分得到另一种形式

$$\int_{\Omega}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v})\mathbf{D}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{v}})\mathbf{F}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1.2.9}$$

其中 **C**,**D**,**E**,**F** 是微分算子，它们中所包含的导数的阶数较(1.2.8)式的 **A** 低，这样对函数 $\boldsymbol{u}$ 只需要求较低阶的连续性就可以了。在(1.2.9)式中降低 $\boldsymbol{u}$ 的连续性要求是以提高 $\boldsymbol{v}$ 及 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 的连续性要求为代价的，由于原来对 $\boldsymbol{v}$ 及 $\bar{\boldsymbol{v}}$(在(1.2.8)式中)并无连续性要求，但是适当提高对其连续性的要求并不困难，因为它们是可以选择的已知函数。这种降低对函数 $\boldsymbol{u}$ 连续性要求的作法在近似计算中，尤其是在有限单元法中是十分重要的。(1.2.9)式称为微分方程(1.2.1)和边界条件(1.2.2)的等效积分"弱"形式。值得指出的是，从形式上看"弱"形式对函数 $\boldsymbol{u}$ 的连续性要求降低了，但对实际的物理问题却常常较原始的微分方程更逼近真正解，因为原始微分方程往往对解提出了过分"平滑"的要求。

下面我们仍以前面已提出的例题中的二维热传导方程为例，写出它们的等效积分形式和等效积分"弱"形式。例 1 中由二维稳态热传导方程(1.2.3)和边界条件(1.2.4)式，我们可以写出相当于(1.2.8)式的等效积分形式

$$\int_{\Omega}v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+Q\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_q}\bar{v}\left[k\frac{\partial\phi}{\partial n}-\bar{q}\right]\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1.2.10}$$

其中 v 和 $\bar{v}$ 是任意的标量函数，并假设 Γ_ϕ 上的边界条件

$$\phi - \bar{\phi} = 0$$

在选择函数 ϕ 时已自动满足，这种边界条件称为强制边界条件。

对(1.2.10)式进行分部积分可以得到相当于(1.2.9)式的等效积分“弱”形式。利用格林公式对(1.2.10)式中第一个积分的前二项进行分部积分

$$\left.\begin{aligned}\int_\Omega v \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma v\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)n_x\mathrm{d}\Gamma \\ \int_\Omega v \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma v\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)n_y\mathrm{d}\Gamma\end{aligned}\right\} \quad (1.2.11)$$

于是(1.2.10)式成为

$$-\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}k\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}k\frac{\partial \phi}{\partial y} - vQ\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_\Gamma vk\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}n_y\right)\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_q}\bar{v}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q}\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (1.2.12)$$

式中 n_x, n_y 为边界外法线的方向余弦。在边界上场函数 ϕ 的法向导数是

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x}n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}n_y \quad (1.2.13)$$

并且对于任意函数 v 和 $\bar{v}$，可以不失一般性地假定

$$v = -\bar{v} \quad (1.2.14)$$

这样，(1.2.10)式可以表示为

$$\int_\Omega \nabla^{\mathrm{T}} vk\, \nabla\phi\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega vQ\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_q} v\bar{q}\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_\phi} vk\frac{\partial \phi}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (1.2.15)$$

其中算子 ∇ 是

$$\nabla = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

(1.2.15)式就是二维稳态热传导问题与微分方程(1.2.3)和边界条件(1.2.4)相等效的积分“弱”形式。在式中 k 以其自身出现，而场函数 ϕ(温度)则以一阶导数的形式出现，因此它允许在域内热传导系数 k 以及温度 ϕ 的一阶导数出现不连续，而这种实际可能性在微分方程中是不允许的。

对(1.2.15)式，还应指出的是

(1) 场变量 ϕ 不出现在沿 Γ_q 的边界积分中。Γ_q 边界上的边界条件

$$\mathrm{B}(\phi) = k\frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0$$

在 Γ_q 的边界上自动得到满足。这种边界条件称为自然边界条件。

(2) 若在选择场函数 ϕ 时，已满足强制边界条件，即在 Γ_ϕ 边界上满足 $\phi - \bar{\phi} = 0$，则可以通过适当选择 v，使在 Γ_ϕ 边界上 $v = 0$ 而略去(1.2.15)式中沿 Γ_ϕ 边界积分项，使相应的积分“弱”形式取得更简洁的表达式。

1.2.3 基于等效积分形式的近似方法:加权余量法（Weighted Residual Method，WRM）

在求解域 Ω 中,若场函数 $\boldsymbol{u}$ 是精确解,则在域 Ω 中任一点都满足微分方程(1.2.1)式,同时在边界 Γ 上任一点都满足边界条件(1.2.2)式,此时等效积分形式(1.2.8)式或(1.2.9)式必然严格地得到满足。但是对于复杂的实际问题,这样的精确解往往是很难找到的,因此人们需要设法找到具有一定精度的近似解。

对于微分方程(1.2.1)式和边界条件(1.2.2)式所表达的物理问题,未知场函数 $\boldsymbol{u}$ 可以采用近似函数来表示。近似函数是一族带有待定参数的已知函数,一般形式是

$$\boldsymbol{u} \approx \bar{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a} \tag{1.2.16}$$

其中 $\boldsymbol{a}_i$ 是待定参数;$\boldsymbol{N}_i$ 是称之为试探函数(或基函数、形函数)的已知函数,它取自完全的函数序列,是线性独立的。所谓完全的函数系列是指任一函数都可以用此序列表示。近似解通常选择使之满足强制边界条件和连续性的要求。例如当未知函数 $\boldsymbol{u}$ 是位移时,可取近似解

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots + N_n u_n = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \cdots + N_n v_n = \sum_{i=1}^{n} N_i v_i$$

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + \cdots + N_n w_n = \sum_{i=1}^{n} N_i w_i$$

则有

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$ 其中 u_i, v_i, w_i 是待定参数,共 $3 \times n$ 个。

$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{I} N_i$ 是函数矩阵。$\boldsymbol{I}$ 是 3×3 单位矩阵。N_i 是坐标的独立函数,有限单元法中如何选取将在以后的章节中讨论。

显然,在通常 n 取有限项数的情况下近似解是不能精确满足微分方程(1.2.1)和全部边界条件(1.2.2)式的,它们将产生残差 $\boldsymbol{R}$ 及 $\bar{\boldsymbol{R}}$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{R}\mathbf{B}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) = \bar{\boldsymbol{R}} \tag{1.2.17}$$

残差 $\boldsymbol{R}$ 及 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 亦称为余量。在(1.2.8)式中我们用 n 个规定的函数来代替任意函数 $\boldsymbol{v}$ 及 $\bar{\boldsymbol{v}}$,即

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{W}_j; \qquad \bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{W}}_j \qquad (j = 1—n) \tag{1.2.18}$$

就可以得到近似的等效积分形式

$$\int_\Omega \boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{A}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \bar{\boldsymbol{W}}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{B}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (j = 1—n) \tag{1.2.19}$$

亦可以写成余量的形式

$$\int_\Omega \boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \bar{\boldsymbol{W}}_j^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{R}} \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (j = 1—n) \tag{1.2.20}$$

(1.2.19)式或(1.2.20)式的意义是通过选择待定系数 a_i，强迫余量在某种平均意义上等于零。W_j 和 $\overline{W}_j$ 称为权函数。余量的加权积分为零就得到了一组求解方程，用以求解近似解的待定系数 a，从而得到原问题的近似解答。求解方程(1.2.19)的展开形式是

$$\int_\Omega W_1^T A(Na)d\Omega + \int_\Gamma \overline{W}_1^T B(Na)d\Gamma = 0$$

$$\int_\Omega W_2^T A(Na)d\Omega + \int_\Gamma \overline{W}_2^T B(Na)d\Gamma = 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\int_\Omega W_n^T A(Na)d\Omega + \int_\Gamma \overline{W}_n^T B(Na)d\Gamma = 0$$

其中若微分方程组 A 的个数为 m_1，边界条件 B 的个数为 m_2，则权函数 $W_j(j=1,\cdots,n)$ 是 m_1 阶的函数列阵，$\overline{W}_j(j=1,\cdots,n)$ 是 m_2 阶的函数列阵。

当近似函数所取试探函数的项数 n 越多，近似解的精度将越高。当项数 n 趋于无穷时，近似解将收敛于精确解。

对应于等效积分“弱”形式(1.2.9)式，同样可以得到它的近似形式

$$\int_\Omega C^T(W_j)D(Na)d\Omega + \int_\Gamma E^T(\overline{W}_j)F(Na)d\Gamma = 0 \quad (j=1,\cdots,n) \tag{1.2.21}$$

采用使余量的加权积分为零来求得微分方程近似解的方法称为加权余量法。加权余量法是求微分方程近似解的一种有效方法。显然，任何独立的完全函数集都可以用来作为权函数。按照对权函数的不同选择就得到不同的加权余量的计算方法并赋以不同的名称。常用的权函数的选择有以下几种：

1. 配点法

$$W_j = \overline{W}_j = \delta(x - x_j)$$

若 Ω 域是独立坐标 x 的函数，$\delta(x-x_j)$ 则有如下性质：当 $x \neq x_j$ 时 $W_j=0$，但有

$$\int_\Omega W_j d\Omega = I \quad (j=1,\cdots,n)$$

这种方法相当于简单地强迫余量在域内 n 个点上等于零。

2. 子域法

在 n 个子域 Ω_j 内 $W_j=I$，在子域 Ω_j 以外 $W_j=0$。此方法的实质是强迫余量在 n 个子域 Ω_j 的积分为零。

3. 最小二乘法

当近似解取为 $\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n} N_i a_i$ 时，权函数 $W_j = \frac{\partial}{\partial a_j} A\left(\sum_{i=1}^{n} N_i a_i\right)$

此方法的实质是使得函数

$$I(a_i) = \int_\Omega A^2\left(\sum_{i=1}^{n} N_i a_i\right) d\Omega$$

取最小值。即要求 $\frac{\partial I}{\partial a_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$

4. 力矩法

以一维问题为例，微分方程 $A(u)=0$，取近似解 $\tilde{u}$ 并假定已满足边界条件。令

$$W_j = 1, x, x^2, \cdots$$

得到 $$\int_\Omega A(\tilde{u})\mathrm{d}x = 0,\ \int_\Omega xA(\tilde{u})\mathrm{d}x = 0,\ \int_\Omega x^2A(\tilde{u})\mathrm{d}x = 0, \cdots$$

此方法是强迫余量的各次矩等于零。通常又称此法为积分法。

5. 伽辽金(Galerkin)法

取 $\boldsymbol{W}_j=\boldsymbol{N}_j$，在边界上 $\overline{\boldsymbol{W}}_j=-\boldsymbol{W}_j=-\boldsymbol{N}_j$。即简单地利用近似解的试探函数序列作为权函数。近似积分形式(1.2.19)式可写成

$$\int_\Omega \boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{a}_i\Big)\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{a}_i\Big)\mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.22}$$

由(1.2.16)式，可以定义近似解 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 的变分 $\delta\tilde{\boldsymbol{u}}$ 为

$$\delta\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{N}_1\delta\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{N}_2\delta\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{N}_n\delta\boldsymbol{a}_n \tag{1.2.23}$$

其中 $\delta\boldsymbol{a}_i$ 是完全任意的。由此(1.2.22)式可更简洁地表示为：

$$\int_\Omega \delta\tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\tilde{\boldsymbol{u}})\mathrm{d}\Omega - \int_\Gamma \delta\tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\tilde{\boldsymbol{u}})\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1.2.24}$$

对于近似积分的“弱”形式(1.2.21)式则有

$$\int_\Omega \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\delta\tilde{\boldsymbol{u}})\mathbf{D}(\tilde{\boldsymbol{u}})\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \mathbf{E}^{\mathrm{T}}(\delta\tilde{\boldsymbol{u}})\mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{u}})\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1.2.25}$$

我们将会看到，在很多情况下，采用伽辽金法得到的求解方程的系数矩阵是对称的，这是在用加权余量法建立有限元格式时几乎毫无例外地采用伽辽金法的主要原因，而且当存在相应的泛函时，伽辽金法与变分法往往导致同样的结果。

下面我们将用例题说明加权余量法用不同权函数的解题过程和结果比较

例 2 求解二阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + u + x = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{①}$$

边界条件 当 $x=0$ 时，$u=0$

当 $x=1$ 时，$u=0$ ②

取近似解为

$$u = x(1-x)(a_1 + a_2x + \cdots) \tag{③}$$

显然，近似解满足边界条件②，但不满足微分方程①，在域内将产生余量 R。余量的加权积分为零

$$\int_0^1 W_iR\mathrm{d}x = 0 \tag{④}$$

近似解可取③式中一项、两项或 n 项，项数取得越多，计算精度就越高。为方便起见我们只讨论一项和两项近似解。

一项近似解：$n=1$

$$\tilde{u}_1 = a_1x(1-x) \tag{⑤}$$

代入①式，余量为

$$R_1(x) = x + a_1(-2 + x - x^2) \tag{⑥}$$

两项近似解：$n=2$

$$\tilde{u}_2 = x(1-x)(a_1 + a_2x) \tag{⑦}$$

余量为

$$R_2(x) = x + a_1(-2 + x - x^2) + a_2(2 - 6x + x^2 - x^3) \quad ⑧$$

(1) 配点法

一项近似解:取 $x=1/2$ 作为配点

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}a_1 = 0 \quad a_1 = \frac{2}{7}$$

所以求得一项近似解为 $\tilde{u}_1 = \frac{2}{7}x(1-x)$

两项近似解:取三分点 $x=1/3$ 及 $x=2/3$ 作为配点,得到

$$R\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{16}{9}a_1 + \frac{2}{27}a_2 = 0$$

$$R\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{16}{9}a_1 - \frac{50}{27}a_2 = 0$$

解得 $a_1=0.1948$, $a_2=0.1731$

所以两项近似解为 $\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1948+0.1731x)$

(2) 子域法

一项近似解:子域取全域,即 $W_1=1$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$。由④式可得

$$\int_0^1 R_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2)]\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{11}{6}a_1 = 0$$

$$a_1 = \frac{3}{11}$$

求得一项近似解为 $\tilde{u}_1=\frac{3}{11}x(1-x)$

两项近似解:

取 $W_1=1$ 当 $0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$ (Ω_1)

$W_2=1$ 当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ (Ω_2)

由④式得到

$$\int_0^{1/2} R_2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} [x + a_1(-2 + x - x^2) + a_2(2 - 6x + x^2 - x^3)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{11}{12}a_1 + \frac{53}{192}a_2 = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 R_2(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{8} - \frac{11}{12}a_1 - \frac{229}{192}a_2 = 0$$

解得

$$a_1 = \frac{291}{1551} = 0.1876; \quad a_2 = \frac{24}{141} = 0.1702$$

两项近似解为 $\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1876+0.1702x)$

(3) 最小二乘法

将余量的二次方 R^2 在域 Ω 中积分

$$I = \int_\Omega R^2 \mathrm{d}\Omega \quad ⑨$$

选择近似解的待定系数 a_i，使余量在全域的积分值 I 达到极小。为此必须有

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

用⑨式对 a_i 求导数得到

$$\int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial a_i} \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{⑩}$$

由此得到 n 个方程，用以求解 n 个待定参数 a_i。将⑩式与④式比较可知，最小二乘法的权函数选择为

$$W_i = \frac{\partial R}{\partial a_i} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

一项近似解

$$R_1(x) = x + a_1(-2 + x - x^2) \tag{⑪}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial a_1} = -2 + x - x^2$$

代入⑩式得到

$$\int_0^1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial a_1} \mathrm{d}x = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2)](-2 + x - x^2) \mathrm{d}x = 0$$

积分后得到　$a_1 = 0.2723$。

一项近似解为　$\tilde{u}_1 = 0.2723x(1-x)$

两项近似解

$$R_2(x) = x + a_1(-2 + x - x^2) + a_2(2 - 6x + x^2 - x^3)$$

$$W_1 = \frac{\partial R_2}{\partial a_1} = -2 + x - x^2$$

$$W_2 = \frac{\partial R_2}{\partial a_2} = 2 - 6x + x^2 - x^3$$

代入⑩式后得到二个方程

$$\int_0^1 R_2 \frac{\partial R_2}{\partial a_1} \mathrm{d}x = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2) + a_2(2 - 6x + x^2 - x^3)] (-2 + x - x^2) \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^1 R_2 \frac{\partial R_2}{\partial a_2} \mathrm{d}x = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2) + a_2(2 - 6x + x^2 - x^3)] (2 - 6x + x^2 - x^3) \mathrm{d}x = 0$$

解得　$a_1 = 0.1875$，$a_2 = 0.1695$

两项近似解为　$\tilde{u}_2 = x(1-x)(0.1875 + 0.1695x)$

(4) 力矩法

一项近似解：取 $W_1 = 1$，由④式得到

$$\int_0^1 1 \cdot R_1(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2)] \mathrm{d}x = 0$$

求得　$a_1 = \frac{3}{11}$

一项近似解为 $\tilde{u}_1=\frac{3}{11}x(1-x)$

此结果与子域法的结果相同。

两项近似解：取 $W_1=1, W_2=x$。由④式得

$$\int_0^1 R_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[x+a_1(-2+x-x^2)+a_2(2-6x+x^2-x^3)]\mathrm{d}x=0$$

$$\int_0^1 xR_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[x^2+a_1(-2x+x^2-x^3)+a_2(2x-6x^2+x^3-x^4)]\mathrm{d}x=0$$

解得 $a_1=0.1880, a_2=0.1695$

两项近似解为 $\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1880+0.1695x)$

(5) 伽辽金法

取近似函数作为权函数。一项近似解：

$$\tilde{u}_1=N_1a_1=a_1x(1-x)$$

取权函数 $W_1=N_1=x(1-x)$

由④式得到

$$\int_0^1 N_1R_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)[x+a_1(-2+x-x^2)]\mathrm{d}x=0$$

积分后得到 $a_1=\frac{5}{18}$

一项近似解为 $\tilde{u}_1=\frac{5}{18}x(1-x)$

两项近似解：

$$\tilde{u}_2=N_1a_1+N_2a_2=a_1x(1-x)+a_2x^2(1-x)$$

取权函数

$$W_1=N_1=x(1-x);\quad W_2=N_2=x^2(1-x)$$

代入④式得到

$$\int_0^1 x(1-x)[x+a_1(-2+x-x^2)+a_2(2-6x+x^2-x^3)]\mathrm{d}x=0$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)[x+a_1(-2+x-x^2)+a_2(2-6x+x^2-x^3)]\mathrm{d}x=0$$

解得 $a_1=0.1924,\quad a_2=0.1707$

两项近似解为 $\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1924+0.1707x)$

这个问题的精确解是

$$u=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$$

用加权余量的几种方法得到的近似解与精确解的比较见表1.1。由表可见，在此具体问题中取两项近似解已能得到较好的近似结果，各种方法得到的近似解误差均在3%以内，其中伽辽金法的精度尤其高，误差小于0.5%。

表 1.1 近似解与精确解结果比较

	精确解 $u=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$	$x=0.25$ 0.04401		$x=0.5$ 0.06975		$x=0.75$ 0.06006	
	近似解	值	误差%	值	误差%	值	误差%
一项近似解	$\tilde{u}_1=a_1x(1-x)$						
	1. 配点：$\tilde{u}_1=\frac{2}{7}x(1-x)$	0.05357	21.7	0.07143	2.4	0.05357	−10.8
	2. 子域：$\tilde{u}_1=\frac{3}{11}x(1-x)$	0.05114	16.2	0.06818	−2.3	0.05114	−14.9
	3. 最小二乘：$\tilde{u}_1=0.2723x(1-x)$	0.05106	16.0	0.06808	−2.4	0.05106	−15.0
	4. 力矩：$\tilde{u}_1=\frac{3}{11}x(1-x)$	0.05114	16.2	0.06818	−2.3	0.05114	−14.9
	5. 伽辽金：$\tilde{u}_1=\frac{5}{18}x(1-x)$	0.05208	18.3	0.06944	0.4	0.05208	−13.3
两项近似解	$\tilde{u}_2=x(1-x)(a_1+a_2x)$						
	1. 配点：$\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1948+0.1731x)$	0.04464	1.4	0.07034	0.8	0.06087	1.3
	2. 子域：$\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1876+0.1702x)$	0.04315	−2.0	0.06818	−2.3	0.05911	−1.6
	3. 最小二乘：$\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1875+0.1695x)$	0.04310	−2.1	0.06806	−2.4	0.05899	−1.8
	4. 力矩：$\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1880+0.1695x)$	0.04320	−1.8	0.06819	−2.2	0.05909	−1.6
	5. 伽辽金：$\tilde{u}_2=x(1-x)(0.1924+0.1707x)$	0.04408	0.2	0.06944	−0.4	0.06008	0.03

当然若增加近似解的项数，精度将进一步提高。

例 3 一维热传导问题，如果热传导系数取 1，则微分方程为

$$A(\phi)=\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+Q=0 \quad (0\leqslant x\leqslant L) \tag{1.2.26}$$

其中
$$Q(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant L/2 \quad ① \\ 0, & \text{当 } L/2<x\leqslant L \quad ②\end{cases}$$

边界条件是在 $x=0$ 和 $x=L$ 时，$\phi=0$

我们取富氏级数作为近似解

$$\phi\approx\tilde{\phi}=\sum_{i=1}^{n}a_i\sin\frac{i\pi x}{L} \quad ③$$

其中 a_i 为待定参数，试探函数 $N_i=\sin\frac{i\pi x}{L}$。近似解满足给定的边界条件，因此在边界上不产生余量，并因为此近似解在域内具有任意阶的连续性，因此可直接用近似积分形式(1.2.19)式进行加权余量各种方法的计算。对本例题(1.2.19)式可以简单地表示为

$$\int_0^L W_j\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{i=1}^{n}N_ia_i\right)+Q\right]\mathrm{d}x=0 \quad ④$$

现在分别利用配点法、子域法和伽辽金法进行求解，近似解取一项解($n=1$)及两项解($n=$

2)。采用配点法时，一项解配点取 $x=L/2$，$Q(L/2)$ 取两边的平均值 1/2。两项解的配点取 $x=L/4$ 及 $x=3L/4$。子域法中子域取两个半域 $0\leqslant x<L/2$ 及 $L/2\leqslant x\leqslant L$。在图 1.3 的 (*a*)、(*b*) 中分别表示了一项近似解和两项近似解所选取的权函数和解答。为了便于比较，图上还给出了精确解。求解过程留给读者作为练习。

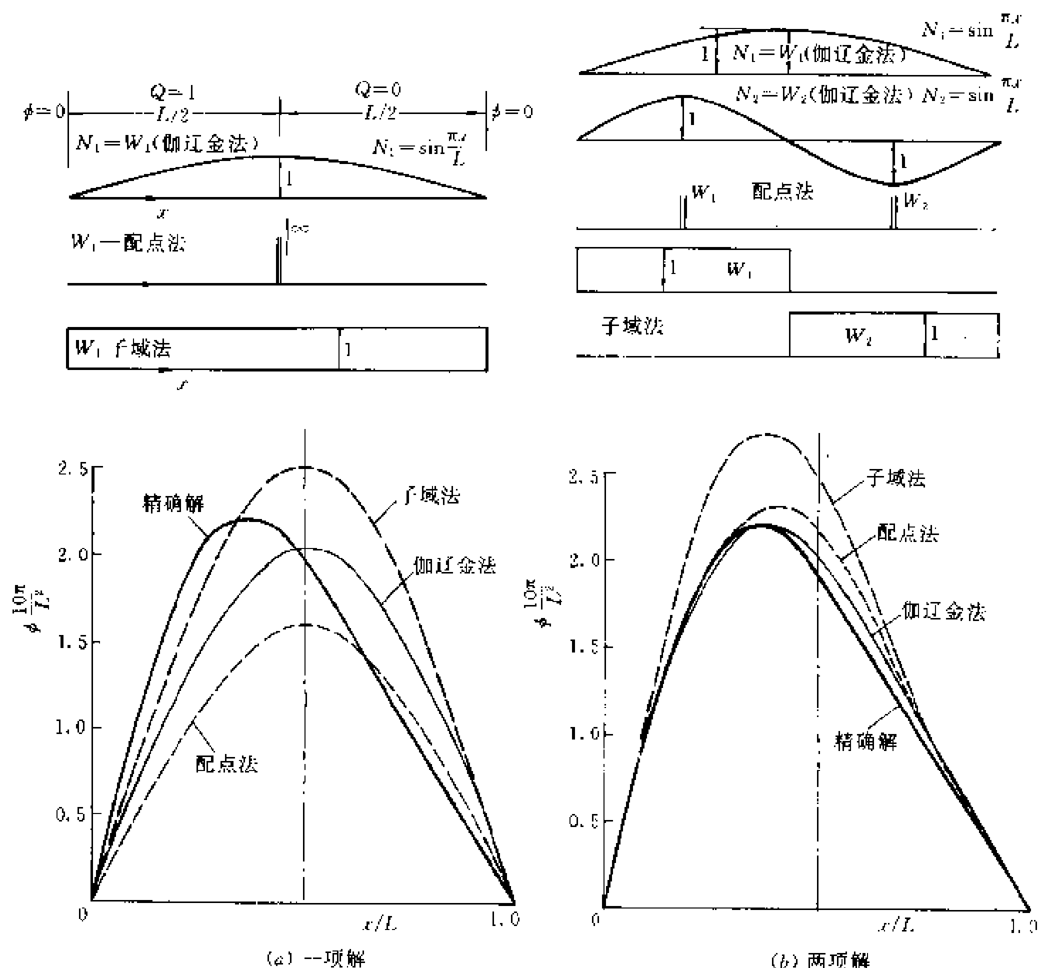


图 1.3 一维热传导问题（稳态）各种解法的比较

值得指出的是：采用伽辽金法时，因为权函数 $W_j=N_j$ 是连续的，并在两端有 $N_i=0$。可以对④式进行分部积分，得到相当于(1.2.21)式的近似积分“弱”形式

$$\int_0^L\left[\frac{\mathrm{d}W_j}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum N_i a_i\right)-W_jQ\right]\mathrm{d}x=0\qquad(j=1,2,\cdots,n)\tag{⑤}$$

上式可改写成

$$\boldsymbol{Ka}-\boldsymbol{P}=0\tag{⑥}$$

其中

$$\boldsymbol{P}=[P_1\quad P_2\cdots P_n]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{a}=[a_1\quad a_2\cdots a_n]^{\mathrm{T}}$$

$$K_{ij}=\int_0^L\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,\quad P_i=\int_0^L W_iQ\mathrm{d}x\tag{⑦}$$

可以看到当取 $W_i=N_i$ 时，将有 $K_{ij}=K_{ji}$，也就是说采用伽辽金法求解待定参数 a_i 的代数方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是对称的，当方程阶数很高时，这种对称性将给计算带来很大方便。

由例题的结果比较也可以看到伽辽金法的精度较其他两种方法要好，这个结论和例 2 是一致的。

例 4 求解二维热传导问题的伽辽金法

我们已经在 1.2.1 节中导出了二维稳态热传导问题的等效积分"弱"形式(1.2.15)式。采用加权余量法求解时，近似解取 $\tilde{\phi}=\sum_{i=1}^{n}N_i a_i$，并设 $\tilde{\phi}$ 已事先满足 Γ_ϕ 边界上的边界条件。任意函数取 $\delta\tilde{\phi}$，在 Γ_ϕ 边界上 $\delta\tilde{\phi}=0$。在此情况下，从(1.2.15)式，可以得到如下方程

$$\boldsymbol{K a} = \boldsymbol{P} \tag{1.2.27}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和向量 $\boldsymbol{P}$ 的元素如下式表示

$$\begin{aligned} K_{ji} = K_{ij} &= \int_\Omega \nabla^{\mathrm{T}} N_j k \nabla N_i \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega k\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

$$P_i = \int_\Omega N_i Q \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q} \mathrm{d}\Gamma \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.29}$$

$\boldsymbol{K}$ 称为热传导矩阵，从上式可以看到 $\boldsymbol{K}$ 也是对称矩阵

从以上讨论可见，加权余量法可以用于广泛的方程类型；选择不同的权函数，可以产生不同的加权余量法；通过采用等效积分的"弱"形式，可以降低对近似函数连续性要求；当近似函数满足连续性和完备性要求、试探函数的项数不断增加时，近似解可趋近于精确解。但解的收敛性仍未有严格的理论证明，同时近似解也不具有明确的上、下界性质。下节讨论的变分原理和里兹方法则从理论上解决上述两方面的问题。

1.3 变分原理和里兹方法

1.3.1 变分原理的定义和意义

讨论一个连续介质问题的"变分原理"首先要建立一个标量泛函 Π，它由积分形式确定

$$\Pi = \int_\Omega \mathrm{F}\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \mathrm{E}\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{1.3.1}$$

其中 u 是未知函数，F 和 E 是特定的算子，Ω 是求解域，Γ 是 Ω 的边界。Π 称为未知函数 u 的泛函，随函数 u 的变化而变化。连续介质问题的解 u 使泛函 Π 对于微小的变化 δu 取驻值，即泛函的"变分"等于零

$$\delta\Pi = 0 \tag{1.3.2}$$

这种求得连续介质问题解答的方法称为变分原理或变分法。

正如在前节所见，连续介质问题中经常存在着和微分方程及边界条件不同的但却是等价的表达形式，变分原理是另一种表达连续介质问题的积分表达形式。在用微分公式表达时，问题的求解是对具有已知边界条件的微分方程或微分方程组进行积分。在经典的变分原理表达中，问题的求解是寻求使具有一定已知边界条件的泛函(或泛函系)取驻值的未知函数(或函数系)。这两种表达形式是等价的，一方面满足微分方程及边界条件的函数

将使泛函取极值或驻值，另一方面从变分的角度来看，使泛函取极值或驻值的函数正是满足问题的控制微分方程和边界条件的解答。

假如能够找到问题相应的变分原理，那么立刻可以建立求得近似解的标准过程，该过程是这样的：未知函数的近似解仍由一族带有待定参数的试探函数来表示

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i = Na \tag{1.3.3}$$

其中 a 是待定参数；N 是已知函数。将(1.3.3)式代入(1.3.1)式，得到用试探函数和待定参数表示的泛函 Π。泛函的变分为零相当于将泛函对所包含的待定参数进行全微分，并令所得的方程等于零，即

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2 + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n}\delta a_n = 0 \tag{1.3.4}$$

由于 $\delta a_1, \delta a_2, \cdots$ 是任意的，满足上式时必然有 $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial a_2}, \cdots$ 都等于零。因此可以得到一组方程：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} \end{Bmatrix} = 0 \tag{1.3.5}$$

这是与待定参数 a 的个数相等的方程组，用以求解 a。这种求近似解的经典方法叫做里兹法。

如果在泛函 Π 中 u 和它的导数的最高方次为二次，则称泛函 Π 为二次泛函。大量的工程和物理问题中的泛函都属于二次泛函，因此应予以特别注意。对于二次泛函，(1.3.5)式退化为一组线性方程

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} \equiv Ka - P = 0 \tag{1.3.6}$$

很容易证明矩阵 K 是对称的。我们考虑向量 $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ 的变分可以得到

$$\delta\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\right)\delta a_1 + \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\right)\delta a_2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}\right)\delta a_1 + \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}\right)\delta a_2 + \cdots \end{bmatrix} \equiv K_A \delta a \tag{1.3.7}$$

很容易看出矩阵 K_A 的子矩阵

$$K_{Aij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_i \partial a_j} \tag{1.3.8}$$

$$K_{Aji} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_j \partial a_i}$$

因此有

$$K_{Aij} = K_{Aji}^{\mathrm{T}} \tag{1.3.9}$$

这就证明了矩阵 $\boldsymbol{K}_A$ 是对称矩阵。

对于二次泛函，由(1.3.6)式可以得到

$$\delta\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{a}}\right) = \boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{a} \tag{1.3.10}$$

与(1.3.7)式比较就得到

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_A \tag{1.3.11}$$

因此 $\boldsymbol{K}$ 矩阵亦是对称矩阵。

变分得到求解方程系数矩阵的对称性是一个极为重要的特性，它将为有限元法计算带来很大的方便。

对于二次泛函，我们根据(1.3.6)式可以将近似泛函表示为

$$\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \tag{1.3.12}$$

上式的正确性用简单求导就可以证明。取上式泛函的变分

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{a} - \delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \tag{1.3.13}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的对称性，就有

$$\delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{a} \tag{1.3.14}$$

因此

$$\delta\Pi = \delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{P}) = 0 \tag{1.3.15}$$

因为 $\delta\boldsymbol{a}$ 是任意的，这样就得到(1.3.6)式：$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{P}=0$

注意到经常有些物理问题可以直接用变分原理的形式来叙述，如表述力学体系平衡问题的最小位能原理和最小余能原理等，这些将作为弹性力学变分原理的基础在1.4节中进行讨论。问题是并非所有以微分方程表达的连续介质问题都存在这种变分原理。以下将讨论能够建立变分原理的微分方程的类型以及建立变分原理的方法。

1.3.2 线性、自伴随微分方程变分原理的建立

1. 线性、自伴随微分算子

若有微分方程

$$\mathrm{L}(u) + b = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 域内}) \tag{1.3.16}$$

其中微分算子 L 具有如下性质

$$\mathrm{L}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\mathrm{L}(u_1) + \beta\mathrm{L}(u_2) \tag{1.3.17}$$

则称 L 为线性算子，方程(1.3.16)式为线性微分方程。其中 α 和 β 是两个常数。

现定义 $\mathrm{L}(u)$ 和任意函数的内积为

$$\int_\Omega \mathrm{L}(u)v\mathrm{d}\Omega \tag{1.3.18}$$

有时内积也表示为 $\langle \mathrm{L}(u), v\rangle$。对上式进行分部积分直至 u 的导数消失，这样就可以得到转化后的内积并伴随有边界项。结果可表示如下

$$\int_\Omega \mathrm{L}(u)v\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega u\mathrm{L}^*(v)\mathrm{d}\Omega + \mathrm{b.t.}(u,v) \tag{1.3.19}$$

上式右端 b. t. (u,v) 表示在 Ω 的边界 Γ 上由 u 和 v 及其导数组成的积分项。算子 L^* 称为 L 的伴随算子。若 $\mathrm{L}^*=\mathrm{L}$，则称算子是自伴随的。称原方程(1.3.16)为线性、自伴随的微分方程。

例 证明算子 $\mathrm{L}(\ )=-\dfrac{\mathrm{d}^2(\ )}{\mathrm{d}x^2}$ 是自伴随的。

构造内积，并进行分部积分

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{L}(u)v\mathrm{d}x&=\int_{x_1}^{x_2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)v\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)u\mathrm{d}x+\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}\end{aligned}$$

从上式可以看到 $\mathrm{L}=\mathrm{L}^*$，因此 L 是自伴随算子。

2. 泛函的构造

原问题的微分方程和边界条件表达如下

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}(\boldsymbol{u})\equiv\mathbf{L}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}=0\quad(\text{在}\ \Omega\ \text{内})\\&\mathbf{B}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{g}\qquad\qquad\quad(\text{在}\ \Gamma\ \text{上})\end{aligned}\tag{1.3.20}$$

和以上微分方程及边界条件相等效的 Galerkin 提法可表示如下

$$\int_\Omega\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}[\mathbf{L}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{f}]\mathrm{d}\Omega-\int_\Gamma\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(\boldsymbol{g})\mathrm{d}\Gamma=0\tag{1.3.21}$$

利用算子是线性、自伴随的，可以导出以下关系式

$$\begin{aligned}\int_\Omega\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega&=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}(\boldsymbol{u})+\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}(\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}\Omega\\&=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}(\boldsymbol{u})+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}(\delta\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}\Omega+\mathrm{b.t.}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\\&=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}(\boldsymbol{u})+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{L}(\boldsymbol{u})\right]\mathrm{d}\Omega+\mathrm{b.t.}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\\&=\delta\int_\Omega\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega+\mathrm{b.t.}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\end{aligned}\tag{1.3.22}$$

将上式代入(1.3.21)式，就可得到原问题的变分原理

$$\delta\Pi(\boldsymbol{u})=0\tag{1.3.23}$$

其中

$$\Pi(\boldsymbol{u})=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right]\mathrm{d}\Omega+\mathrm{b.t.}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{g})$$

是原问题的泛函，因为此泛函中 $\boldsymbol{u}$ 的最高次为二次，所以称为二次泛函。上式右端 b. t. $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{g})$ 是由(1.3.22)式中的 b. t. $(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ 项和(1.3.21)式中的边界积分项两部分组成，括号内 $\boldsymbol{g}$ 是边界条件中的给定函数。两部分合成以后，能够形成一个全变分(即变分号提到边界积分项之外)是有一定条件，这在后面将具体讨论。

从以上讨论可见，原问题的等效积分的 Galerkin 提法等效于它的变分原理，即原问题的微分方程和边界条件等效于泛函的变分等于零，亦即泛函取驻值。反之，如果泛函取驻值则等效于满足问题的微分方程和边界条件。而泛函可以通过原问题的等效积分的 Galerkin 提法而得到。

3. 泛函的极值性

如果算子 L 是偶数($2m$)阶的;在利用 Galerkin 方法构造问题的泛函时,假设近似函数 $\tilde{u}$ 事先满足强制边界条件,对应于自然边界条件的任意函数 $\boldsymbol{w}$ 按一定的方法选取,则泛函不仅取驻值,而且是极值。现对此条件加以阐述和证明。

对于 $2m$ 阶微分方程,含 $0\sim m-1$ 阶导数的边界条件称为强制边界条件,近似函数应事先满足。含 $m\sim 2m-1$ 阶导数的边界条件称为自然边界条件,近似函数不必事先满足。在 Galerkin 提法中对应于此类边界条件的任意函数,从含 $2m-1$ 阶导数的边界条件开始,任意函数 W 依次取 $-\delta\tilde{u}$,$\delta\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial n}$,$-\delta\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial n^2}$,…。在此情况下,对原问题的 Galerkin 提法进行 m 次分部积分后,将得到如下形式的变分原理

$$\delta\Pi(\boldsymbol{u}) = 0 \tag{1.3.23}$$

其中

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega [(-1)^m \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\mathbf{C}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}]\mathrm{d}\Omega + \mathrm{b.t.}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{g}) \tag{1.3.24}$$

$\mathbf{C}(\boldsymbol{u})$是 m 阶的线性算子,b.t.$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{g})$是在自然边界上的积分项,括号中 $\boldsymbol{g}$ 是自然边界条件中给定函数,它不变分。从上式可见,此时泛函中包括两部分,一是完全平方项 $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\mathbf{C}(\boldsymbol{u})$,另一是 $\boldsymbol{u}$ 的线性项,所以这二次泛函具有极值性。现还可进一步验证。

设近似场函数 $\tilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}$,其中 $\boldsymbol{u}$ 表示问题的真正解,$\delta\boldsymbol{u}$ 是它的变分。将此近似函数代入(1.3.24)式,就得到

$$\Pi(\tilde{\boldsymbol{u}}) = \Pi(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}) + \delta\Pi(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\delta^2\Pi(\boldsymbol{u}) \tag{1.3.25}$$

其中 $\Pi(\boldsymbol{u})$是真正解的泛函;

$\delta\Pi(\boldsymbol{u})$是原问题微分方程和边界条件的等效积分 Galerkin 提法的弱形式,应有

$$\delta\Pi(\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\frac{1}{2}\delta^2\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int(-1)^m\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\delta\boldsymbol{u})\mathbf{C}(\delta\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega \geqslant 0 \tag{1.3.26}$$

除非 $\delta\boldsymbol{u}=0$,即 $\tilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}$,亦即近似函数取问题的真正解,恒有$\delta^2\Pi>0$($m$ 为偶数)或恒有 $\delta^2\Pi<0$(m 为奇数)。所以真正解使泛函取极值。

泛函的极值性对判断解的近似性质有意义,利用它可以对解的上下界作出估计。

例 1 二维热传导问题的微分方程和边界条件已在(1.2.3)式和(1.2.4)式中给出。现建立它的泛函,并研究它的极值性。

问题的 Galerkin 提法在 ϕ 已事先满足 Γ_ϕ 上强制条件情况下,可以表示如下

$$\int_\Omega \delta\phi\left(k\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + Q\right)\mathrm{d}\Omega - \delta\phi\int_{\Gamma_q}\delta\phi\left(k\frac{\partial\phi}{\partial n} - \bar{q}\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1.3.27}$$

经分部积分,得到它的弱形式,并注意到在 Γ_ϕ上 $\delta\phi=0$,则有

$$\int_\Omega\left(-k\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} - k\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \delta\phi Q\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_q}\delta\phi\,\bar{q}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1.3.28}$$

从上式可以得到二维热传导问题的变分原理

$$\delta\Pi(\phi) = 0 \tag{1.3.29}$$

其中 $\Pi(\phi)$是问题的泛函

$$\Pi(\phi) = \int_\Omega\left[\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - \phi Q\right]\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_q}\phi\,\bar{q}\mathrm{d}\Gamma \tag{1.3.30}$$

如以 $\tilde{\phi}=\phi+\delta\phi$ 代入上式，则得到

$$\Pi(\tilde{\phi}) = \Pi(\phi) + \delta\Pi(\phi) + \frac{1}{2}\delta^2\Pi(\phi) \tag{1.3.31}$$

其中 $\Pi(\phi)$和 $\delta\Pi(\phi)$即是(1.3.30)式和(1.3.28)式表示的原问题真正解的泛函和它的变分(亦即 Galerkin 提法的弱形式)。分别等于一确定的值和零。而二次变分项

$$\delta^2\Pi(\phi) = \int_\Omega\left[k\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\right)^2 + k\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega \geqslant 0 \tag{1.3.32}$$

上式只有在 $\delta\phi\equiv 0$ 时，$\delta^2\Pi(\phi)=0$。因此原问题的真正解使泛函取极值(从(1.3.28)式得到的泛函的二次项前为负号，实际应用时，改为正号使泛函如(1.3.30)式)。

再次指出，对于 $2m$ 阶线性、自伴随微分方程，通过 Galerkin 弱形式建立的变分原理，只有在近似场函数事先满足强制边界条件的情况下，才使泛函具有极值性。否则，只能使泛函取驻值、而非极值。表现在泛函中将出现非平方的二次项。这将在第 8 章关于约束变分原理的讨论中进行阐述。

1.3.3 里兹法(Ritz)方法

里兹法是从一族假定解中寻求满足泛函变分的"最好的"解。显然，近似解的精度与试探函数的选择有关。如果我们知道所求解的一般性质，那么可以通过选择反映此特性的试探函数来改进近似解，提高近似解的精度。若精确解恰巧包含在试探函数族中，则里兹法将得到精确解。

里兹法求解的一般过程，或称变分过程已在 1.3.1 节中讨论过。现仍以在 1.2.2 节加权余量法中讨论过的例 2 用里兹法进行求解，并作简单的讨论，问题的微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + u + x = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \qquad ①$$

边界条件

$$当\ x = 0\ 时，u = 0 \qquad ②$$

$$当\ x = 1\ 时，u = 0$$

此为强制边界条件。

由于算子是线性自伴随的，可以立即利用 1.3.2 节的方法建立自然变分原理。得到泛函

$$\Pi = \int_0^1\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2 + ux\right]\mathrm{d}x \qquad ③$$

具体过程由读者自己完成。

我们选取两种试探函数形式，用里兹法求解。

1. 选取一项多项式近似解(与加权余量法中选取的一项解相同)

$$\tilde{u} = a_1x(1-x) \quad 满足边界条件②$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} = a_1 - 2a_1x \qquad ④$$

代入③式得到用待定参数 a_1 表示的泛函

$$\Pi = \int_0^1\left[-\frac{1}{2}a_1^2(1-2x)^2 + \frac{1}{2}a_1^2x^2(1-x)^2 + a_1x^2(1-x)\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}\right)a_1^2+\frac{1}{12}a_1 \quad ⑤$$

由泛函变分为零得到

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}=0,\quad a_1=\frac{5}{18} \quad ⑥$$

近似解为

$$\tilde{u}=\frac{5}{18}x(1-x) \quad ⑦$$

与伽辽金法求解的结果相同。证实了 1.3.2 节中的结论：当问题存在自然变分原理时，变分法(现在是里兹法)和伽辽金法所得的结果是相同的。

2. 取近似解为

$$\tilde{u}=a_1\sin x+a_2x \quad ⑧$$

满足 $x=0$ 时，$\tilde{u}=0$；但还要求 $x=1$ 时，$\tilde{u}=0$

则应有

$$a_1\sin 1+a_2=0,\ a_2=-a_1\sin 1 \quad ⑨$$

近似解为

$$\tilde{u}=a_1(\sin x-x\sin 1) \quad ⑩$$

一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}=a_1(\cos x-\sin 1) \quad ⑪$$

代入③式得到

$$\begin{aligned}\Pi=&\int_0^1\Big[-\frac{1}{2}a_1^2(\cos^2x-2\sin 1\cos x+\sin^2 1)\\&+\frac{1}{2}a_1^2(\sin^2x-2\sin 1\cdot x\cdot\sin x+x^2\sin^2 1)\\&+a_1x(\sin x-x\sin 1)\Big]\mathrm{d}x\\=&-\frac{1}{2}a_1^2\sin 1\left(\frac{2}{3}\sin 1-\cos 1\right)+a_1\left(\frac{2}{3}\sin 1-\cos 1\right)\end{aligned} \quad ⑫$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}=\left(\frac{2}{3}\sin 1-\cos 1\right)(-a_1\sin 1+1)=0$$

$$a_1=\frac{1}{\sin 1} \quad ⑬$$

近似解为

$$\tilde{u}=\frac{\sin x}{\sin 1}-x \quad ⑭$$

由于我们选用的试探函数族正好包含了这个问题的真正解，因此现在的里兹解就是精确解，即 $\tilde{u}=u$。

一般地说，采用里兹法求解时当试探函数族的范围以及待定参数的数目增多时，近似解的精度将会得到提高。

现在简要地介绍一下有关里兹法收敛性在理论上的结论。为便于讨论，假设未知场函

数只是标量场 ϕ，此时(1.3.1)式有如下形式

$$\Pi(\phi)=\int_{\Omega}\mathrm{F}\left(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\cdots\right)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\mathrm{E}\left(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\cdots\right)\mathrm{d}\Gamma \qquad (1.3.33)$$

近似函数为

$$\phi\approx\tilde{\phi}=\sum_{i=1}^{n}N_i a_i$$

当 n 趋于无穷时，近似解 $\tilde{\phi}$ 收敛于真正解的条件是

(1) 试探函数 $N_1,N_2,\cdots,N_n$ 应取自完全函数系列。满足此要求的试探函数称为是完全的。

(2) 试探函数 $N_1,N_2,\cdots,N_n$ 应满足 C_{m-1} 连续性要求，即(1.3.33)式表示的泛函 $\Pi(\phi)$ 中场函数最高的微分阶数是 m 时，试探函数的 $m-1$ 阶导数应是连续的，以保证泛函中的积分存在。满足此要求的试探函数称为是协调的。

若试探函数满足上述完全性和连续性的要求，则当 $n\to\infty$ 时，$\tilde{\phi}\to\phi$，并且 $\Pi(\tilde{\phi})$ 单调地收敛于 $\Pi(\phi)$，即泛函具有极值性。

由于里兹法以变分原理为基础，其收敛性有严格的理论基础；得到的求解方程的系数矩阵是对称的；而且在场函数事先满足强制边界条件(此条件通常不难实现)情况下，解有明确的上、下界等性质，长期以来，在物理和力学的微分方程的近似解法中占有很重要的位置，得到广泛的应用。但是由于它是在全求解域中定义近似函数，实际应用中会遇到两方面的困难：

(1) 在求解域比较复杂的情况下，选取满足边界条件的试探函数，往往会产生难以克服的困难。

(2) 为了提高近似解的精度，需要增加待定参数，即增加试探函数的项数，这就增加了求解的繁杂性。而且由于试探函数定义于全域，因此不可能根据问题的要求在求解域的不同部位对试探函数提出不同精度的要求，往往由于局部精度的要求使整个问题的求解增加许多困难。

而同样是建立于变分原理基础上的有限单元法，虽然在本质上和里兹法是类似的，但由于近似函数在子域(单元上)定义，因此可以克服上述两方面的困难。并和现代计算机技术相结合，成为对物理、力学以及其它广泛科学技术领域实际问题进行分析、求解的有效工具，得到愈来愈广泛的应用。

1.4 弹性力学的基本方程和变分原理

在有限单元法中经常要用到弹性力学的基本方程和与之等效的变分原理，现将它们连同相应的矩阵表达形式和张量表达形式综合引述于后。关于它们的详细推导可从弹性力学的有关教材中查到。

1.4.1 弹性力学基本方程的矩阵形式

弹性体在载荷作用下，体内任意一点的应力状态可由 6 个应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz}$，

τ_{zx}来表示。其中 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 为正应力；$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$为剪应力。应力分量的正负号规定如下：如果某一个面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，与坐标轴反向为负；相反，如果某一个面的外法线方向与坐标轴的负方向一致，这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，与坐标轴同向为负。应力分量及其正方向见图 1.4。

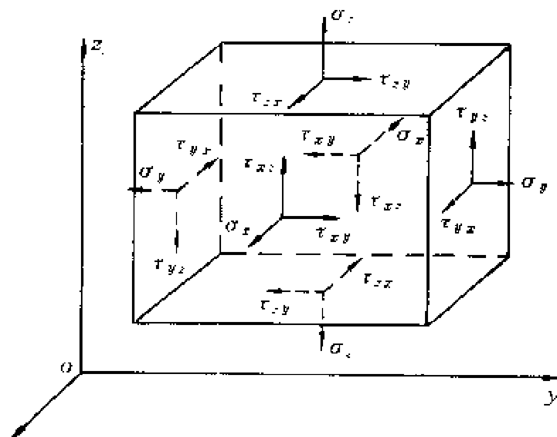


图 1.4　应力分量

应力分量的矩阵表示称为应力列阵或应力向量。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^{\mathrm{T}}$$

弹性体在载荷作用下，还将产生位移和变形，即弹性体位置的移动和形状的改变。

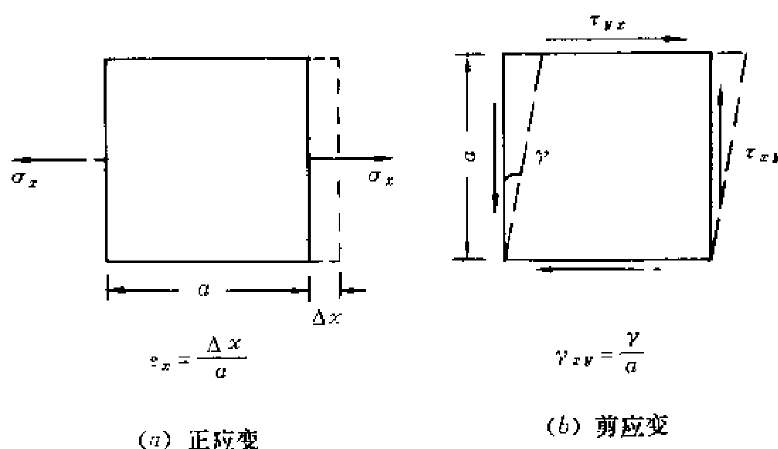
弹性体内任一点的位移可由沿直角坐标轴方向的 3 个位移分量 u, v, w 来表示。它的矩阵形式是

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [u \ v \ w]^{\mathrm{T}}$$

称作位移列阵或位移向量。

弹性体内任意一点的应变，可以由 6 个应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$来表示。其中 ε_x，ε_y，ε_z 为正应变；$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$为剪应变。应变的正负号与应力的正负号相对应，即应变以伸长时为正，缩短为负；剪应变是以两个沿坐标轴正方向的线段组成的直角变小为正，反之为负。图 1.5 的(*a*)，(*b*)分别为 ε_x 和 γ_{xy}的正应变状态。

应变的矩阵形式是



(a) 正应变　　　　(b) 剪应变

图 1.5　应变的正方向

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=[\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \varepsilon_z\quad \gamma_{xy}\quad \gamma_{yz}\quad \gamma_{zx}]^{\mathrm{T}}
$$

称作应变列阵或应变向量。

对于三维问题，弹性力学基本方程可写成如下形式。

1. 平衡方程

弹性体 V 域内任一点沿坐标轴 x,y,z 方向的平衡方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\bar{f}_x=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\bar{f}_y=0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\bar{f}_z=0
\end{aligned}
\tag{1.4.1}
$$

其中 $\bar{f}_x,\bar{f}_y,\bar{f}_z$ 为单位体积的体积力在 x,y,z 方向的分量。

平衡方程的矩阵形式为

$$
\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\bar{\boldsymbol{f}}=0\quad(\text{在 } V \text{ 内})
\tag{1.4.2}
$$

其中　$\mathbf{A}$ 是微分算子

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}
\end{bmatrix}
\tag{1.4.3}
$$

$\bar{f}$ 是体积力向量，$\bar{f}^{\mathrm{T}}=[\bar{f}_x\ \bar{f}_y\ \bar{f}_z]$

2. 几何方程——应变-位移关系

在微小位移和微小变形的情况下，略去位移导数的高次幂，则应变向量和位移向量间的几何关系有

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\&\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\gamma_{yx},\ \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\gamma_{zy},\ \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\gamma_{xz}\end{aligned}\right\}\tag{1.4.4}$$

几何方程的矩阵形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{L}\boldsymbol{u}\qquad 在\ V\ 内\tag{1.4.5}$$

其中 $\mathbf{L}$ 为微分算子

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&0&0\\0&\frac{\partial}{\partial y}&0\\0&0&\frac{\partial}{\partial z}\\\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial x}&0\\0&\frac{\partial}{\partial z}&\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}&0&\frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\tag{1.4.6}$$

3. 物理方程——应力-应变关系

弹性力学中应力-应变之间的转换关系也称弹性关系。对于各向同性的线弹性材料，应力通过应变的表达式可用矩阵形式表示：

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\tag{1.4.7}$$

其中

$$\boldsymbol{D}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1&\frac{\nu}{1-\nu}&\frac{\nu}{1-\nu}&0&0&0\\&1&\frac{\nu}{1-\nu}&0&0&0\\&&1&0&0&0\\&对&&\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}&0&0\\&&称&&\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}&0\\&&&&&\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{bmatrix}\tag{1.4.8}$$

称为弹性矩阵。它完全取决于弹性体材料的弹性模量 E 和泊桑比 ν。

表征弹性体的弹性,也可以采用拉梅(Lam'e)常数 G 和 λ:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{1.4.9}$$

G 也称为剪切弹性模量。注意到

$$\lambda + 2G = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{1.4.10}$$

物理方程中的弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 亦可表示为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & G & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \tag{1.4.11}$$

物理方程的另一种形式是

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.4.12}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是柔度矩阵。$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}^{-1}$,它和弹性矩阵是互逆关系。

弹性体 V 的全部边界为 S。一部分边界上已知外力 $\overline{T}_x,\overline{T}_y,\overline{T}_z$ 称为力的边界条件,这部分边界用 S_σ 表示;另一部分边界上弹性体的位移 $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$ 已知,称为几何边界条件或位移边界条件,这部分边界用 S_u 表示。这两部分边界构成弹性体的全部边界,即

$$S_\sigma + S_u = S \tag{1.4.13}$$

4. 力的边界条件

弹性体在边界上单位面积的内力为 T_x,T_y,T_z,在边界 S_σ 上已知弹性体单位面积上作用的面积力为 $\overline{T}_x,\overline{T}_y,\overline{T}_z$,根据平衡应有

$$T_x = \overline{T}_x \quad T_y = \overline{T}_y \quad T_z = \overline{T}_z \tag{1.4.14}$$

设边界外法线为 N,其方向余弦为 n_x,n_y,n_z,则边界上弹性体的内力可由下式确定

$$\begin{aligned} T_x &= n_x\sigma_x + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx} \\ T_y &= n_x\tau_{xy} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{zy} \\ T_z &= n_x\tau_{xz} + n_y\tau_{yz} + n_z\sigma_z \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

以上公式的矩阵形式为

$$\boldsymbol{T} = \overline{\boldsymbol{T}} \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \tag{1.4.16}$$

其中

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.4.17}$$

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{1.4.18}$$

5. 几何边界条件

在 S_u 上弹性体的位移已知为 $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$,即有

$$u = \overline{u}, \quad v = \overline{v}, \quad w = \overline{w} \tag{1.4.19}$$

用矩阵形式表示是

$$u = \bar{u} \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{1.4.20}$$

以上是三维弹性力学问题中的一组基本方程和边界条件。同样，对于平面问题，轴对称问题等也可以得到类似的方程和边界条件。

我们把弹性力学方程记作一般形式

$$\begin{aligned}
&\text{平衡方程} \quad \mathbf{A}\sigma + \bar{f} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \\
&\text{几何方程} \quad \varepsilon = \mathbf{L}u \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \\
&\text{物理方程} \quad \sigma = D\varepsilon \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \\
&\text{边界条件} \quad n\sigma = \bar{T} \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \\
&\qquad\qquad\quad u = \bar{u} \quad (\text{在 } S_u \text{ 上})
\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

并有 $S_\sigma + S_u = S$，S 为弹性体全部边界。

对于不同类型问题，几何方程和物理方程的有关矩阵符号的意义汇集于表 1.2。板与壳的基本方程将分别在本书有关章节中给出。

6．弹性体的应变能和余能

单位体积的应变能（应变能密度）

$$U(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}} D\varepsilon \tag{1.4.22}$$

应变能是个正定函数，只有当弹性体内所有的点都没有应变时（$\varepsilon \equiv 0$），应变能才为零。

单位体积的余能（余能密度）

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^{\mathrm{T}} C\sigma \tag{1.4.23}$$

余能也是个正定函数。在线性弹性力学中弹性体的应变能等于余能。

1.4.2 弹性力学基本方程的张量形式

弹性力学基本方程亦可用笛卡儿张量符号来表示，使用附标求和的约定可以得到十分简炼的方程表达形式。

在直角坐标系 x_1, x_2, x_3 中，应力张量和应变张量都是对称的二阶张量，分别用 σ_{ij} 和 ε_{ij} 表示，且有 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$；$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$。其它位移张量、体积力张量、面积力张量等都是一阶张量，用 $u_i, \bar{f}_i, \bar{T}_i$ 等表示。下面将分别给出弹性力学基本方程及边界条件的张量形式和张量形式的展开式。

1．平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{1.4.24}$$

式中下标“$,j$”表示对独立坐标 x_j 求偏导数。

式（1.4.24）的展开形式是

表 1.2

矩阵符号	杆	梁	平面问题	轴对称问题	三维问题
位移 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$	$[u]$	$[w]$	$[u\ v]$	$[u\ w]$	$[u\ v\ w]$
应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$	$[\varepsilon_x]$	$[\kappa_x]$	$[\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \gamma_{xy}]$	$[\varepsilon_r\ \varepsilon_z\ \gamma_{rz}\ \varepsilon_\theta]$	$[\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}]$
应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$	$[\sigma_x]$	$[M_x]$	$[\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}]$	$[\sigma_r\ \sigma_z\ \tau_{rz}\ \sigma_\theta]$	$[\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}]$
微分算子 **L**	$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]$	$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\right]$	$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$
弹性矩阵 **D**	EA	EI	$D_0\begin{bmatrix}1 & \nu_0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{对称} & & \frac{1-\nu_0}{2}\end{bmatrix}$ $D_0=\frac{E_0}{1-\nu_0^2}$ 平面应力 $E_0=E$；$\nu_0=\nu$ 平面应变： $E_0=\frac{E}{1-\nu^2}$；$\nu_0=\frac{\nu}{1-\nu}$	$D_0\begin{bmatrix}1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \text{对称} & & & 1\end{bmatrix}$ $D_0=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$D_0\begin{bmatrix}1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & \text{称} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{bmatrix}$ $D_0=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+\bar{f}_1=0\\\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+\bar{f}_2=0\\\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\bar{f}_3=0\end{aligned}\right\}\tag{1.4.25}$$

坐标及应力张量见图 1.6。

2. 几何方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\qquad(\text{在}V\text{内})\tag{1.4.26}$$

其展开形式是

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{11}&=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\\varepsilon_{22}&=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\\\varepsilon_{33}&=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\\\varepsilon_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\varepsilon_{21}\\\varepsilon_{23}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)=\varepsilon_{32}\\\varepsilon_{31}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)=\varepsilon_{13}\end{aligned}\right\}\tag{1.4.27}$$

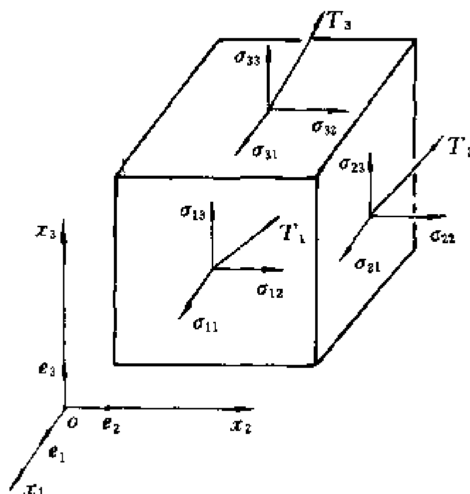


图 1.6 应力张量及其分量

与(1.4.4)式比较可见,当 x_1,x_2,x_3 就是笛卡儿坐标时,

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_x;\ \varepsilon_{22}=\varepsilon_y;\ \varepsilon_{33}=\varepsilon_z;\ \varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\gamma_{xy};\ \varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\gamma_{yz};\ \varepsilon_{31}=\frac{1}{2}\gamma_{zx}$$

3. 物理方程

广义虎克定理假定每个应力分量与各个应变分量成比例。广义虎克定理可以用张量符号表示为

$$\sigma_{ij}=D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\qquad(\text{在}V\text{内})\tag{1.4.28}$$

81 个比例常数 D_{ijkl}称为弹性常数,是四阶张量。由于应力张量是对称张量,因此张量 D_{ijkl} 的二个前指标具有对称性。同理,由于应变张量也是对称张量,D_{ijkl}的二个后指标也具有对称性,即有

$$D_{ijkl}=D_{jikl},\qquad D_{ijkl}=D_{ijlk}$$

当变形过程是绝热或等温过程时,还有

$$D_{ijkl}=D_{klij}$$

考虑了上述对称性后,对于最一般的线弹性材料,即在不同方向具有不同弹性性质的材料,81 个弹性常数中有 21 个是独立的。对于各向同性的线弹性材料,独立的弹性常数只

有两个，即拉梅常数 G 和 λ 或弹性模量 E 和泊桑比 ν，此时弹性张量可以简化为

$$D_{ijkl} = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{1.4.29}$$

此时广义虎克定律可以表示为

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \tag{1.4.30}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 当\ i = j \\ 0, & 当\ i \neq j \end{cases}$$

(1.4.30)式的展开形式为

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2G\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{22} &= 2G\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{33} &= 2G\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31} \end{aligned} \tag{1.4.31}$$

上面二式中拉梅常数 G，λ 与弹性模量 E 和泊桑比 ν 的关系见(1.4.9)式。

物理方程的另一种形式为

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.4.32}$$

4. 力的边界条件

$$T_i = \overline{T}_i \qquad (在\ S_\sigma\ 上) \tag{1.4.33}$$

其中

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \tag{1.4.34}$$

n_j 是边界外法线 N 的三个方向余弦。

将(1.4.34)式代入(1.4.33)式后，它的展开形式有

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= \overline{T}_1 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 &= \overline{T}_2 \qquad (在\ S_\sigma\ 上) \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= \overline{T}_3 \end{aligned} \tag{1.4.35}$$

5. 位移边界条件

$$u_i = \overline{u}_i \qquad (在\ S_u\ 上) \tag{1.4.36}$$

6. 应变能和余能

单位体积应变能

$$U(\varepsilon_{mn}) = \frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{1.4.37}$$

单位体积余能

$$V(\sigma_{mn}) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1.4.38}$$

1.4.3 平衡方程和几何方程的等效积分“弱”形式——虚功原理

变形体的虚功原理可以叙述如下：变形体中满足平衡的力系在任意满足协调条件的变形状态上作的虚功等于零，即体系外力的虚功与内力的虚功之和等于零。

虚功原理是虚位移原理和虚应力原理的总称。它们都可以认为是与某些控制方程相等效的积分“弱”形式。虚位移原理是平衡方程和力的边界条件的等效积分“弱”形式；虚应

力原理则是几何方程和位移边界条件的等效积分“弱”形式。

为了方便，我们使用张量符号推演，并将给出结果的矩阵表达形式。

1. 虚位移原理

首先考虑平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + \overline{f}_i = 0 \qquad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{1.4.24}$$

以及力的边界条件

$$\sigma_{ij}n_j - \overline{T}_i = 0 \qquad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \tag{1.4.33}$$

我们可以利用(1.2.8)式建立与它们等效的积分形式，现在平衡方程相当于 $A(\boldsymbol{u})=0$；力的边界条件相当于 $B(\boldsymbol{u})=0$。权函数可不失一般地分别取真实位移的变分 δu_i 及其边界值(取负值)。这样就可以得到与(1.2.8)式相当的等效积分

$$\int_V \delta u_i(\sigma_{ij,j} + \overline{f}_i)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \delta u_i(\sigma_{ij}n_j - \overline{T}_i)\mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.39}$$

对上式体积分中的第一项进行分部积分，并注意到应力张量 σ_{ij} 是对称张量，以及由于 δu_i 是真实位移的变分所导致的在给定位移边界条件的 S_u 上 $\delta u_i=0$ 和在体积内部满足几何协调条件 $\frac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})=\delta\varepsilon_{ij}$，则可以得到

$$\begin{aligned}\int_V \delta u_i\sigma_{ij,j}\mathrm{d}V &= -\int_V \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \delta u_j\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S \\ &= -\int_V \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \delta u_i\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1.4.40}$$

将上式代回(1.4.39)式，就得到它经分部积分后的“弱”形式。

$$\int_V (-\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} + \delta u_i\overline{f}_i)\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \delta u_i\overline{T}_i\mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.41}$$

上式体积分中的第一项是变形体内的应力在虚应变上所作之功，即内力的虚功；体积分中的第二项及面积分分别是体积力和面积力在虚位移上所做之功、即外力的虚功。外力的虚功和内力的虚功的总和为零，这就是虚功原理。现在的虚功是外力和内力分别在虚位移和与之相协调的虚应变上所作之功，所以得到的是虚功原理中的虚位移原理。它是平衡方程和力的边界条件的等效积分“弱”形式。它的矩阵形式是

$$\int_V (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{f}})\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.42}$$

虚位移原理的力学意义是：如果力系(包括内力 σ 和外力 $\overline{f}$ 及 $\overline{T}$)是平衡的(即在内部满足平衡方程 $\sigma_{ij,j}+\overline{f}_i=0$，在给定外力边界 S_σ 上满足 $\sigma_{ij}n_j=\overline{T}_i$)，则它们在虚位移(在给定位移边界 S_u 上满足 $\delta u_i=0$)和虚应变(与虚位移相协调、即满足几何方程 $\delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})$)上所作之功的总和为零。反之、如果力系在虚位移(及虚应变)上所作之功的和等于零，则它们一定是满足平衡的。所以虚位移原理表述了力系平衡的必要而充分的条件。

应该指出，作为平衡方程和力边界条件的等效积分“弱”形式——虚位移原理的建立是以选择在 S_u 上满足位移边界条件和内部满足几何方程的任意函数为条件的。如果任意函数不是连续函数，尽管平衡方程和力边界条件的等效积分形式仍可建立，但不能通过分

部积分建立其等效积分的"弱"形式。再如任意函数在 S_u 上不满足位移边界条件(现在的情况,即 S_u 上 $\delta u_i \neq 0$),则总虚功应包括 S_u 上约束反力在 δu_i 上所作的虚功。

还应指出,在导出虚位移原理的过程中,未涉及物理方程(应力-应变关系),所以虚位移原理不仅可以用于线弹性问题,而且可以用于非线性弹性及弹塑性等非线性问题。

2. 虚应力原理

现在我们考虑几何方程(1.4.26)和位移边界条件(1.4.36)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.4.26}$$

$$u_i = \bar{u}_i \tag{1.4.36}$$

它们分别相当于 $\mathbf{A}(\boldsymbol{u})=0$ 和 $\mathbf{B}(\boldsymbol{u})=0$。权函数可以分别取真实应力的变分 $\delta\sigma_{ij}$ 及其相应的边界值 δT_i,$\delta T_i = \delta\sigma_{ij}n_j$,在边界 S_σ 上有 $\delta T_i = 0$。这样构成与(1.2.8)式相当的等效积分是

$$\int_V \delta\sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\mathrm{d}V + \int_{S_u} \delta T_i(u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.43}$$

对上式进行分部积分后可得

$$\int_V (\delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + u_i\delta\sigma_{ij,j})\mathrm{d}V - \int_S \delta\sigma_{ij}n_j u_i \mathrm{d}S + \int_{S_u} \delta T_i(u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.44}$$

由于 $\delta\sigma_{ij}$ 是真实应力的变分,它应满足平衡方程,即 $\delta\sigma_{ij,j}=0$,并考虑到边界上 $\delta\sigma_{ij}n_j = \delta T_i$,且在给定力边界 S_σ 上 $\delta T_i = 0$,所以上式可简化为

$$\int_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V - \int_{S_u} \delta T_i\bar{u}_i\mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.45}$$

上式第一项代表虚应力在应变上所作的虚功(相差一负号),第二项代表虚边界约束反力在给定位移上所作的虚功。为和前述内力和给定外力在虚应变和虚位移上所作的虚功相区别,这两项虚功,从力学意义上更准确地说应称之为余虚功。因此(1.4.45)式称之为余虚功原理,或虚应力原理。它的矩阵表达式形式是

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V - \int_{S_u} \delta\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.46}$$

虚应力原理的力学意义是:如果位移是协调的(即在内部满足几何方程,在给定位移的边界 S_u 上等于给定位移),则虚应力(在内部满足平衡方程,在给定外力边界 S_σ 上也满足力的边界条件)和虚边界约束反力在它们上面所作之功的总和为零。反之,如果上述虚力系在它们上面所作之功的和为零,则它们一定是满足协调的。所以,虚应力原理表述了位移协调的必要而充分的条件。

和虚位移原理类似,虚应力原理的建立是以选择虚应力(在内部和力边界条件上分别满足平衡方程和力边界条件)作为等效积分形式的任意函数为条件的。否则作为几何方程和位移边界条件的等效积分形式在形式上应和现在导出的虚应力原理有所不同,这是应予注意的。

和虚位移原理相同,在导出虚应力原理过程中,同样未涉及物理方程,因此,虚应力原理同样可以应用于线弹性以及非线性弹性和弹塑性等不同的力学问题。但是应指出,无论是虚位移原理和虚应力原理,它们所依赖的几何方程和平衡方程都是基于小变形理论的,

所以它们不能直接应用于基于大变形理论的力学问题。

1.4.4 线弹性力学的变分原理

弹性力学变分原理包括基于自然变分原理的最小位能原理和最小余能原理，以及基于约束变分原理的胡海昌—鹫津久广义变分原理和 Hellinger-Reissner 混合变分原理等。本章只讨论最小位能原理和最小余能原理。其余变分原理将在第 8 章中进行讨论。

1. 最小位能原理

最小位能原理的建立可以从上节已建立的虚位移原理出发。后者的表达式是

$$\int_V (\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij} - \delta u_i \overline{f}_i)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \delta u_i \overline{T}_i \mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.41}$$

其中的应力张量 σ_{ij}，如利用弹性力学的物理方程(1.4.28)式代入，则可得到

$$\int_V (\delta\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \delta u_i \overline{f}_i)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \delta u_i \overline{T}_i \mathrm{d}S = 0 \tag{1.4.47}$$

因为 D_{ijkl}是对称张量，并利用(1.4.37)式，则有

$$(\delta\varepsilon_{ij})D_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \delta\left(\frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\right) = \delta U(\varepsilon_{mn}) \tag{1.4.48}$$

由此可见(1.4.47)式中体积分的第一项就是单位体积应变能的变分。

在线弹性力学中，假定体积力 $\overline{f}_i$ 和边界上面力 $\overline{T}_i$ 的大小和方向都是不变的，即可从位势函数 $\phi(u_i)$和 $\psi(u_i)$导出，则有

$$-\delta\phi(u_i) = \overline{f}_i\delta u_i \qquad -\delta\psi(u_i) = \overline{T}_i\delta u_i \tag{1.4.49}$$

将(1.4.48)和(1.4.49)式代入(1.4.47)式，就得到

$$\delta\Pi_p = 0 \tag{1.4.50}$$

其中

$$\begin{aligned}\Pi_p = \Pi_p(\varepsilon_{ij}, u_i) &= \int_V [U(\varepsilon_{ij}) + \phi(u_i)]\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \psi(u_i)\mathrm{d}S \\ &= \int_V \left(\frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \overline{f}_i u_i\right)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i \mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1.4.51}$$

是系统的总位能，它是弹性体变形位能和外力位能之和。(1.4.50)式表明：在所有区域内满足几何关系(1.4.27)，在边界上满足给定位移条件(1.4.36)的可能位移中，真实位移使系统的总位能取驻值。我们还可以进一步证明在所有可能位移中，真实位移使系统总位能取最小值，因此(1.4.50)式所表述的称为最小位能原理。

证明最小位能原理是很方便的，我们以 u_i 表示真实位移，u_i^* 表示可能位移。令

$$u_i^* = u_i + \delta u_i \tag{1.4.52}$$

将它们分别代入总位能表达式(1.4.51)，则有

$$\Pi_p(\varepsilon_{ij}, u_i) = \int_V [U(\varepsilon_{ij}) - \overline{f}_i u_i]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i \mathrm{d}S \tag{1.4.53}$$

和

$$\Pi_p(\varepsilon_{ij}^*, u_i^*) = \int_V [U(\varepsilon_{ij}^*) - \overline{f}_i u_i^*]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i^* \mathrm{d}S$$

$$=\Pi_p(u_i)+\delta\Pi_p+\frac{1}{2}\delta^2\Pi_p \tag{1.4.54}$$

其中 $\delta\Pi_p$ 和 $\delta^2\Pi_p$ 分别是总位能的一阶和二阶变分。它们的具体表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}\delta\Pi_p&=\int_V[\delta U(\varepsilon_{ij})-\overline{f}_i\delta u_i]\mathrm{d}V-\int_{S_\sigma}\overline{T}_i\delta u_i\mathrm{d}S\\ \frac{1}{2}\delta^2\Pi_p&=\int_V U(\delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}D_{ijkl}(\delta\varepsilon_{ij})(\delta\varepsilon_{kl})\mathrm{d}V\end{aligned}\right\} \tag{1.4.55}$$

由于 u_i 是真实位移，根据(1.4.50)式知道，Π_p 的一阶变分 $\delta\Pi_p$ 应为 0。二阶变分 $\delta^2\Pi_p$ (1.4.55)式中只出现应变能函数。由于应变能是正定的，除非 $\delta u_i\equiv 0$，则恒有

$$\delta^2\Pi_p>0 \tag{1.4.56}$$

这就有

$$\Pi_p(\varepsilon_{ij}^*,u_i^*)\geqslant\Pi_p(\varepsilon_{ij},u_i) \tag{1.4.57}$$

上述等号只有当 $\delta u_i=0$ 时，即可能位移就是真实位移时才成立。当 $\delta u_i\neq 0$，即可能位移不是真实位移时，系统总位能总是大于取真实位移时系统的总位能。这就证明了最小位能原理。

2. 最小余能原理

最小余能原理的推导步骤和最小位能原理的推导类似，只是现在是从虚应力原理出发，作为几何方程和位移边界条件的等效积分"弱"形式的虚应力原理在 1.4.3 节中已经得到，表达如下

$$\int_V\delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V-\int_{S_u}\delta T_i\overline{u}_i\mathrm{d}S=0 \tag{1.4.45}$$

将线弹性物理方程(1.4.32)式代入上式，即可得到

$$\int_V\delta\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}\mathrm{d}V-\int_{S_u}\delta T_i\overline{u}_i\mathrm{d}S=0 \tag{1.4.58}$$

同样 C_{ijkl} 也是对称张量，并已知余能表达式(1.4.38)式，所以上式体积分内被积函数就是余能的变分。这是因为

$$\delta\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}=\delta\left(\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)=\delta V(\sigma_{mn}) \tag{1.4.59}$$

而(1.4.58)式面积分内被积函数，在给定位移 $\overline{u}_i$ 保持不变情况下是外力的余能。这样一来，(1.4.58)式可以表示为

$$\delta\Pi_c=0 \tag{1.4.60}$$

其中

$$\begin{aligned}\Pi_c=\Pi_c(\sigma_{ij})&=\int_V V(\sigma_{mn})\mathrm{d}V-\int_{S_u}T_i\overline{u}_i\mathrm{d}S\\&=\int_V\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\mathrm{d}V-\int_{S_u}T_i\overline{u}_i\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1,4,61}$$

是弹性体余能和外力余能的总和，即系统的总余能。(1.4.60)式表明：在所有在弹性体内满足平衡方程，在边界上满足力的边界条件的可能应力中，真实的应力使系统的总余能取驻值。我们还可以用与证明真实位移使系统总位能取最小值类同的步骤，证明在所有可能的应力中，真实应力使系统总余能取最小值，因此(1.4.60)表述的是最小余能原理。

还需指出，由于最小位能原理和最小余能原理都是极值原理，它们可以给出能量的上界或下界，这对估计近似解的特性是有重要意义的。

将(1.4.51)式和(1.4.61)式相加得到

$$
\begin{aligned}
&\Pi_p(\varepsilon_{ij},u_i) + \Pi_c(\sigma_{ij}) \\
&= \int_V \left[\frac{1}{2} D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \right] \mathrm{d}V - \int_V \overline{f}_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i \mathrm{d}S - \int_{S_u} T_i \overline{u}_i \mathrm{d}S \\
&= \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \mathrm{d}V - \int_V \overline{f}_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i \mathrm{d}S - \int_{S_u} T_i \overline{u}_i \mathrm{d}S = 0
\end{aligned}
\tag{1.4.62}
$$

式中第一项体积分等于应变能的二倍，后三项积分（不包括负号）之和是外力功的二倍，根据能量平衡，应变能应等于外力功，因此得到弹性系统的总位能与总余能之和为零。我们用 Π_p，Π_c 表示取真实解时系统的总位能和总余能，Π_p^*，Π_c^* 表示取近似解时系统的总位能和总余能，假定在几何边界 S_u 上给定位移 $\overline{u}_i=0$，可以推得

$$
\Pi_c = \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \mathrm{d}V = \int_V V(\sigma_{ij}) \mathrm{d}V \tag{1.4.63}
$$

$$
\Pi_p = \int_V \frac{1}{2} D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \mathrm{d}V - \int_V \overline{f}_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i \mathrm{d}S \tag{1.4.64}
$$

上式后两项积分（不包括负号）此时是外力功的二倍，因此总位能数值上等于弹性体系的总应变能，取负号，即

$$
\Pi_p = -\int_V \frac{1}{2} D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \mathrm{d}V = -\int_V U(\varepsilon_{ij}) \mathrm{d}V
$$

由最小位能原理知道

$$
\Pi_p^* \geqslant \Pi_p
$$

则有

$$
\int_V U(\varepsilon_{ij}^*) \mathrm{d}V \leqslant \int_V U(\varepsilon_{ij}) \mathrm{d}V \tag{1.4.65}
$$

由最小余能原理

$$
\Pi_c^* \geqslant \Pi_c
$$

则有

$$
\int_V V(\sigma_{ij}^*) \mathrm{d}V \geqslant \int_V V(\sigma_{ij}) \mathrm{d}V \tag{1.4.66}
$$

上二式中 ε_{ij}^*，σ_{ij}^* 分别为取近似解时的位移场和应力场函数。

由(1.4.65)式及(1.4.66)式可见，利用最小位能原理求得位移近似解的弹性变形能是真解变形能的下界，即近似的位移场在总体上偏小，也就是说结构的计算模型显得偏于刚硬；而利用最小余能原理得到的应力近似解的弹性余能是真实解余能的上界，即近似的应力解在总体上偏大，结构的计算模型偏于柔软。当分别利用这两个极值原理求解同一问题时，我们将获得这个问题的上界和下界，可以较准确地估计所得近似解的误差，这对于工程计算具有实际意义。

1.5 小　　结

本章第 2 节简要地介绍了微分方程的等效积分形式以及基于它的近似方法——加权

余量法。由于任意函数(权函数)可以采用不同的函数形式,由之可以建立不同的加权余量格式。第2节给出的仅是常见的几种,实际上还可以根据所分析问题的类型和特点,发展其他形式的加权余量格式。

等效积分形式可以通过分部积分得到它的"弱"形式,这样一来,可以利用提高权函数的连续性要求来降低待求场函数的连续性要求,从而可以在更广泛的范围内选择试探函数。今后将看到,被有限单元法经常利用为理论基础的正是等效积分的Galerkin"弱"形式。这样做不仅降低了对试探函数连续性的要求,而且还可以得到系数矩阵对称的求解方程,从而给计算分析带来很大的方便。

对于线性自伴随微分方程,它的Galerkin"弱"形式等价于某个泛函的变分。当原方程的微分算子为$2m$阶的情况,对应的泛函是二次的。如试探函数事先满足强制边界条件,则此二次泛函具有极值性质。这对于建立近似解的上下界是有意义的。

本章第3节所讨论的变分原理以及第4节所讨论的弹性力学最小位能原理和最小余能原理都属于自然变分原理。在自然变分原理中试探函数事先应满足规定的条件。例如最小位能原理中试探函数——位移——应事先满足几何方程和给定的位移边界条件;最小余能原理中试探函数——应力——应事先满足平衡方程和给定的外力边界条件。如果这些条件未事先满足,则需要利用一定的方法将它们引入泛函。这类变分原理称为约束变分原理,或广义变分原理。利用广义变分原理可以扩大选择试探函数的范围,从而提高利用变分原理求解数学物理问题的能力。广义变分原理作为有限单元法的进一步理论基础将在本书第二篇的开始——第8章中进行讨论。

习　题

1.1　一维热传导问题微分方程由(1.2.26)式给出,按1.2.2节例题3给定的近似解及权函数用加权余量的配点法、子域法及伽辽金法求解并用图1.3进行校核。

1.2　仍是习题1.1的一维热传导问题。但是边界条件改为(1) $\phi=0$ 在 $x=0$;$\phi=1$ 在 $x=L$;(2) $\phi=0$,在 $x=0$;$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=10$,在 $x=L$。现近似函数给定为 $\phi=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$,仍如习题1.1用配点法、子域法及伽辽金法对上述两种边界条件情况求解,并检查各自的收敛性。

1.3　某问题的微分方程是

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+c\phi+Q=0 \qquad 在\,\Omega\,内$$

边界条件是:　$\phi=\bar{\phi}$　(在 Γ_1 上)

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\bar{q}\ (在\ \Gamma_2\ 上)$$

其中c和Q仅是坐标的函数,试证明此方程的微分算子是自伴随的,并建立相应的自然变分原理。

1.4　在习题1.3给出的微分方程中,如令$c=0$,$Q=2$,并令在全部边界上$\phi=0$,则表

示求解杆件自由扭转的应力函数问题，截面的扭矩$T = 2\iint \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。现有一$4\times 6$的矩形截面杆，给定近似函数为

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{3} a_i N_i = a_1 \cos\frac{\pi x}{6}\cos\frac{\pi y}{4} + a_2 \cos\frac{3\pi x}{6}\cos\frac{\pi y}{4} + a_3 \cos\frac{\pi x}{6}\cos\frac{3\pi y}{4}$$

试用里兹法求解，并算出截面扭矩。

1.5 如有一问题的泛函为$\Pi(w) = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 + \frac{kw^2}{2} + qw\right]\mathrm{d}x$其中$E, I, k$是常数，$q$是给定函数，$w$是未知函数，试导出原问题的微分方程和边界条件。

1.6 问题的泛函为

$$\Pi(\phi) = \int_\Omega \left[\frac{k}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - Q\phi\right]\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_q}\left(\frac{\alpha}{2}\phi^2 - \bar{q}\phi\right)\mathrm{d}\Gamma$$

其中$k, Q, \alpha, \bar{q}$仅是坐标的函数，试决定欧拉方程，并识别Γ_ϕ上的自然边界条件和$\Gamma - \Gamma_q$上的强制边界条件。

1.7 弹性薄板挠度w的微分方程是

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}$$

第2章　弹性力学问题有限单元法的一般原理和表达格式

2.1　引　　言

本章中我们将通过弹性力学变分原理建立弹性力学问题有限单元法的表达格式。最小位能原理的未知场变量是位移。以结点位移为基本未知量、并基于最小位能原理建立的有限单元称为位移元，它是有限单元法中最常用的单元，也是本书中主要讨论的单元。

我们将以平面问题3结点三角形单元为重点，对建立有限元求解方程的原理和步骤进行较详细讨论。并进而引出广义坐标有限单元法的一般格式。有了有限元法的一般表达格式，原则上说可以推得对任一种单元的表达格式。轴对称问题3结点三角形单元的表达格式是平面问题此种单元表达格式的直接推广。同时由于轴对称问题具有很广泛的应用领域，所以我们对它也进行了专门的讨论。

对于除3结点三角形而外的单元，如何通过广义坐标导出单元的插值函数也进行讨论，特别是引入了自然坐标(对于三角形单元和四面体单元分别是面积坐标和体积坐标)的概念，这对今后研究和建立各类形式的单元是非常有用的。至于单元和插值函数更一般的讨论，特别是等参单元的讨论将放在第3章、第4章中进行。

作为一种数值方法，有限元解的收敛性和精度估计无疑是一个十分重要的问题，本章第4节简要地讨论了解的收敛准则和精度估计，所阐明的一般原则将在以后各章中进一步具体化。

2.2　平面问题3结点三角形单元的有限元格式

由于三角形单元对复杂边界有较强的适应能力，因此很容易将一个二维域离散成有限个三角形单元，如图2.1所示。在边界上以若干段直线近似原来的曲线边界，随着单元增多，这种拟合将越精确。

下面讨论平面问题3结点三角形单元的有限元格式。

2.2.1　单元位移模式及插值函数

典型的3结点三角形单元结点编码为i,j,m，以逆时针方向编码为正向。每个结点有2个位移分量如图2.2所示

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \qquad (i,j,m)$$

每个单元有6个结点位移即6个结点自由度

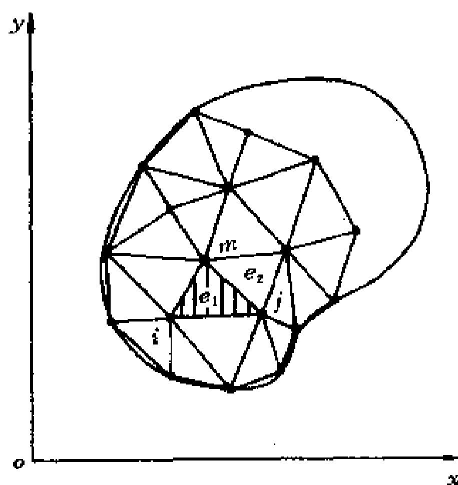


图 2.1　二维域离散

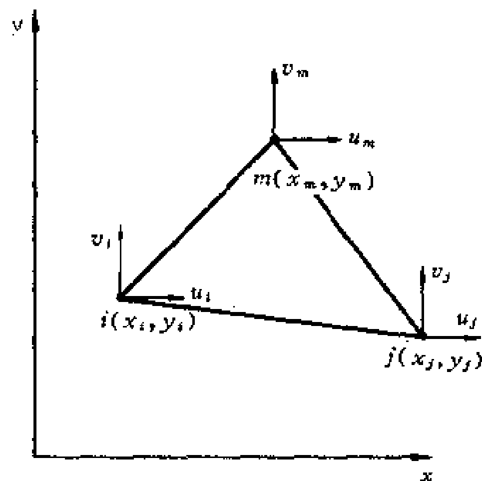


图 2.2　3 结点三角形单元

$$a^e = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \end{Bmatrix} = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T$$

1. 单元的位移模式及插值函数

在有限单元法中单元的位移模式或称位移函数一般采用多项式作为近似函数，因为多项式运算简便，并且随着项数的增多，可以逼近任何一段光滑的函数曲线。多项式的选取应由低次到高次。

3 结点三角形单元位移模式选取一次多项式

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ v &= \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

单元内的位移是坐标 x,y 的线性函数。$\beta_1 \sim \beta_6$ 是待定系数，称之为广义坐标。6 个广义坐标可由单元的 6 个结点位移来表示。在(2.2.1)的 1 式中代入结点 i 的坐标(x_i,y_i)可得到结点 i 在 x 方向的位移 u_i，

同理可得

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i \\ u_j &= \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j \\ u_m &= \beta_1 + \beta_2 x_m + \beta_3 y_m \end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}$$

解(2.2.2)式可以得到广义坐标由结点位移表示的表达式。系数行列式是

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2A \tag{2.2.3}$$

A 是三角形单元的面积。

广义坐标 $\beta_1 \sim \beta_3$ 为

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2A}(a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) \\ \beta_2 &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2A}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \beta_3 &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2A}(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m)\end{aligned}\right\} \tag{2.2.4}$$

同理，利用 3 个结点 y 方向的位移，即(2.2.1)式的 2 式可求得

$$\left.\begin{aligned}\beta_4 &= \frac{1}{2A}(a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m) \\ \beta_5 &= \frac{1}{2A}(b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) \\ \beta_6 &= \frac{1}{2A}(c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m)\end{aligned}\right\} \tag{2.2.5}$$

在(2.2.4)式和(2.2.5)式中

$$\left.\begin{aligned}a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m \qquad (i,j,m) \\ c_i &= \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = -x_j + x_m\end{aligned}\right\} \tag{2.2.6}$$

上式(i,j,m)表示下标轮换，如 $i\to j, j\to m, m\to i$。

将求得的广义坐标 $\beta_1 \sim \beta_6$ 代入(2.2.1)式，可将位移函数表示成结点位移的函数

$$\left.\begin{aligned}u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m\end{aligned}\right\} \tag{2.2.7}$$

其中

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (i,j,m) \tag{2.2.8}$$

N_i, N_j, N_m 称为单元的插值函数或形函数，它是坐标 x、y 的一次函数。$a_i, b_i, c_i, \cdots, c_m$ 是常数，取决于单元的三个结点坐标。

(2.2.8)式中的单元面积 A 可通过(2.2.6)式的系数表示为

$$A = \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}(a_i + a_j + a_m) = \frac{1}{2}(b_i c_j - b_j c_i) \tag{2.2.9}$$

(2.2.7)式的矩阵形式是

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$$= [IN_i \quad IN_j \quad IN_m] \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$= [N_i \quad N_j \quad N_m] a^e = N a^e \tag{2.2.10}$$

N 称为插值函数矩阵或形函数矩阵。

插值函数具有如下性质：

(1) 在结点上插值函数的值有

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & 当 \quad j = i \\ 0 & 当 \quad j \neq i \end{cases} \quad (i, j, m) \tag{2.2.11}$$

即有 $N_i(x_i, y_i) = 1$，$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0$。也就是说在 i 结点上 $N_i = 1$，在 j、m 结点上 $N_i = 0$。由(2.2.7)式可见，当 $x = x_i$，$y = y_i$ 即在结点 i，应有 $u = u_i$，因此也必然要求 $N_i = 1$，$N_j = N_m = 0$。其他两个形函数也具有同样的性质。

(2) 在单元中任一点各插值函数之和应等于1，即

$$N_i + N_j + N_m = 1 \tag{2.2.12}$$

因为若单元发生刚体位移，如 x 方向有刚体位移 u_0，则单元内(包括结点上到处应有位移 u_0，即 $u_i = u_j = u_m = u_0$，又由(2.2.7)有

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m$$
$$= (N_i + N_j + N_m) u_0 = u_0$$

因此必然要求 $N_i + N_j + N_m = 1$。若插值函数不满足此要求，则不能反映单元的刚体位移，用以求解必然得不到正确的结果。

(3) 对于现在的单元，插值函数是线性的，在单元内部及单元的边界上位移也是线性的，可由结点上的位移值唯一地确定。由于相邻单元公共结点的结点位移是相等的，因此保证了相邻单元在公共边界上位移的连续性。

2. 应变矩阵和应力矩阵

确定了单元位移后，可以很方便地利用几何方程和物理方程求得单元的应变和应力。在(1.4.21)式的几何方程中，位移用(2.2.10)式代入，得到单元应变

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = Lu = LNa^e = L[N_i \quad N_j \quad N_m] a^e$$

$$= [B_i \quad B_j \quad B_m] a^e = B a^e \tag{2.2.13}$$

B 称为应变矩阵，L 是平面问题的微分算子，见表 1.2。

应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的分块子矩阵是

$$\boldsymbol{B}_i = \mathbf{L}\boldsymbol{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{2.2.14}$$

对(2.2.8)式求导可得

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} b_i, \qquad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} c_i \tag{2.2.15}$$

代入(2.2.14)式得到

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{2.2.16}$$

3 结点单元的应变矩阵是

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_i \quad \boldsymbol{B}_j \quad \boldsymbol{B}_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \tag{2.2.17}$$

式中 $b_i, b_j, b_m, c_i, c_j, c_m$ 由(2.2.6)式确定，它们是单元形状的参数。当单元的结点坐标确定后，这些参数都是常量(与坐标变量 x, y 无关)，因此 $\boldsymbol{B}$ 是常量阵。当单元的结点位移 $\boldsymbol{a}^e$ 确定后，由 $\boldsymbol{B}$ 转换求得的单元应变都是常量，也就是说在载荷作用下单元中各点具有同一的 ϵ_x 值、ϵ_y 值及 γ_{xy} 值。因此 3 结点三角形单元称为常应变单元。在应变梯度较大(也即应力梯度较大)的部位，单元划分应适当密集，否则将不能反映应变的真实变化而导致较大的误差。

单元应力可以根据物理方程求得。在(1.4.21)的物理方程中代入(2.2.13)式可以得到

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{S}\boldsymbol{a}^e \tag{2.2.18}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}[\boldsymbol{B}_i \quad \boldsymbol{B}_j \quad \boldsymbol{B}_m] \\ &= [\boldsymbol{S}_i \quad \boldsymbol{S}_j \quad \boldsymbol{S}_m] \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

$\boldsymbol{S}$ 称为应力矩阵。将平面应力或平面应变的弹性矩阵(见表 1.2)及(2.2.17)式代入(2.2.19)式，可以得到计算平面应力或平面应变问题的单元应力矩阵。$\boldsymbol{S}$ 的分块矩阵为

$$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_i = \frac{E_0}{2(1-\nu_0^2)A} \begin{bmatrix} b_i & \nu_0 c_i \\ \nu_0 b_i & c_i \\ \frac{1-\nu_0}{2} c_i & \frac{1-\nu_0}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{2.2.20}$$

其中 E_0, ν_0 为材料常数。

对于平面应力问题

$$E_0 = E, \qquad \nu_0 = \nu \tag{2.2.21}$$

对于平面应变问题

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \qquad \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{2.2.22}$$

与应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相同，应力矩阵 $\boldsymbol{S}$ 也是常量阵，即 3 结点单元中各点的应力是相同的。在很多情况下，不单独定义应力矩阵 $\boldsymbol{S}$，而直接用 $\boldsymbol{DB}$ 进行应力计算。

2.2.2 利用最小位能原理建立有限元方程

最小位能原理的泛函总位能 Π_p 的表达式(1.4.51)，在平面问题中采用矩阵表达形式为

$$\Pi_p = \int_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_\Omega \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{S_\sigma}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}t\mathrm{d}S \tag{2.2.23}$$

其中 t 是二维体厚度；

$\boldsymbol{f}$ 是作用在二维体内的体积力；

$\boldsymbol{T}$ 是作用在二维体边界上的面积力。

对于离散模型，系统位能是各单元位能的和，利用式(2.2.23)并代入(2.2.10)及(2.2.13)式，即得到离散模型的总位能

$$\begin{aligned}\Pi_p = &\sum_e\left(\boldsymbol{a}^{e\mathrm{T}}\int_{\Omega_e}\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{a}^e\right)\\ &-\sum_e\left(\boldsymbol{a}^{e\mathrm{T}}\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)-\sum_e\left(\boldsymbol{a}^{e\mathrm{T}}\int_{S_\sigma^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}t\mathrm{d}S\right)\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

将单元结点位移 $\boldsymbol{a}^e$ 用结构结点位移 $\boldsymbol{a}$ 表示

$$\boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{G}\boldsymbol{a} \tag{2.2.25}$$

其中

$$\boldsymbol{a} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_i \quad v_i \quad \cdots \quad u_n v_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{G}_{6\times 2n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2i-1 & 2i & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 2j-1 & 2j & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.26}$$

其中 n 为结构的结点数。

令：$\int_{\Omega^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\boldsymbol{K}^e$　称为单元刚度矩阵。

$\int_{\Omega^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\boldsymbol{P}_f^e$

$$\int_{S_\sigma^e} N^{\mathrm{T}} T t \mathrm{d}S = P_S^e \tag{2.2.27}$$

$P^e = P_b^e + P_S^e$　称为单元等效结点载荷列阵。

将(2.2.25)～(2.2.27)式一并代入(2.2.24)式，离散形式的总位能可表示为

$$\Pi_p = a^{\mathrm{T}} \frac{1}{2} \sum_e (G^{\mathrm{T}} K^e G) a - a^{\mathrm{T}} \sum_e (G^{\mathrm{T}} P^e) \tag{2.2.28}$$

令　$K = \sum_e G^{\mathrm{T}} K^e G$　称为结构整体刚度矩阵。

$P = \sum_e G^{\mathrm{T}} P^e$　称为结构结点载荷列阵。　(2.2.29)

(2.2.28)式就可以写作

$$\Pi_p = \frac{1}{2} a^{\mathrm{T}} K a - a^{\mathrm{T}} P \tag{2.2.30}$$

离散形式的总位能 Π_p 的未知变量是结构的结点位移 a，根据变分原理，泛函 Π_p 取驻值的条件是它的一次变分为零，$\delta \Pi_p = 0$，即

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a} = 0 \tag{2.2.31}$$

这样我们得到有限元的求解方程是

$$K a = P \tag{2.2.32}$$

其中 K 和 P 由(2.2.29)式给出。由(2.2.29)式可以看出结构整体刚度矩阵 K 和结构结点载荷列阵 P 都是由单元刚度矩阵 K^e 和单元等效结点载荷列阵 P^e 集合而成。式中 G 为单元结点转换矩阵。

2.2.3　单元刚度矩阵

由(2.2.27a)式定义的单元刚度矩阵，由于应变矩阵 B 对于 3 结点三角形单元是常量阵，因此有

$$K^e = B^{\mathrm{T}} D B t A = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix} \tag{2.2.33}$$

代入弹性矩阵 D 和应变矩阵 B 后，它的任一分块矩阵可表示成

$$K_{rs} = B_r^{\mathrm{T}} D B_s t A = \frac{E_0 t}{4(1-\nu_0^2)A} \begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_2 & K_4 \end{bmatrix} \quad (r, s = i, j, m) \tag{2.2.34}$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= b_r b_s + \frac{1-\nu_0}{2} c_r c_s \\ K_2 &= \nu_0 c_r b_s + \frac{1-\nu_0}{2} b_r c_s \\ K_3 &= \nu_0 b_r c_s + \frac{1-\nu_0}{2} c_r b_s \\ K_4 &= c_r c_s + \frac{1-\nu_0}{2} b_r b_s \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

由(2.2.34)式立即可以得到

$$(\boldsymbol{K}_{sr})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{K}_{rs} \tag{2.2.36}$$

由此可见单元刚度矩阵是对称矩阵。

为了进一步理解单元刚度矩阵的物理意义，我们同样可以利用最小位能原理建立一个单元的平衡，这就得到

$$\boldsymbol{K}^e \boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{P}^e \tag{2.2.37}$$

$\boldsymbol{P}^e$ 是单元结点载荷，当然应当包括其它相邻单元对该单元的作用力。现把 $\boldsymbol{a}^e$、$\boldsymbol{P}^e$ 顺序表示为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^e &= [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^{\mathrm{T}} \\
&= [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_6]^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{P}^e &= [P_{ix} \quad P_{iy} \quad P_{jx} \quad P_{jy} \quad P_{mx} \quad P_{my}]^{\mathrm{T}} \\
&= [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \cdots \quad P_6]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

(2.2.37)式的展开形式是

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{26} \\ \cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots & & & \\ K_{61} & K_{62} & \cdots & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \tag{2.2.38}$$

这是单元结点平衡方程，每个结点在 x 和 y 方向上各有一个平衡方程，3 个结点共有六个平衡方程。方程左端是通过单元结点位移表示的单元结点内力，方程右端是单元结点外载。

令 $a_1=1(u_i=1),a_2=a_3=\cdots=a_6=0$

由(2.2.38)式可以得到

$$\begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ \vdots \\ K_{61} \end{Bmatrix}_{a_1=1} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_6 \end{Bmatrix} \tag{2.2.39}$$

(2.2.39)式表明，单元刚度矩阵第一列元素的物理意义是：当 $a_1=1$，其他结点位移都为零时，需要在单元各结点位移方向上施加结点力的大小。当然，单元在这些结点力作用下处于平衡，因此在 x 和 y 方向上结点力之和应为零：

x 方向　　$K_{11}+K_{31}+K_{51}=0$

y 方向　　$K_{21}+K_{41}+K_{61}=0$

对于单元刚度矩阵中其他列的元素也可用同样的方法得到它们的物理解释。因此单元刚度矩阵中任一元素 K_{ij}的物理意义为：当单元的第 j 个结点位移为单位位移而其他结点位移为零时，需在单元第 i 个结点位移方向上施加的结点力的大小。单元刚性大，则使结点产生单位位移所需施加的结点力就大。因此单元刚度矩阵中的每个元素反映了单元

刚性的大小，称为刚度系数。对于单元刚度矩阵的每一列(行)元素应有

$$\begin{aligned} K_{1j}+K_{3j}+K_{5j}=K_{j1}+K_{j3}+K_{j5}=0 \\ K_{2j}+K_{4j}+K_{6j}=K_{j2}+K_{j4}+K_{j6}=0 \end{aligned} \quad (j=1\sim 6) \tag{2.2.40}$$

单元刚度矩阵的特性可归纳如下：

(1) 对称性

已由(2.2.36)式证明

(2) 奇异性

单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 是奇异的，它不存在逆矩阵。$\boldsymbol{K}^e$ 的秩是 3。

单元刚度矩阵奇异的物理解释是：单元处于平衡时，结点力相互不是独立的，它们必须满足三个平衡方程(两个方向力的平衡，和绕任一点力矩的平衡)，因此它们是线性相关的。另一方面，即使给定满足平衡的单元结点力 $\boldsymbol{P}^e$，也不能确定单元结点位移 $\boldsymbol{a}^e$，因为单元还可以有任意的刚体位移(对于平面问题，这种刚体位移是两个方向的移动和一个面内的转动)。

(3) 主元恒正

$$\boldsymbol{K}_{ii}>0 \tag{2.2.41}$$

分块矩阵 $\boldsymbol{K}_{rs}$ 当 $r=s=i,j,m$ 时，它的对角元素 K_1，K_4 即为主元，由(2.2.34)及(2.2.35)式可见它们是恒正的。

$\boldsymbol{K}_{ii}$ 恒正的物理意义是要使结点位移 $a_i=1$，施加在 a_i 方向的结点力必须与位移 a_i 同向。

2.2.4 单元等效结点载荷列阵

由(2.2.27b～d)式得到单元等效结点载荷是

$$\boldsymbol{P}^e=\boldsymbol{P}_b^e+\boldsymbol{P}_S^e \tag{2.2.27d}$$

$$\boldsymbol{P}_b^e=\int_{\Omega^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.2.27b}$$

$$\boldsymbol{P}_S^e=\int_{S_\sigma^e}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}t\mathrm{d}S \tag{2.2.27c}$$

现在我们计算几种常见载荷。

1. 均质等厚单元的自重

单元的单位体积重量为 ρ。如图 2.3 所示。根据(2.2.27b)式，现有

$$\boldsymbol{f}=\begin{Bmatrix}0\\-\rho\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_\rho^e=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}_i\\\boldsymbol{P}_j\\\boldsymbol{P}_m\end{Bmatrix}_\rho=\int_{\Omega_e}\begin{bmatrix}N_i\\N_j\\N_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\-\rho\end{Bmatrix}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.2.42}$$

其中每个结点的等效结点载荷是

$$P_{i\rho}=\begin{Bmatrix}P_{ix}\\P_{iy}\end{Bmatrix}_\rho=\int_{\Omega_e}\begin{bmatrix}N_i & 0\\0 & N_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\-\rho\end{Bmatrix}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\-\int_{\Omega_e}N_i\rho t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\-\frac{1}{3}\rho tA\end{Bmatrix}\quad(i,j,m)\qquad(2.2.43)$$

自重的等效结点载荷是

$$P_\rho=-\frac{1}{3}\rho tA[0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}\qquad(2.2.44)$$

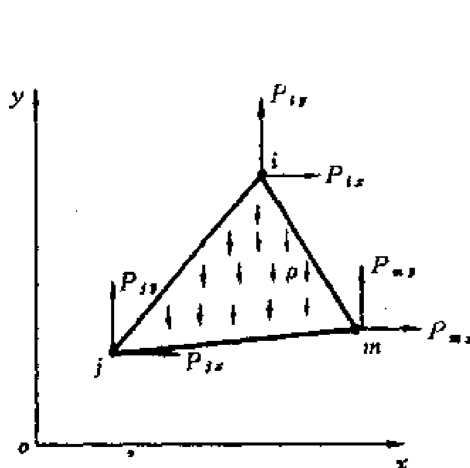


图 2.3 三角形单元作用体积力

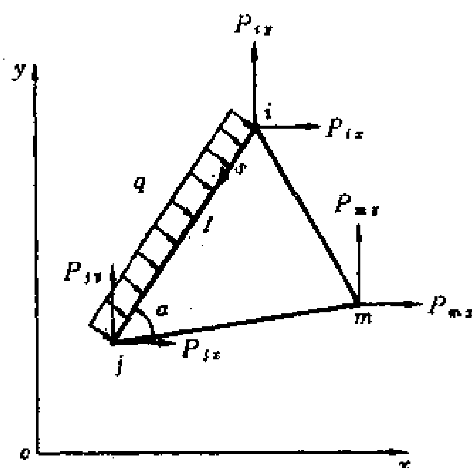


图 2.4 单元边上作用均布侧压

2. 均布侧压 q，作用在 ij 边，q 以压为正，如图 2.4。令 ij 边长为 l，与 x 轴的夹角为 α 侧压 q 在 x 和 y 方向的分量 q_x 和 q_y 为

$$q_x=q\sin\alpha=\frac{q}{l}(y_i-y_j)$$

$$q_y=-q\cos\alpha=\frac{q}{l}(x_j-x_i)$$

作用在单元边界上的面积力

$$T=\begin{Bmatrix}q_x\\q_y\end{Bmatrix}=\frac{q}{l}\begin{Bmatrix}y_i-y_j\\x_j-x_i\end{Bmatrix}\qquad(2.2.45)$$

在单元边界上可取局部坐标 s（见图 2.4），沿 ij 边插值函数可写作

$$N_i=1-\frac{s}{l},\quad N_j=\frac{s}{l},\quad N_m=0\qquad(2.2.46)$$

将(2.2.45)及(2.2.46)式代入(2.2.27c)式便可求得侧压作用下的单元等效结点载荷

$$P_{ix}=\int_l N_iq_xt\mathrm{d}s=\int_l\left(1-\frac{s}{l}\right)q_xt\mathrm{d}s=\frac{t}{2}q(y_i-y_j)$$

$$P_{iy}=\frac{t}{2}q(x_j-x_i)$$

$$P_{jx} = \int_l N_j q_x t \mathrm{d}s = \int_l \frac{s}{l} q_x t \mathrm{d}s = \frac{t}{2} q(y_i - y_j)$$

$$P_{jy} = \frac{t}{2} q(x_j - x_i)$$

$$P_{mx} = P_{my} = 0$$

因此
$$\boldsymbol{P}_q = \frac{1}{2} qt [y_i - y_j \quad x_j - x_i \quad y_i - y_j \quad x_j - x_i \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{2.2.47}$$

3. x 向均布力 q

作用在 ij 边，如图 2.5。这时边界上面积力

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix}$$

单元等效结点载荷为

$$\boldsymbol{P}^e = \frac{1}{2} qlt [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{2.2.48}$$

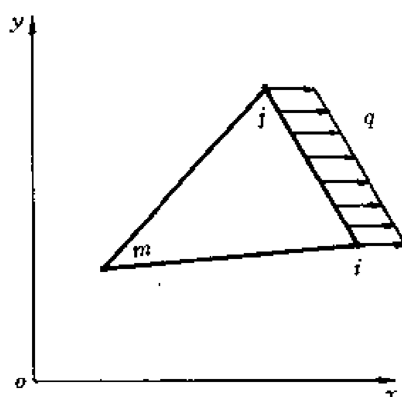


图 2.5 单元边上作用 x 方向均布力

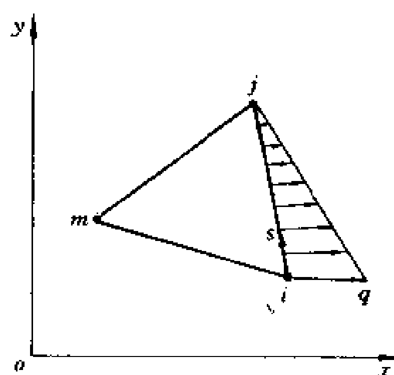


图 2.6 单元边上作用 x 方向三角形分布载荷

4. x 方向三角形分布载荷

作用在 ij 边，如图 2.6。这时边界上面积力写作局部坐标 s 的函数

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{s}{l}\right) q \\ 0 \end{Bmatrix}$$

单元等效结点载荷为

$$\boldsymbol{P}^e = \frac{1}{2} qlt \left[\frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.2.49}$$

2.2.5 结构刚度矩阵和结构结点载荷列阵的集成

(2.2.29)式给出了结构刚度矩阵和结构结点载荷列阵由单元刚度矩阵和单元等效结点载荷列阵集成的表达式。集成是通过单元结点转换矩阵 $\boldsymbol{G}$ 实现的。现在我们来讨论它们的转换和集成。

对于单元刚度矩阵，它的转换是：

$$
\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{e}\boldsymbol{G}=
\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ n \end{matrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{I} & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \vdots \\
\vdots & \boldsymbol{I} & \vdots \\
\vdots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \boldsymbol{I} \\
0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} & \boldsymbol{K}_{im} \\
\boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} & \boldsymbol{K}_{jm} \\
\boldsymbol{K}_{mi} & \boldsymbol{K}_{mj} & \boldsymbol{K}_{mm}
\end{bmatrix}
\overset{\begin{matrix}1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & m & \cdots & n\end{matrix}}{
\begin{bmatrix}
0 \cdots 0\ \boldsymbol{I}\ 0 \cdots \cdots\cdots \cdots \cdots\cdots \cdots 0 \\
0 \cdots \cdots\cdots \cdots 0\ \boldsymbol{I}\ 0 \cdots \cdots\cdots \cdots 0 \\
0 \cdots \cdots\cdots \cdots \cdots\cdots \cdots 0\ \boldsymbol{I}\ 0 \cdots 0
\end{bmatrix}}
$$

$$
=\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ n \end{matrix}
\begin{matrix}
\begin{matrix}1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & m & \cdots & n\end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \boldsymbol{K}_{ii} & \cdots & \boldsymbol{K}_{ij} & \cdots & \boldsymbol{K}_{im} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \boldsymbol{K}_{ji} & \cdots & \boldsymbol{K}_{jj} & \cdots & \boldsymbol{K}_{jm} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \boldsymbol{K}_{mi} & \cdots & \boldsymbol{K}_{mj} & \cdots & \boldsymbol{K}_{mm} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{matrix}
\qquad (2.2.50)
$$

其中 n 为结构结点总数；i,j,m 为单元结点码。

得到的(2.2.50)式中除标明的 9 个子块外，其它皆是零元素。

单元刚度矩阵的这个变换起到两个作用

(1) 将单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^{e}$ 扩大到与结构刚度矩阵同阶，以便进行矩阵相加。

(2) 将单元刚度矩阵中的各子块按照单元结点的实际编码安放在扩大的矩阵中，它的物理意义是该单元对结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的那些刚度系数有贡献。

对于单元等效结点载荷的转换：

$$
G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^e = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{I} & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{I} & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{I} \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_i^e \\ \boldsymbol{P}_j^e \\ \boldsymbol{P}_m^e \end{Bmatrix} =
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boldsymbol{P}_i^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boldsymbol{P}_j^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boldsymbol{P}_m^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.2.51)
$$

单元等效结点载荷 $\boldsymbol{P}^e$ 包括体积力及面积力等的等效结点载荷。由(2.2.51)式可见单元等效结点载荷列阵的转换是将单元结点载荷列阵的阶数扩大到与结构结点载荷列阵同阶，并将单元结点载荷按结点自由度顺序入位。它的物理意义是该单元的等效结点载荷对整个结构载荷列阵 $\boldsymbol{P}$ 的贡献。

经过这样的转换，就可以叠加相关的扩大后的矩阵得到的结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和结点载荷列阵 $\boldsymbol{P}$，即(2.2.29)式。

在实际编程计算的过程中这个集成过程不是采用上述的矩阵相乘法进行的，在计算得到 $\boldsymbol{K}^e$，$\boldsymbol{P}^e$ 的各元素后，只需按照单元的结点自由度编码，"对号入座"地叠加到结构刚度矩阵和结构载荷列阵的相应位置上即可实现。

我们举例说明集成过程，设有单元 e，它的单元刚度矩阵和等效结点载荷阵分别为：

$$
\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} & \boldsymbol{K}_{im} \\ \boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} & \boldsymbol{K}_{jm} \\ \boldsymbol{K}_{mi} & \boldsymbol{K}_{mj} & \boldsymbol{K}_{mm} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_i^e \\ \boldsymbol{P}_j^e \\ \boldsymbol{P}_m^e \end{bmatrix}
$$

该单元的结点码 i,j,m 分别为 3,8,2。根据(2.2.50)及(2.2.51)式，扩大后的单元刚度矩阵和结点载荷列阵分别为：

$$
G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^e G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 8 \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \cdots\cdots 8 \cdots n \\ \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{K}_{mm}^e & \boldsymbol{K}_{mi}^e & \vdots & \boldsymbol{K}_{mj}^e & \vdots \\ & \boldsymbol{K}_{im}^e & \boldsymbol{K}_{ii}^e & \vdots & \boldsymbol{K}_{ij}^e & \vdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \boldsymbol{K}_{jm}^e & \boldsymbol{K}_{ji}^e & \vdots & \boldsymbol{K}_{jj}^e & \vdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^e = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ 8 \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{Bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{P}_m^e \\ \boldsymbol{P}_i^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boldsymbol{P}_j^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

它们仅显示了该单元矩阵对结构整体矩阵的贡献。计算中的集成只需计算了单元矩阵元

素后直接“对号入座”地叠加到结构刚度矩阵及结构载荷列阵中即可：

$$
\boldsymbol{K}:\quad \begin{bmatrix}
\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} & \cdots\cdots & \boldsymbol{K}_{18} & \cdots & \boldsymbol{K}_{1n} \\
\boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22}+\boldsymbol{K}_{mm}^{e} & \boldsymbol{K}_{23}+\boldsymbol{K}_{mi}^{e} & \cdots\cdots & \boldsymbol{K}_{28}+\boldsymbol{K}_{mj}^{e} & \cdots & \boldsymbol{K}_{2n} \\
\boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{K}_{32}+\boldsymbol{K}_{im}^{e} & \boldsymbol{K}_{33}+\boldsymbol{K}_{ii}^{e} & \cdots\cdots & \boldsymbol{K}_{38}+\boldsymbol{K}_{ij}^{e} & \cdots & \boldsymbol{K}_{3n} \\
\cdots & \cdots\cdots & & & & & \\
\cdots & \cdots\cdots & & & & & \\
\boldsymbol{K}_{81} & \boldsymbol{K}_{82}+\boldsymbol{K}_{jm}^{e} & \boldsymbol{K}_{83}+\boldsymbol{K}_{ji}^{e} & \cdots\cdots & \boldsymbol{K}_{88}+\boldsymbol{K}_{jj}^{e} & \cdots & \boldsymbol{K}_{8n} \\
\cdots & \cdots\cdots & & & & & \vdots \\
\boldsymbol{K}_{n1} & \boldsymbol{K}_{n2} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \boldsymbol{K}_{nn}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{P}:\quad \begin{Bmatrix}
\boldsymbol{P}_{1}^{e} \\
\boldsymbol{P}_{2}^{e}+\boldsymbol{P}_{m}^{e} \\
\boldsymbol{P}_{3}+\boldsymbol{P}_{i}^{e} \\
\vdots \\
\boldsymbol{P}_{8}+\boldsymbol{P}_{j}^{e} \\
\vdots \\
\boldsymbol{P}_{n}
\end{Bmatrix}
$$

当全部单元依次计算和集成，即可得到结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和结构结点载荷列阵 $\boldsymbol{P}$。具体实现过程可参见平面问题 3 结点单元有限元程序的框图和有关源程序。

2.2.6　结构刚度矩阵的特点

由前面的讨论可知结构的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是由单元刚度矩阵集合而成，它与单元刚度矩阵类同也具有明显的物理意义。有限元的求解方程(2.2.32)式是结构离散后每个结点的平衡方程。结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的任一元素 K_{ij} 的物理意义是：结构第 j 个结点位移为单位值而其它结点位移皆为零时，需在第 i 个结点位移方向上施加的结点力的大小。与单元不同之处在于结构是单元的集合体，每个单元都对结构起一定的作用。由于单元刚度矩阵是对称和奇异的，由它们集成的结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 也是对称和奇异的，也就是说结构至少需给出能限制刚体位移的约束条件才能消除 $\boldsymbol{K}$ 的奇异性，以便由(2.2.32)式求得结点位移。

连续体离散为有限个单元体，由图 2.1 可见，每个结点的相关单元只是围绕在该结点周围为数甚少的几个，一个结点通过相关单元与之发生关系的相关结点也只是它周围的少数几个，因此虽然总体单元数和结点数很多，结构刚度矩阵的阶数很高，但刚度系数中非零系数却很少，这就是刚度矩阵的大型和稀疏性。只要结点编号是合理的，这些稀疏的非零元素将集中在以主对角线为中心的一条带状区域内，即具有带状分布的特点。如图 2.7 所示。

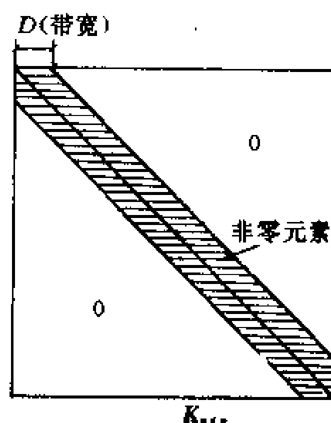


图 2.7　结构刚度矩阵的带状分布

综上所述，有限单元法最后建立的方程组的大型系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 具有以下性质：(1) 对称性；(2) 奇异性；(3) 稀疏性；(4) 非零元素呈带状分布。由于方程组的大型，在求解方程时，除引入位移边界条件使奇异性消失外，其他特点都必须在解方程中予以充分的考虑和利用，以提高解题的效率。

2.2.7 引入位移边界条件

最小位能变分原理是具有附加条件的变分原理，它要求场函数 u 满足几何方程和位移边界条件(见 1.4.4 节)。现在离散模型的近似场函数在单元内部满足几何方程，因此由离散模型近似的连续体内几何方程也是满足的。但是我们在选择场函数的试探函数(多项式)时，却没有提出在边界上满足位移边界条件的要求，因此必须将这个条件引入有限元方程，使之得到满足。

在有限单元法中通常几何边界条件(变分问题中就是强制边界条件)的形式是在若干个结点上给定场函数的值，即

$$a_j = \bar{a}_j \qquad (j = c_1, c_2, \cdots, c_l)$$

$\bar{a}_j$ 可以是零值或非零值。

对于求解位移场的问题时，至少要提出足以约束系统刚体位移的几何边界条件，以消除结构刚度矩阵的奇异性。

可以采用以下方法引入强制边界条件

(1) 直接代入法

在方程组(2.2.32)中将已知结点位移的自由度消去，得到一组修正方程，用以求解其他待定的结点位移。其原理是按结点位移已知和待定重新组合方程

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ab} \\ \boldsymbol{K}_{ba} & \boldsymbol{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_a \\ \boldsymbol{a}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_a \\ \boldsymbol{P}_b \end{Bmatrix} \tag{2.2.52}$$

其中　$\boldsymbol{a}_a$ 为待定结点位移

　　$\boldsymbol{a}_b$ 为已知结点位移，$\boldsymbol{a}_b^{\mathrm{T}} = [\bar{a}_{c1} \quad \bar{a}_{c2} \quad \cdots \quad \bar{a}_{cl}]$

$\boldsymbol{K}_{aa}, \boldsymbol{K}_{ab}, \boldsymbol{K}_{ba}, \boldsymbol{K}_{bb}, \boldsymbol{P}_a, \boldsymbol{P}_b$，等为与之相应的刚度矩阵和载荷列阵的分块矩阵。由刚度矩阵的对称性可知 $\boldsymbol{K}_{ba} = \boldsymbol{K}_{ab}^{\mathrm{T}}$。

由(2.2.52)式的上式可得

$$\boldsymbol{K}_{aa}\boldsymbol{a}_a + \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{P}_a \tag{2.2.53}$$

由于 $\boldsymbol{a}_b$ 为已知，最后的求解方程可写为

$$\boldsymbol{K}^* \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{P}^* \tag{2.2.54}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^* &= \boldsymbol{K}_{aa} \\ \boldsymbol{a}^* &= \boldsymbol{a}_a \\ \boldsymbol{P}^* &= \boldsymbol{P}_a - \boldsymbol{K}_{ab}\boldsymbol{a}_b \end{aligned} \tag{2.2.55}$$

若总结点位移为 n 个，其中有已知结点位移 m 个，则得到一组求解 $n-m$ 个待定结点位移的修正方程组，$\boldsymbol{K}^*$ 为 $n-m$ 阶方阵。修正方程组的意义是在原来 n 个方程中，只保留与待定(未知的)结点位移相应的 $n-m$ 个方程，并将方程中左端的已知位移和相应刚度系数

的乘积(是已知值)移至方程右端作为载荷修正项。

这种方法要重新组合方程,组成的新方程阶数降低了,但结点位移的顺序性已被破坏,这给编制程序带来一些麻烦。

(2) 对角元素改1法

当给定位移值是零位移时,例如无移动的铰支座、链杆支座等。可以在系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中将与零结点位移相对应的行列中,将主对角元素改为1,其它元素改为0;在载荷列阵中将与零结点位移相对应的元素改为0即可。例如有 $a_j=0$,则对方程系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的第 j 行、j 列及载荷阵第 j 个元素作如下修改

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \tag{2.2.56}$$

这样修正后,解方程则可得 $a_j=0$。对多个给定零位移则依次修正,全都修正完毕后再求解。用这种方法引入强制边界条件比较简单,不改变原来方程的阶数和结点未知量的顺序编号。但这种方法只能用于给定零位移。

(3) 对角元素乘大数法

当有结点位移为给定值 $a_j=\bar{a}_j$ 时,第 j 个方程作如下修改:对角元素 K_{jj} 乘以大数 α(α 可取 10^{10} 左右量级),并将 P_j 用 $\alpha K_{jj}\bar{a}_j$ 取代,即

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \\ K_{j1} & K_{j2} & \cdots & \boxed{\alpha K_{jj}} \cdots & K_{jn} \\ \cdots & \cdots & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \boxed{\alpha K_{jj}\bar{a}_j} \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \tag{2.2.57}$$

经过修改后的第 j 个方程为

$$K_{j1}a_1 + K_{j2}a_2 + \cdots + \alpha K_{jj}a_j + \cdots K_{jn}a_n = \alpha K_{jj}\bar{a}_j$$

由于 $\alpha K_{jj} \gg K_{ji}(i \neq j)$,方程左端的 $\alpha K_{jj}a_j$ 项较其它项要大得多,因此近似得到

$$\alpha K_{jj}a_j \approx \alpha K_{jj}\bar{a}_j$$

则有

$$a_j = \bar{a}_j$$

对于多个给定位移($j=c_1,c_2,\cdots,c_l$)时,则按序将每个给定位移都作上述修正,得到全部进行修正后的 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{P}$,然后解方程则可得到包括给定位移在内的全部结点位移值。

这个方法使用简单,对任何给定位移(零值或非零值)都适用。采用这种方法引入强制边界条件时方程阶数不变,结点位移顺序不变,编制程序十分方便,因此在有限单元法中经常采用。

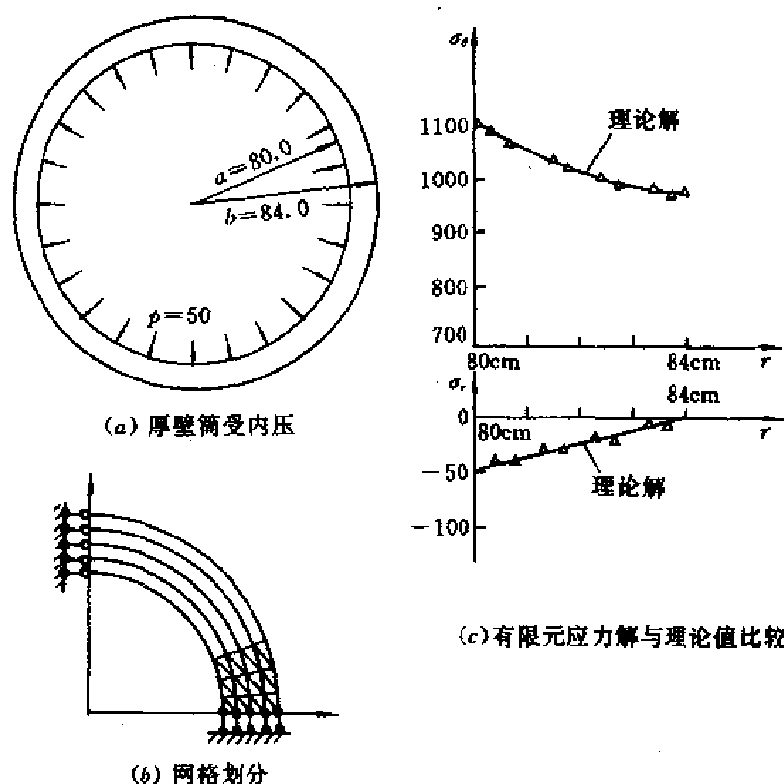
从变分意义上讲,最小位能原理要求场函数满足几何方程和位移边界条件,但有限单

元法选择场函数时未考虑满足位移边界条件的要求，因此必须将此约束条件($a_j=\bar{a}_j$，$j=c_1,c_2,\cdots,c_l$)引入泛函，建立相应的约束变分原理使之得到满足。采用罚函数法引入位移边界条件并经过适当变化，就可得到对角元素乘大数法。*

引入位移边界条件后，消除了 K 矩阵的奇异性，可以由(2.2.32)式求得结构的结点位移 a。然后回到单元中，用已知的单元结点位移，按(2.2.13)式和(2.2.18)式就可以求出单元的应变和应力。

2.2.8 应用举例

例 1 厚壁圆筒受内压。圆筒内壁半径 80，外壁半径 84，内压 50.0。切出中间典型的一片可按平面应变问题进行计算，由于对称，取 1/4 圆筒就可以了。支座条件及三角形单元划分见图 2.8。三角形单元的二个边长比一般应控制不大于 1∶2。由于是常应变单元，单元应力值在真解二侧振荡，取相邻单元应力的平均值作为有限元解的计算值，则有限元解与精确解的相对误差，对于主要应力 σ_θ 来说不超过 1.5%。这种良好的结果也说明了有限元解的可靠性。



(a) 厚壁筒受内压

(b) 网格划分

(c) 有限元应力解与理论值比较

图 2.8 原壁筒受内压

例 2 均匀应力场中圆孔附近的应力集中问题。取无限大板的一部分，板的边缘处为均匀应力场。网格划分如图 2.9 所示。按各向同性及正交各向异性两种材料分别计算，材

* 约束变分原理参见 8.2 节

料参数皆注明于图 2.10。图 2.10(*a*)及(*b*)分别给出了各向同性材料与正交各向异性材料有限元计算结果及与解析解的比较。由图可见，两者符合良好。

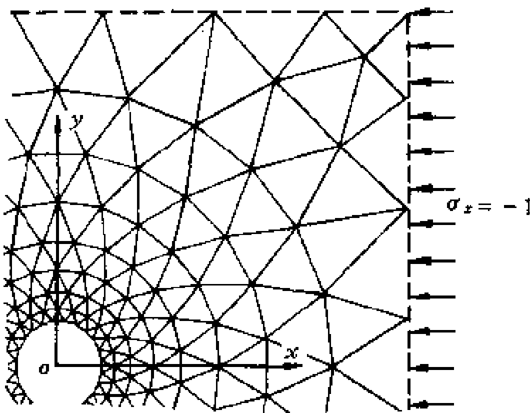


图 2.9　网格划分

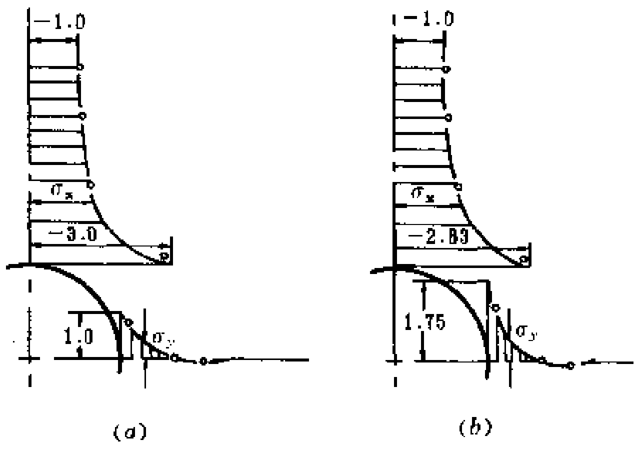


图 2.10　理论解与有限元计算结果的比较

◦ 有限元解　　—精确解

(*a*) 各向同性材料　(*b*) 正交各向异性材料

($E_x=1, E_y=3, \nu_x=0.1 \nu_y=0, G_{xy}=0.42$)

以上两个算例如将网格进一步划细，结果还能得到改善。随着网格加密，有限元近似解收敛于真解。

2.3　广义坐标有限单元法的一般格式

二维或三维连续体离散为有限个单元的集合体，要求单元具有简单而规则的几何形状以便于计算。常用的二维单元有三角形或矩形，常用的三维单元有四面体(三角锥)、五面体或平行六面体。同样形状的单元还可有不同的单元结点数，如二维三角单元除 3 结点外还可有 6 结点、10 结点的三角形单元，因此单元种类繁多。图 2.11 中例举了一些二、三

维问题中常用的单元形式。如何选择合适的单元进行计算，涉及到求解问题的类型、对计算精度的要求以及经济性等多方面的因素。这一节要讨论的是对于众多的单元建立有限元方程的一般格式。

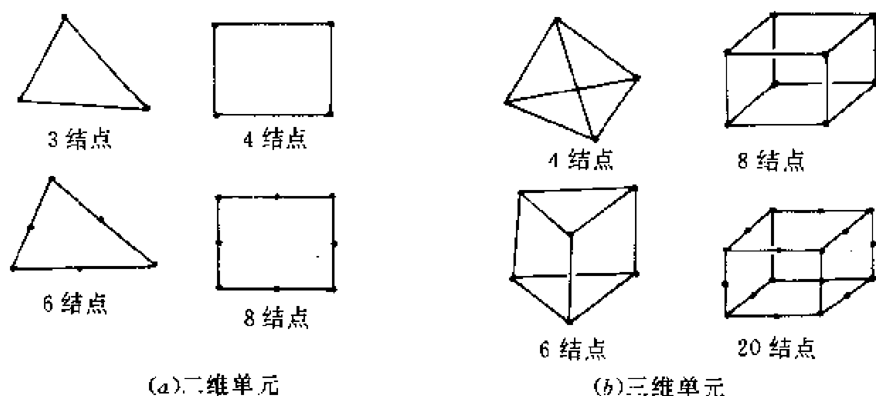


图 2.11 二、三维常用单元举例

2.3.1 选择单元位移函数的一般原则

单元中的位移模式一般采用以广义坐标 β 为待定参数的有限项多项式作为近似函数，如 3 结点三角形单元的(2.2.1)式。有限项多项式选取的原则应考虑以下几点：

1. 广义坐标是由结点场变量确定的，因此它的个数应与结点自由度数相等。如 3 结点三角形单元有 6 个结点自由度(结点位移)，广义坐标个数应取 6 个，因此二个方向的位移 u 和 v 各取三项多项式。对于 4 结点的矩形单元，广义坐标数为 8，位移函数可取四项多项式作为近似函数。

2. 选取多项式时，常数项和坐标的一次项必须完备。位移模式中的常数项和一次项反映了单元刚体位移和常应变的特性。当划分的单元数趋于无穷时，单元缩小趋于一点，此时单元应变应趋于常应变。

为了保证单元这两种最基本的特性能得到满足，因此要求位移模式中一定要有常数项和完备的一次项。3 结点三角形单元的位移模式正好满足这个基本要求。

3. 多项式的选取应由低阶到高阶，尽量选取完全多项式以提高单元的精度。一般来说对于单元边每边具有 2 个端结点的应保证一次完全多项式，如图 2.11 中的二维 3 结点、4 结点单元或三维 4 结点、6 结点单元及 8 结点单元。每边有 3 个结点时应取二次完全多项式，如图中的二维 b 结点、8 结点单元和三维 20 结点单元。若由于项数限制不能选取完全多项式时，选择的多项式应具有坐标的对称性。并且一个坐标方向的次数不应超过完全多项式的次数。

不同结点单元位移模式的选择将在以后几节及下一章结合具体单元进行讨论。

2.3.2 广义坐标有限元的一般格式

结合一般格式我们将给出 2.2 节中已讨论过的 3 结点三角形元的相应式子，以帮助

读者掌握和应用一般格式。

1. 以广义坐标 $\boldsymbol{\beta}$ 为待定参数，给出单元内位移 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Phi\beta} \tag{2.3.1}$$

对于二维问题

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}$$

三角形常应变单元

（局部结点编码 i,j,m 用 1,2,3 代替）

$$u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

$$v = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_6]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = [1 \quad x \quad y]$$

2. 用单元结点位移 $\tilde{\boldsymbol{a}}^e$ 表示广义坐标 $\boldsymbol{\beta}$

惯用的单元结点位移排列是

$$\boldsymbol{a}^e = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots]^{\mathrm{T}}$$

为便于求解广义坐标 $\boldsymbol{\beta}$，可采用另一表示方法，如

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots, v_1 \quad v_2 \quad \cdots]^{\mathrm{T}}$$

(2.3.1)式中代入单元结点坐标得到

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e = \boldsymbol{A\beta} \tag{2.3.2}$$

二维问题

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}} & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix}$$

用(2.3.2)式解出 $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}}^e \tag{2.3.3}$$

对于二维问题

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{1}{\det\tilde{\boldsymbol{A}}} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\det\tilde{\boldsymbol{A}} = |\tilde{\mathbf{A}}| = 2A = a_1 + a_2 + a_3 = b_2c_3 - b_3c_2$$

3. 以单元结点位移 $\boldsymbol{a}^e$ 表示单元位移函数 $\boldsymbol{u}$，得到单元插值函数矩阵 N 将(2.3.3)式代入(2.3.1)式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Phi A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}}^e = \tilde{\boldsymbol{N}}\,\tilde{\boldsymbol{a}}^e \tag{2.3.4}$$

二维问题

$$\tilde{N}=\begin{bmatrix} N^* & 0 \\ 0 & N^* \end{bmatrix}$$

$$N^* = \phi\tilde{A}^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad \cdots]$$

$$N^* = \phi_{1\times3}\tilde{A}^{-1}_{3\times3} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]$$

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y)$$

$$(i = 1,2,3)$$

$$\tilde{N}=\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix}$$

将结点位移 $\tilde{a}^e$ 改为一般排列顺序 a^e，

则有

$$u = Na^e \tag{2.3.5}$$

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \cdots]$$

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]$$

$$N_i = IN_i \qquad (i = 1,2,3)$$

4. 以单元结点位移 a^e 表示单元应变和应力

应变：

$$\varepsilon = \mathrm{L}u = B(x,y)a^e \tag{2.3.6}$$

$$B = \mathrm{L}N$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

应力：由弹性变形产生的应力

$$\sigma = D\varepsilon = DBa^e$$

当有初应力 σ_0 和初应变 ε_0 时，应力的一般式是

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 = DBa^e - D\varepsilon_0 + \sigma_0 \tag{2.3.7}$$

5. 用最小位能原理建立离散体系的结点平衡方程

系统总位能的离散形式

$$\Pi_p = \sum_e \int_{V_e} [U + \phi]\mathrm{d}V + \sum_e \int_{S_\sigma^e} \psi \mathrm{d}S \tag{2.3.8}$$

将(2.3.5)～(2.3.7)式代入上式并将单元结点位移 a^e 用结构结点位移 a 表示，即，$a^e = Ga$，(2.3.8)式即为

$$\Pi_p = a^{\mathrm{T}} \sum_e G^{\mathrm{T}} \Big(\frac{1}{2}\int_{V_e} B^{\mathrm{T}} DB \mathrm{d}V Ga - \int_{V_e} B^{\mathrm{T}} D\varepsilon_0 \mathrm{d}V$$

$$+ \int_{V_e} B^{\mathrm{T}} \sigma_0 \mathrm{d}V - \int_{V_e} N^{\mathrm{T}} f \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma^e} N^{\mathrm{T}} \tilde{T}\, \mathrm{d}S \Big)$$

$$=\frac{1}{2}a^{T}Ka - a^{T}P \tag{2.3.9}$$

总位能的变分 $\delta\Pi_p=0$，得到有限元求解方程

$$Ka = P \tag{2.3.10}$$

其中

$$K = \sum_e G^T K^e G \tag{2.3.11}$$

$$K^e = \int_{V_e} B^T DB \mathrm{d}V \tag{2.3.12}$$

式(2.3.12)是单元刚度矩阵的普遍公式。

(2.3.9)式中的 $\tilde{T}$ 是作用在连续体边界上的力，包括作用在有关单元边界上的分布力和作用在结点上的集中力两部分。为了方便起见可以将这两部分外载分开，将 T 作为分布面力，结点集中力用 F 表示，则载荷列阵 P 可以写作

$$\begin{aligned} P &= P_f + P_S + P_{\sigma_0} + P_{\varepsilon_0} + P_F \\ &= \sum_e G^T(P_f^e + P_S^e + P_{\sigma_0}^e + P_{\varepsilon_0}^e) + P_F \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

其中

$$\begin{aligned} P_f^e &= \int_{V_e} N^T f \mathrm{d}V \qquad & P_S^e &= \int_{S_\sigma^e} N^T T \mathrm{d}S \\ P_{\sigma_0}^e &= -\int_{V_e} B^T \sigma_0 \mathrm{d}V \qquad & P_{\varepsilon_0}^e &= \int_{V_e} B^T D\varepsilon_0 \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

P_F 结点集中力列阵

(2.3.14)式是计算单元等效结点载荷列阵的普遍公式。

6. 引入强制边界条件

7. 解方程得到结点位移

8. 进行需要的辅助计算

如利用(2.3.6)、(2.3.7)式计算单元应变和应力，也可按需要计算其他项目。

由上面过程可以看到：

1～3 是假定位移模式、求解广义坐标，最后得到单元插值函数。这三步是广义坐标有限元的特征。

4～5 是利用变分原理建立有限元格式的一般方法。这里用的是最小位能原理，建立以位移为基本场变量的有限元求解方程，求解平衡问题。

6～8 是建立有限元方程后的一般解法和计算步骤。

广义坐标有限元可能产生的困难是：当位移函数选择不恰当时，可能不存在 A^{-1} 而使求解广义坐标 β 成为不可能。同时，当单元结点较多时，解广义坐标的过程显得繁琐，因此也可以利用自然坐标直接构造单元的插值函数，这样就可以避免求解广义坐标的过程，建立有限元的方程和求解只需从第 4 步开始。

本章第 5 节将结合矩形单元和高精度三角形单元讨论直接建立单元插值函数的方法，关于建立单元插值函数更系统方法将在下一章中给出。

2.4 有限元解的性质和收敛性

2.4.1 有限元解的收敛准则

将这一章前面讨论的内容与第1章比较可以看出，有限单元法作为一种数值方法可以认为是里兹法的一种特殊形式，不同在于有限单元法的试探函数是定义于单元(子域)而不是全域。因此有限元解的收敛性可以与里兹法的收敛性对比进行讨论。里兹法的收敛条件是要求试探函数具有完全性和连续性(见1.3.3节)，这些要求在有限单元法中如何具体体现呢?

在有限单元法中，场函数的总体泛函是由单元泛函集成的。如果采用完全多项式作为单元的插值函数(即试探函数)，则有限元解在一个有限尺寸的单元内可以精确地和真正解一致。但是实际上有限元的试探函数只能取有限项多项式，因此有限元解只能是真正解的一个近似解答，我们需要研究在什么条件下，当单元尺寸趋于零时，有限元解趋于真正解。

下面仍以含有一个待求的标量场函数为例，微分方程是

$$A(\phi) = L(\phi) + b = 0 \tag{2.4.1}$$

相应的泛函是

$$\Pi = \int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}C(\phi)C(\phi) + \phi b\right]\mathrm{d}\Omega + \mathrm{b.t} \tag{2.4.2}$$

假定泛函 Π 中包含 ϕ 和它的直至 m 阶的各阶导数，若 m 阶导数是非零的，则近似函数 $\tilde{\phi}$ 至少必须是 m 次多项式。若取 p 次完全多项式为试探函数，则必须满足 $p \geqslant m$，这时 $\tilde{\phi}$ 及其各阶导数在一个单元内的表达式如下：

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots + \beta_p x^p \\
&\frac{\mathrm{d}\tilde{\phi}}{\mathrm{d}x} = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 + \cdots + p\beta_p x^{p-1} \\
&\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\phi}}{\mathrm{d}x^2} = 2\beta_2 + 6\beta_3 x + \cdots + p(p-1)\beta_p x^{p-2} \\
&\cdots\cdots \\
&\frac{\mathrm{d}^m\tilde{\phi}}{\mathrm{d}x^m} = m!\beta_m + (m+1)!\beta_{m+1} x + \cdots + \frac{p!}{(p-m)!}\beta_p x^{p-m}
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

由上式可见，由于 $\tilde{\phi}$ 是 p 次完全多项式，所以它的直至 m 阶导数的表达式中都包含有常数项。当单元尺寸趋于零时，在每一单元内 $\tilde{\phi}$ 及其直至 m 阶导数将趋于它的精确值，即趋于常数。因此，每一个单元的泛函有可能趋于它的精确值。如果试探函数还满足连续性要求，那么整个系统的泛函将趋于它的精确值。有限元解就趋于精确解，也就是说解是收敛的。

从上述讨论可以得到下列收敛准则：

准则1 完备性要求。如果出现在泛函中场函数的最高阶导数是 m 阶，则有限元解收

敛的条件之一是单元内场函数的试探函数至少是 m 次完全多项式。或者说试探函数中必须包括本身和直至 m 阶导数为常数的项。

单元的插值函数满足上述要求时，我们称单元是完备的。

至于连续性的要求，当试探函数是多项式的情况下，单元内部函数的连续性显然是满足的，如试探函数是 m 次多项式，则单元内部满足 C_{m-1} 连续性要求。因此需要特别注意的是单元交界面上的连续性，这就提出另一个收敛准则。

准则 2 协调性要求。如果出现在泛函中的最高阶导数是 m 阶，则试探函数在单元交界面上必须具有 C_{m-1} 连续性，即在相邻单元的交界面上应有函数直至 $m-1$ 阶的连续导数。

当单元的插值函数满足上述要求时，我们称单元是协调的。

简单地说，当选取的单元既完备又协调时，有限元解是收敛的，即当单元尺寸趋于零时，有限元解趋于真正解。我们称这种单元为协调单元。

需要指出的是：当泛函中出现的导数高于一阶（例如板壳问题，泛函中出现的导数是 2 阶）时，则要求试探函数在单元交界面上具有连续的一阶或高于一阶的导数，即具有 C_1 或更高的连续性，这时构造单元的插值函数比较困难。在某些情况下，可以放松对协调性的要求，只要这种单元能通过分片试验，有限元解仍然可以收敛于正确的解答。这种单元称为非协调元，我们将在第 5 章以及板壳有限元中分别加以讨论。

2.4.2 收敛准则的物理意义

为了从物理意义上加深对收敛准则的理解，我们以平面问题为例加以说明。

在平面问题中，泛函 Π_p 中出现的是位移 u 和 v 的一次导数，即 ε_x、ε_y、γ_{xy}，因此 $m=1$。收敛准则 1 要求插值函数或位移函数至少是 x、y 的一次完全多项式。我们知道位移及其一阶导数为常数的项是代表与单元的刚体位移和常应变状态相应的位移模式。所以完备性的要求由插值函数所构成的有限元解必须能反映单元的刚体位移和常应变状态。若不能满足上述要求，那么赋予结点以单元刚体位移（零应变）或常应变的位移值时，在单元内部将产生非零或非常值的应变，这样有限元解将不可能收敛于真正解。

应该指出，在 Bazeley 等人开始提出上述收敛准则时，是要求在单元尺寸趋于零的极限情况下满足完备性收敛准则。如果将此收敛准则用于有限尺寸的单元，将使解的精度得到改进。

对于平面问题，协调性要求是 C_0 连续性，即要求位移函数 u、v 的零阶导数，也就是位移函数自身在单元交界面上是连续的。

如果在单元交界面上位移不连续，将在交界面上引起无限大的应变，这时必须有发生于交界面上的附加应变能补充到系统的应变能中去，而我们在建立泛函 Π_p 时，没有考虑这种情况，而只考虑了产生于各个单元内部的应变能。因此，倘若边界上位移不连续，有限元解就不可能收敛于真正解。

可以看到最简单的 3 结点三角形单元的插值函数既满足完备性要求，也满足协调性要求，因此采用这种单元，解是收敛的。

应当指出，对于二、三维弹性力学问题，泛函中出现的导数是一阶（$m=1$），对近似的

位移函数的连续性要求仅是 C_0 连续性，这种只要求函数自身在单元边界连续的要求很容易得到满足，本章的后面几节还将介绍一些满足连续性要求的协调单元。

2.4.3 收敛速度和精度估计

上节中我们已经讨论了有限元解收敛的条件。若单元的插值函数是完备而协调的，当单元尺寸不断缩小而趋于零时，有限元解将趋于真正解。在有些情况下，如果用于有限元场函数近似解的多项式展开能精确地拟合真正解。则在有限数目的单元划分(甚至仅仅是一个单元)的条件下，也能得到精确的解答。例如真正解是二次函数，若有限元的插值函数也包括了二次的完全多项式，则有限元解就能得到精确的解答。

以上论述可以帮助我们决定有限元解的收敛速度。因为精确解总可以在域内一点 i 的邻域内展开为一个多项式，例如平面问题中的位移 $\boldsymbol{u}$ 可以展开为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_i + \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right)_i \Delta y + \cdots \tag{2.4.4}$$

如果在尺寸为 h 的单元内，有限元解采用 p 阶完全多项式，则它能局部地拟合上述 Taylor 展开式直到 p 阶。由于 $\Delta x,\Delta y$ 是 h 的量级，所以位移解 $\boldsymbol{u}$ 的误差是 $O(h^{p+1})$。例如平面问题采用 3 结点三角形单元，插值函数是线性的，即 $p=1$，所以 $\boldsymbol{u}$ 的误差是 $O(h^2)$，并可预计收敛速度也是 $O(h^2)$ 的量级，也就是说将有限元网格进一步细分，使所有单元尺寸减半，则 $\boldsymbol{u}$ 的误差是前一次网格划分误差的 $(1/2)^2=1/4$。

类似的论证可以用于应变、应力以及应变能等误差和收敛速度的估计。例如应变是由位移的 m 阶导数给出的，则它的误差是 $O(h^{p-m+1})$，当平面问题采用 3 结点三角形单元时，$p=m=1$，则应变的误差估计是 $O(h)$。至于应变能，因为它是由应变的平方项表示的，所以一般情况下误差是 $O(h^{2(p-m+1)})$，当平面问题采用 3 结点三角形单元时，误差是 $O(h^2)$。

在上面的讨论中，虽然形式上对误差做出了量级上的估计，但实际上并不能对有限元解的误差做出具体的估计。而后者往往是实际分析工作所需要的。为此，一般可以通过两种途径来解决：

(1) 选择一个已知解析解的相同类型的问题，求解域尽可能和实际分析的问题相近，并采用相同形式的单元和差不多的网格划分，用此问题有限元解的误差可以估计实际问题的误差。

(2) 利用以上讨论中关于收敛速度的量级估计，采取外推的方法求解校正的解答。因为当泛函取极值时，如有限元的插值函数满足完备性和协调性的要求，则单元尺寸 $h\to 0$ 时，有限元解应是单调收敛的。因此，如第一次网格划分的解答是 u_1，然后将各单元尺寸减半作为第二次的网格划分，得到解答为 u_2。若已知收敛速度是 $O(h^r)$，则可由下式预测精确解 u

$$\frac{u_1-u}{u_2-u} = \frac{O(h^r)}{O((h/2)^r)} \tag{2.4.5}$$

若是平面问题采用 3 结点三角形单元，则 $r=2$，上式可写作

$$\frac{u_1-u}{u_2-u} = \frac{O(h^2)}{O((h/2)^2)} = 4$$

即可推得精确解

$$u = \frac{1}{3}(4u_2 - u_1)$$

但是需要注意的是，以上所讨论的误差仅是离散误差。即一个连续的求解域被划分成有限个子域(单元)，由单元的试探函数近似整体域的场函数所引起的误差。

另一主要误差是计算机有限的有效位数(字长)所引起的，它包含舍入(四舍五入)误差和截断(原来的实际位数被截取为计算机允许的有限位数)误差。前者带有概率的性质，主要靠增加有效位数(如采用双精度计算)和减少运算次数(如采用有效的计算方法和合理的程序结构)来控制。后者除与有效位数直接有关外，还与结构(最终表现为刚度矩阵)的性质有密切关系。例如结构在不同方向的刚度相差过于悬殊，可能使最后的代数方程组成为病态，从而使解答的误差很大，甚至导致求解失败。

2.4.4 位移元解的下限性质

用变位移的最小位能变分原理建立的有限元我们称之为位移元，它的未知场变量是位移。可以用变分过程分析位移元的近似解答与真正解偏离的性质。

系统总位能的离散形式由(2.3.9)表示

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \tag{2.3.9}$$

由变分 $\delta\Pi_p=0$ 得到有限元求解方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} \tag{2.3.10}$$

将(2.3.10)式代入(2.3.9)式得到

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = -U \tag{2.4.6}$$

在平衡情况下，系统总位能等于负的应变能。因此 $\Pi_p \Rightarrow \Pi_{p\min}$，则 $U \Rightarrow U_{\max}$。

在有限元解中，由于假定的近似位移模式一般来说总是与真正解有差别，因此得到的系统总位能总会比真正的总位能要大。我们把有限元解的总位能、应变能、刚度矩阵和结点位移用 $\tilde{\Pi}_p$、$\tilde{U}$、$\tilde{\boldsymbol{K}}$、$\tilde{\boldsymbol{a}}$表示，相应的真正解的有关量用 Π_p、U、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{a}$ 表示。由于 $\tilde{\Pi}_p \geqslant \Pi_p$，则有 $\tilde{U} \leqslant U$

即

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{K}}\tilde{\boldsymbol{a}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} \tag{2.4.7}$$

对于真正解有 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}$

对于近似解有 $\tilde{\boldsymbol{K}}\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{P}$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{P} \\ \tilde{\boldsymbol{K}}\tilde{\boldsymbol{a}} &= \boldsymbol{P} \end{aligned}\right\} \tag{2.4.8}$$

将(2.4.8)代入(2.4.7)式得到

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \tag{2.4.9}$$

由(2.4.9)式可以看出近似解应变能较真正解要小，这是由于近似解的位移 $\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}$ 总体上较真正解的位移 $\boldsymbol{a}$ 小。位移元得到的位移解总体上不大于真正解，即解具有下限性质。

位移解的下限性质可以解释如下：单元原是连续体的一部分，具有无限多个自由度。在假定了单元的位移函数后，自由度限制为只有以结点位移表示的有限自由度，即位移函数对单元的变形进行了约束和限制，使单元的刚度较实际连续体加强了，因此连续体的整

体刚度随之增加，离散后的$\tilde{K}$较实际的K为大，因此求得的位移近似解总体上(而不是每一点)将小于精确解。

2.5 矩形单元和高精度三角形单元

二维连续体离散时，可以采用矩形单元和高精度三角形单元。插值函数用自然坐标表示。为了解决高精度单元中求解广义坐标的困难，我们还将讨论用自然坐标(面积坐标)直接给出三角形单元的插值函数的方法。

2.5.1 4结点矩形单元

边长为$2a$及$2b$的矩形单元，取4个角点作为结点，用局部结点编码1～4表示，为了简便，坐标原点取在单元形心上，并以平行于单元两双对边的对称轴作为x轴和y轴．见图2.12。单元共有8个结点自由度，广义坐标数应取8，因此x、y每个方向的位移可取4项多项式。广义坐标和位移多项式选择如下：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_8]^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{\phi} &= [1 \quad x \quad y \quad xy]
\end{aligned}
\tag{2.5.1}
$$

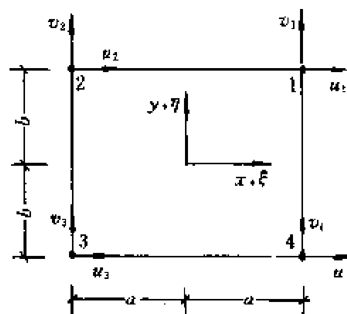


图 2.12 矩形单元

位移模式是具有完全一次式的非完全二次式。因为它在x，y方向呈线性变化，所以矩形单元的这种位移模式又称为双线性位移模式。也正是由于在单元的边界$x=\pm a$及$y=\pm b$上，位移是按线性变化的，且相邻单元公共结点上有共同的结点位移值，因此保证了两个相邻单元在其公共边界上位移的连续性。这种单元的位移模式是完备的和协调的，满足解的收敛条件，因此4结点矩形元是协调元。

将4个结点的结点坐标代入位移模式则得到4个结点的位移

$$
\boldsymbol{a}^e = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]^{\mathrm{T}}
\tag{2.5.2}
$$

$$
\boldsymbol{a}^e = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}} & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}
\tag{2.5.3}
$$

现在则有

$$
\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}
$$

(2.5.3)式是二组独立的方程组，用它可求出广义坐标$\boldsymbol{\beta}$。将求得的$\boldsymbol{\beta}$代入位移模式可以得到单元位移通过单元结点位移的表达式

$$
u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4
\tag{2.5.4}
$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

其中 $N_1 \sim N_4$ 为单元插值函数。令 $\xi = x/a, \eta = y/b$,则

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

ξ、η 可以看作矩形单元的自然坐标。在一般情况下单元重心位置是(x_0, y_0),不在坐标原点,自然坐标系原点取在单元重心上,整体坐标 x、y 与自然坐标的转换关系是

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + a\xi, \qquad \xi = \frac{x - x_0}{a} \\
y &= y_0 + b\eta, \qquad \eta = \frac{y - y_0}{b}
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

单元内各点的自然坐标是$-1 \leqslant \xi \leqslant 1$;$-1 \leqslant \eta \leqslant 1$。单元的四条边分别为 $\xi = \pm 1$;$\eta = \pm 1$。4个角点的坐标 $i(\xi_i, \eta_i)$是 1(1,1);2(−1,1);3(−1,−1);4(1,−1)采用下列记号

$$\xi_0 = \xi\xi_i, \qquad \eta_0 = \eta\eta_i$$

(2.5.5)式可以合并用一个公式表示

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0) \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{2.5.7}$$

单元位移的矩阵记法是

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e \tag{2.5.8}$$

式中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^e &= [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T \\
\boldsymbol{N} &= [\boldsymbol{N}_1\ \boldsymbol{N}_2\ \boldsymbol{N}_3\ \boldsymbol{N}_4] = [IN_1 \quad IN_2 \quad IN_3 \quad IN_4]
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

单元应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e = [\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \boldsymbol{B}_3 \quad \boldsymbol{B}_4]\boldsymbol{a}^e \tag{2.5.10}$$

应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的分块矩阵

$$\boldsymbol{B}_i = \mathbf{L}\boldsymbol{N}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.5.11}$$

由于 N_i 是用自然坐标给出,并有$\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial \xi}$,$\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial}{\partial \eta}$,上式可改写成对自然坐标的导数。

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix} b\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & a\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ a\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & b\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} b\xi_i(1+\eta_0) & 0 \\ 0 & a\eta_i(1+\xi_0) \\ a\eta_i(1+\xi_0) & b\xi_i(1+\eta_0) \end{bmatrix} \qquad (2.5.12)$$

$$(i = 1,2,3,4)$$

单元应力

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\epsilon} = [\boldsymbol{S}_1 \quad \boldsymbol{S}_2 \quad \boldsymbol{S}_3 \quad \boldsymbol{S}_4]\boldsymbol{a}^e \qquad (2.5.13)$$

式中应力矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的分块矩阵

$$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_i = \frac{E_0}{4ab(1-\nu_0^2)}\begin{bmatrix} b\xi_i(1+\eta_0) & \nu_0 a\eta_i(1+\xi_0) \\ \nu_0 b\xi_i(1+\eta_0) & a\eta_i(1+\xi_0) \\ \dfrac{1-\nu_0}{2}a\eta_i(1+\xi_0) & \dfrac{1-\nu_0}{2}b\xi_i(1+\eta_0) \end{bmatrix}$$

$$(i = 1,2,3,4) \qquad (2.5.14)$$

利用(2.5.12)式可以计算单元刚度矩阵。

若将单元刚度矩阵写成如下的分块形式

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} & \boldsymbol{K}_{14} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{K}_{23} & \boldsymbol{K}_{24} \\ \boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{K}_{32} & \boldsymbol{K}_{33} & \boldsymbol{K}_{34} \\ \boldsymbol{K}_{41} & \boldsymbol{K}_{42} & \boldsymbol{K}_{43} & \boldsymbol{K}_{44} \end{bmatrix}$$

其中任一子块可由下式计算

$$\boldsymbol{K}_{rs} = \iint \boldsymbol{B}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_s t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (r,s = 1,2,3,4) \qquad (2.5.15)$$

假如单元厚度 t 是常量，则可得到(2.5.15)式的显式

$$\boldsymbol{K}_{rs} = \frac{E_0 t}{4(1-\nu_0^2)ab}\begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_2 & K_4 \end{bmatrix} \qquad (2.5.16)$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= b^2\xi_r\xi_s\left(1+\frac{1}{3}\eta_r\eta_s\right) + \frac{1-\nu_0}{2}a^2\eta_r\eta_s\left(1+\frac{1}{3}\xi_r\xi_s\right) \\ K_2 &= ab\left(\nu_0\eta_r\xi_s + \frac{1-\nu_0}{2}\xi_r\eta_s\right) \\ K_3 &= ab\left(\nu_0\xi_r\eta_s + \frac{1-\nu_0}{2}\eta_r\xi_s\right) \\ K_4 &= a^2\eta_r\eta_s\left(1+\frac{1}{3}\xi_r\xi_s\right) + \frac{1-\nu_0}{2}b^2\xi_r\xi_s\left(1+\frac{1}{3}\eta_r\eta_s\right) \end{aligned} \qquad (2.5.17)$$

$$(r,s = 1,2,3,4)$$

对于平面应力问题，应变矩阵、应力矩阵和单元刚度矩阵的显式如下：

对于平面应变问题，只需将(2.5.18)式～(2.5.20)式中的 E 改为 $E/(1-\nu^2)$，ν 换作 $\nu/(1-\nu^2)$即可。

$$
\boldsymbol{B}_{(3\times 8)}=\frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} b+y & 0 & -(b+y) & 0 & -(b-y) & 0 & b-y & 0 \\ 0 & a+x & 0 & a-x & 0 & -(a-x) & 0 & -(a+x) \\ a+x & b+y & a-x & -(b+y) & -(a-x) & -(b-y) & -(a+x) & b-y \end{bmatrix} \tag{2.5.18}
$$

$$
\boldsymbol{S}_{(3\times 8)}=\frac{E}{4ab(1-\nu^2)}\times\begin{bmatrix} b+y & \nu(a+x) & -(b+y) & \nu(a-x) & -(b-y) & -\nu(a-x) & b-y & -\nu(a+x) \\ \nu(b+y) & a+x & -\nu(b+y) & a-x & -\nu(b-y) & -(a-x) & \nu(b-y) & -(a+x) \\ \frac{1-\nu}{2}(a+x) & \frac{1-\nu}{2}(b+y) & \frac{1-\nu}{2}(a-x) & -\frac{1-\nu}{2}(b+y) & -\frac{1-\nu}{2}(a-x) & -\frac{1-\nu}{2}(b-y) & -\frac{1-\nu}{2}(a+x) & \frac{1-\nu}{2}(b-y) \end{bmatrix} \tag{2.5.19}
$$

$$
\boldsymbol{K}_{(3\times 8)}=\frac{Et}{ab(1-\nu^2)}
$$

$$
\times\begin{bmatrix}
\frac{1}{3}\left(b^2+\frac{1-\nu}{2}a^2\right) & \frac{ab}{8}(1+\nu) & -\frac{1}{3}\left(b^2-\frac{1-\nu}{4}a^2\right) & -\frac{ab}{8}(1-3\nu) & -\frac{1}{6}\left(b^2+\frac{1-\nu}{2}a^2\right) & -\frac{ab}{8}(1+\nu) & \frac{1}{6}[b^2-(1-\nu)a^2] & \frac{ab}{8}(1-3\nu) \\
 & \frac{1}{3}\left(a^2+\frac{1-\nu}{2}b^2\right) & \frac{ab}{8}(1-3\nu) & \frac{1}{6}[a^2-(1-\nu)b^2] & -\frac{ab}{8}(1+\nu) & -\frac{1}{6}\left(a^2+\frac{1-\nu}{2}b^2\right) & -\frac{ab}{8}(1-3\nu) & \frac{1}{3}\left(-a^2+\frac{1-\nu}{4}b^2\right) \\
 & & \frac{1}{3}\left(b^2+\frac{1-\nu}{2}a^2\right) & -\frac{ab}{8}(1+\nu) & \frac{1}{6}[b^2-(1-\nu)a^2] & -\frac{ab}{8}(1-3\nu) & -\frac{1}{6}\left(b^2+\frac{1-\nu}{2}a^2\right) & \frac{ab}{8}(1+\nu) \\
 & & & \frac{1}{3}\left(a^2+\frac{1-\nu}{2}b^2\right) & \frac{ab}{8}(1-3\nu) & \frac{1}{3}\left(-a^2+\frac{1-\nu}{4}b^2\right) & \frac{ab}{8}(1+\nu) & -\frac{1}{6}\left(a^2+\frac{1-\nu}{2}b^2\right) \\
 & \text{对} & & & \frac{1}{3}\left(b^2+\frac{1-\nu}{2}a^2\right) & \frac{ab}{8}(1+\nu) & \frac{1}{3}\left(-b^2+\frac{1-\nu}{4}a^2\right) & -\frac{ab}{8}(1-3\nu) \\
 & & & & & \frac{1}{3}\left(a^2+\frac{1-\nu}{2}b^2\right) & \frac{ab}{8}(1-3\nu) & \frac{1}{6}[a^2-(1-\nu)b^2] \\
 & & & \text{称} & & & \frac{1}{3}\left(b^2+\frac{1-\nu}{2}a^2\right) & -\frac{ab}{8}(1+\nu) \\
 & & & & & & & \frac{1}{3}\left(a^2+\frac{1-\nu}{2}b^2\right)
\end{bmatrix} \tag{2.5.20}
$$

由应力矩阵(2.5.14)式或(2.5.19)式可见，矩形单元中的应力分量都不是常量。正应力分量 σ_x 的主项(即不与 ν 相乘的项)沿 y 方向按线性变化，而它的次要项(与 ν 相乘的项)沿 x 方向按线性变化。正应力 σ_y 与此相反。剪应力分量 τ_{xy} 则沿 x 及 y 两个方向都呈线性变化。这种一个方向为常量，另一方向呈线性变化的情况通常并不能提高单元的精度。矩形单元明显的缺点是不能很好地符合曲线边界，包括与坐标轴不平行的直线边界，因此直接应用受到限制。解决上述问题的方法之一是采用矩形单元和三角形单元混合使用，如图 2.13 所示。更为一般的方法是通过等参变换将局部坐标内的矩形单元变换为总体坐标内的任意四边形(包括曲边四边形)的单元，这将在第 4 章中进行讨论。

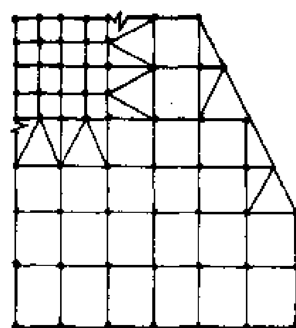


图 2.13 三角形单元与矩形单元联合使用

2.5.2 高精度三角形单元

1. 二次单元:6 结点三角形单元

单元的 6 个结点是三角形的 3 个角点及 3 个边的中点。位移函数取完全的二次多项式

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_{12}]^{\mathrm{T}} \tag{2.5.21}$$
$$\boldsymbol{\phi} = [1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2]$$

位移函数中的常数项和完整的一次式满足收敛条件中对完备性的要求。单元边界上位移按二次抛物线分布，三个公共结点正好保证相邻单元位移的连续性，满足了二维单元协调性的要求。因此，6 结点三角形单元是协调单元。

这种单元的应变在两个坐标方向上都呈线性变化，应力也呈线性变化。因此，单元精度较 3 结点三角形单元要高。

2. 三次单元:10 结点三角形单元

单元的 10 个结点是三角形的 3 个角点，每边 2 个边三分点再加上三角形的形心作为内部结点。增加内部结点是为使位移函数可以采用完全的三次多项式，有利于提高单元精度。三次单元的位移模式是

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_{20}]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\phi} = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3] \tag{2.5.22}$$

在单元边界上位移按三次曲线分布，公共边上的 4 个结点正好保证相邻单元位移的协调性，因此这种单元亦是协调元

三次单元的位移模式是完全的三次多项式，单元的应变和应力是二次函数，精度高于二次单元。

以上两种单元见图 2.14。

在三角形单元中，采用上面给出的用广义坐标表示的位移函数时，求解广义坐标 $\boldsymbol{\beta}$ 以及计算单元刚度矩阵、等效结点载荷列阵等，运算十分冗繁。假如我们采用三角形单元内的一种局部坐标(如同矩形单元中的 ξ、η)——面积坐标作为自然坐标，则可以很方便地

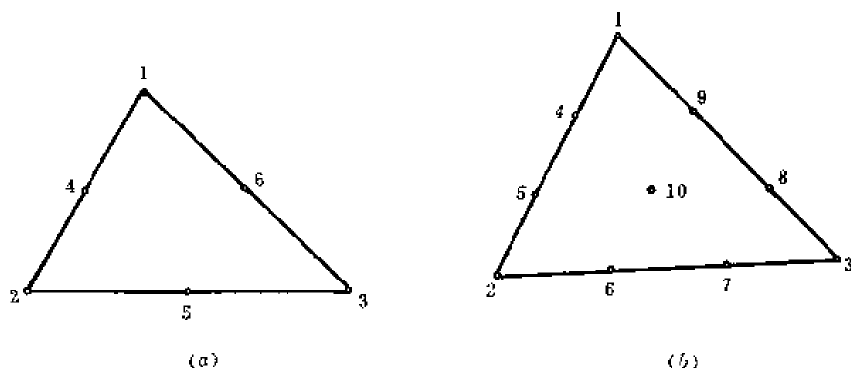


图 2.14 高精度三角形单元

(a) 二次单元：6 结点三角形单元 (b) 三次单元：10 结点三角形单元

建立单元的插值函数，可使单元刚度矩阵和等效结点载荷列阵的计算大为简化。有关面积坐标及其简单的应用我们在下一节中讨论。

2.5.3 面积坐标为自然坐标时三角形单元的插值函数及单元矩阵的计算

1. 面积坐标

三角形中任一点 P 与其三个角点相连形成三个子三角形，见图 2.15。我们以原三角形边所对的角码来命名此三个子三角形的面积，即 $\triangle Pjm$ 面积为 A_i，$\triangle Pmi$ 面积为 A_j，$\triangle Pij$ 面积为 A_m。P 点的位置可由三个比值来确定

$$P(L_i, L_j, L_m)$$

其中

$$\begin{aligned} L_i &= A_i/A \\ L_j &= A_j/A \\ L_m &= A_m/A \end{aligned} \qquad (2.5.23)$$

A 是三角形面积，因此有

$$A_i + A_j + A_m = A \qquad (2.5.24)$$

我们称 L_i, L_j, L_m 为面积坐标。

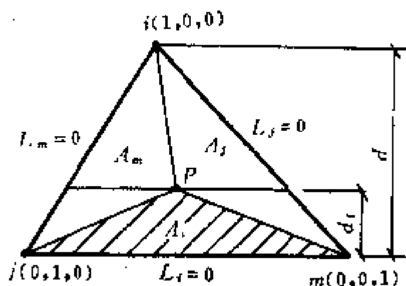


图 2.15 三角形单元的面积坐标

面积坐标的特点是：

(1) 三角形内与结点 i 的对边 j-m 平行的直线上的诸点有相同的 L_i 坐标。

三角形三个角点的面积坐标是 $i(1,0,0)$，$j(0,1,0)$，$m(0,0,1)$。

三角形三条边的边方程是

j-m 边 $L_i=0$； m-i 边 $L_j=0$； i-j 边 $L_m=0$。

(2) 三个面积坐标并不相互独立，由于(2.5.24)式，三个面积坐标间必然满足：

$$L_i + L_j + L_m = 1 \qquad (2.5.25)$$

从上式可见 3 个面积坐标中只有 2 个是独立的。

由于三角形的面积坐标与该三角形的具体形状及其在总体坐标 x, y 中的位置无关，因此它是三角形的一种自然坐标。

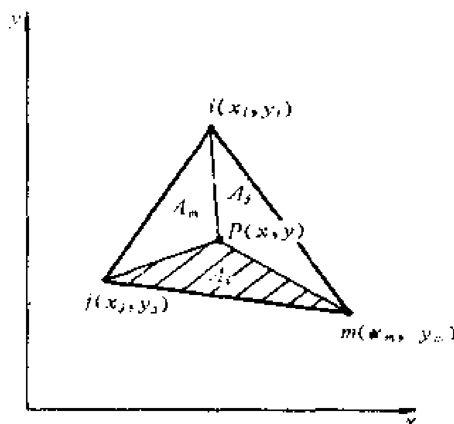


图 2.16 面积坐标与直角坐标的关系

2. 面积坐标与直角坐标的转换关系

三角形的 3 个角点在直角坐标系中的位置是 $i(x_i,y_i)$, $j(x_j,y_j)$, $m(x_m,y_m)$，其中任一点 P 在直角坐标中的位置为 $P(x,y)$，见图 2.16。将 A, A_i, A_j, A_m 等用直角坐标表示，就可以建立面积坐标和直角坐标的转换关系。

$$A_i=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2}[(x_jy_m-y_jx_m)+(y_j-y_m)x+(x_m-x_j)y]$$

$$=\frac{1}{2}(a_i+b_ix+c_iy)\qquad(2.5.26)$$

$$L_i=\frac{A_i}{A}=\frac{1}{2A}(a_i+b_ix+c_iy)\qquad(i,j,m)\qquad(2.5.27)$$

式中 $a_i,b_i,c_i,a_j,\cdots,c_m$ 见(2.2.6)式。由(2.5.27)式可见，面积坐标 L_i,L_j,L_m 与 3 结点三角形单元的形函数 N_i,N_j,N_m 完全相同。面积坐标用直角坐标表示的矩阵表达式是

$$\begin{Bmatrix}L_i\\ L_j\\ L_m\end{Bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}a_i & b_i & c_i\\ a_j & b_j & c_j\\ a_m & b_m & c_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\end{Bmatrix}\qquad(2.5.28)$$

将 L_i,L_j,L_m 分别乘以 x_i,x_j,x_m，然后相加，可以得到

$$x=x_iL_i+x_jL_j+x_mL_m$$

同理

$$y=y_iL_i+y_jL_j+y_mL_m$$

上两式连同(2.5.25)式可合并表示为

$$\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ x_i & x_j & x_m\\ y_i & y_j & y_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}L_i\\ L_j\\ L_m\end{Bmatrix}\qquad(2.5.29)$$

这就是直角坐标用面积坐标表示的表达式。

(2.5.28)式和(2.5.29)式表明，用直角坐标表示的多项式(如位移函数、插值函数等)也可以表示为面积坐标的同阶多项式，反之亦然。

3. 面积坐标的微积分运算

面积坐标表示的函数对直角坐标求导时，采用一般的复合函数求导法则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial L_i}\frac{\partial L_i}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial L_j}\frac{\partial L_j}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial L_m}\frac{\partial L_m}{\partial x}\\ &=\frac{1}{2A}\left(b_i\frac{\partial}{\partial L_i}+b_j\frac{\partial}{\partial L_j}+b_m\frac{\partial}{\partial L_m}\right)\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{1}{2A}\left(c_i\frac{\partial}{\partial L_i}+c_j\frac{\partial}{\partial L_j}+c_m\frac{\partial}{\partial L_m}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(2.5.30)$$

复合求导中用到

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{2A}b_i \qquad (i,j,m)$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{2A}c_i$$

面积坐标的幂函数在三角形全面积上的积分公式为

$$\iint_A L_i^a L_j^b L_m^c \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2A \tag{2.5.31}$$

面积坐标的幂函数在三角形某一条边(例如 i-j 边)上的积分公式是

$$\int_l L_i^a L_j^b \mathrm{d}s = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}l \tag{2.5.32}$$

式中 l 为 i-j 边的边长,在该边上 $L_m=0$,因此式中只可能出现二个面积坐标。

利用上述积分公式很容易求有关的积分,例如:

$$\iint_A L_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!}2A = \frac{A}{3} \qquad (i,j,m)$$

$$\iint_A L_i^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!}2A = \frac{A}{6} \qquad (i,j,m)$$

$$\iint_A L_i L_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!}2A = \frac{A}{12} \qquad (i,j,m)$$

这些积分运算是十分简便的,有了这些公式后,进行例如 2.2.4 节中等效结点载荷等的计算将毫无困难。

4. 用面积坐标给出的三角形单元的插值函数

用面积坐标作为三角形单元的自然坐标时,可以直接得到用面积坐标表示的插值函数而不必经过先求解广义坐标,然后再由广义坐标得到单元插值函数的冗长计算过程。并且在得到插值函数以后,可以利用(2.5.30)~(2.5.32)式很方便地计算单元刚度矩阵和等效结点载荷列阵。

下面讨论线性和二次三角形单元用面积坐标给出的插值函数。

(1) 线性单元:3 结点三角形单元,见图 2.17(a)。插值函数由一个线性函数构成。对于每个角点,可用通过其它二个角点的直线方程左部的线性函数来构成。例如对于结点 1,可用 2-3 边的边方程来构成它的插值函数,即

$$N_1 = L_1$$

其他二个角点也雷同,因此有

$$N_i = L_i \qquad i = 1,2,3 \tag{2.5.33}$$

即线性单元的三个插值函数就是三角形单元的三个面积坐标。这个结论早已在(2.5.27)式中得到了证明。

(2) 二次单元:6 结点三角形单元,见图 2.17(b)。

对于每个结点 i,可以选择二条直线,这二条直线通过除结点 i 以外的所有结点,利用直线方程的左部作为线性函数来构造插值函数。如角点 1,可利用 2-3 边的边方程以及过边中点 4-6 的直线方程,并使在结点 1 上 $N_1=1$,即

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1$$

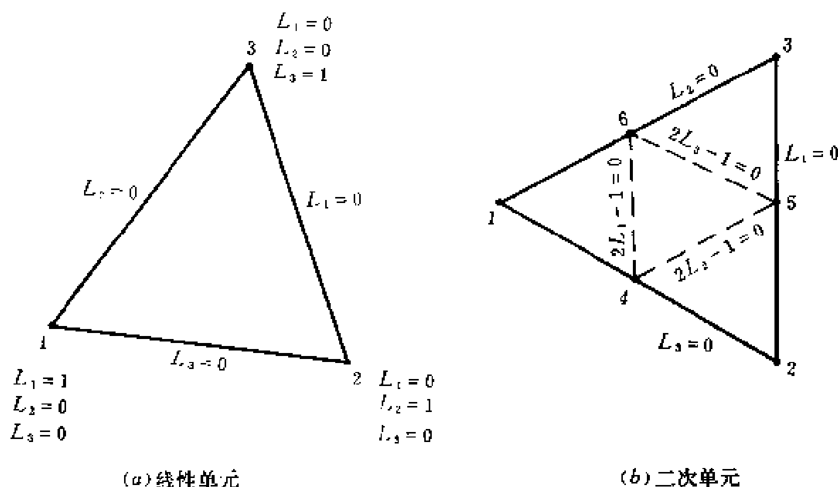


图 2.17　自然坐标三角形单元

同理，对另二个结点有

$$N_2=(2L_2-1)L_2,\quad N_3=(2L_3-1)L_3$$

对于三个角点，插值函数可统一写作

$$N_i=(2L_i-1)L_i\qquad(i=1,2,3)\tag{2.5.34}$$

对于三个边中点，可选择非此边中点所在的其他二条边作为直线方程，则可得

$$N_4=4L_1L_2,\quad N_5=4L_2L_3,\quad N_6=4L_3L_1\tag{2.5.35}$$

这样直接写出单元插值函数的方法十分简便。但必须校核 $N_i(L_j)=\delta_{ij}$以及 $\sum N_i=1$ 是否满足。这部分内容以及更高次单元如何利用面积坐标构造插值函数将在第 3 章中系统讨论。

5. 采用面积坐标时，单元矩阵的计算

当三角形单元采用面积坐标作自然坐标时，被积函数可以很方便地在三角形单元全域或沿边界积分。

2.2.4 节中的单元等效结点载荷列阵，当插值函数用自然坐标表示时，可以直接利用式(2.5.31)及(2.5.32)求出。

线性单元自重产生的等效结点载荷(见图 2.3)由(2.2.42)式得到

$$\boldsymbol{P}_{i\rho}=\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}_i\begin{Bmatrix}0\\-\rho\end{Bmatrix}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_A\begin{bmatrix}N_i&0\\0&N_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\-\rho\end{Bmatrix}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{Bmatrix}0\\\int_A-N_i\rho t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{Bmatrix}$$

根据(2.5.31)式，上式积分为

$$\int_A-N_i\rho t\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(-\rho t)\frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!}2A=-\frac{1}{3}\rho tA\tag{2.5.36}$$

这就是(2.2.43)式的结果。

线性单元在 ij 边作用有均布侧压 q(见图 2.4)时有

$$
\begin{aligned}
P_{ix} &= \int_l N_i q_x t \mathrm{d}s = \int_l N_i \frac{q}{l}(y_i - y_j) t \mathrm{d}s \\
&= \frac{q}{l}(y_i - y_j) t \int_l N_i \mathrm{d}s \\
P_{iy} &= \int_l N_i q_y t \mathrm{d}s = \int_l N_i \frac{q}{l}(x_j - x_i) t \mathrm{d}s \\
&= \frac{q}{l}(x_j - x_i) t \int_l N_i \mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{2.5.37}
$$

根据(2.5.32)式

$$
\int_l N_i \mathrm{d}s = \frac{1!0!}{(1+0+1)!} l = \frac{l}{2}
$$

所以(2.5.37)式积分得到

$$
\begin{aligned}
P_{ix} &= \frac{q}{l}(y_i - y_j) t \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} q t (y_i - y_j) \\
P_{iy} &= \frac{q}{l}(x_j - x_i) t \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} q t (x_j - x_i)
\end{aligned}
\tag{2.5.38}
$$

对于 P_{jx}, P_{jy} 可以得到与(2.5.38)式相同的结果。对于 P_{mx}, P_{my} 则应计算

$$
\begin{Bmatrix} P_{mx} \\ P_{my} \end{Bmatrix} = \int_l N_m \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} t \mathrm{d}s
$$

由于 l 是 ij 边,在此边上 $N_m = 0$,因此上式积分为零。综合上述等效结点载荷得到

$$
\boldsymbol{P}_q = \frac{1}{2} q t [y_i - y_j \quad x_j - x_i \quad y_i - y_j \quad x_j - x_i \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}
$$

就是(2.2.47)式。

这种计算的简便,在高次单元中尤为明显。

2.6 轴对称问题的有限元格式

工程问题中经常会遇到一些实际结构,它们的几何形状、约束条件以及作用的载荷都对称于某一固定轴,我们把它称为对称轴,则在载荷作用下产生的位移、应变和应力也对称于此轴。这种问题称为轴对称问题。

在轴对称问题中,通常采用圆柱坐标(r,θ,z)。以对称轴作为 z 轴,所有应力、应变和位移都与 θ 方向无关,只是 r 和 z 的函数,任一点的位移只有两个方向的分量,即沿 r 方向的径向位移 u 和沿 z 方向的轴向位移 w。由于轴对称,θ 方向的位移 v 等于零。因此轴对称问题是二维问题。

离散轴对称体时,采用的单元是一些圆环。这些圆环单元与 rz 平面正交的截面可以有不同的形状,例如 3 结点三角形、6 结点三角形或其它形式。单元的结点是圆周状的铰链,各单元在 rz 平面内形成网格。图 2.18 所示为 3 结点三角形环状单元。

对轴对称问题进行计算时,只需取出一个截面进行网格划分和分析,但应注意到单元是圆环状的,所有的结点载荷都应理解为作用在单元结点所在的圆周上。

本节主要仍以 3 结点三角形环状单元为例进行讨论。这种单元适应性好、计算简单，是一种常用的最简单的单元。其它单元有限元格式的建立，途径是一样的。而另一类常用的等参元，将在第 4 章集中进行讨论。

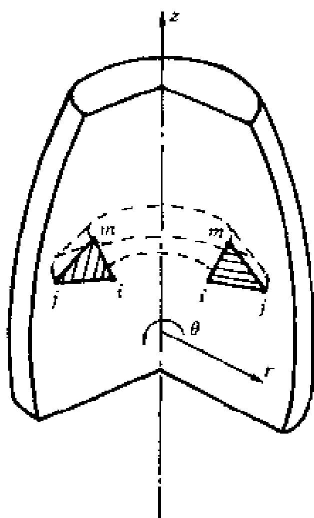


图 2.18　三角形环状单元

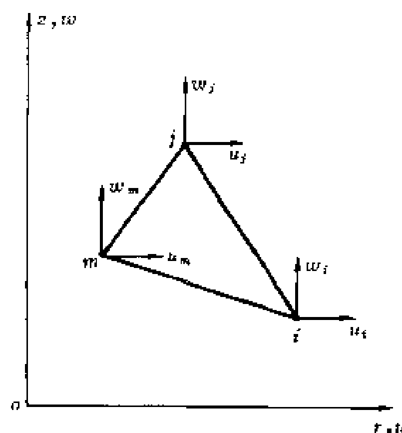


图 2.19　3 结点三角形环状单元的 rz 截面

2.6.1　3 结点三角形环状单元的插值函数及应力应变矩阵

1. 位移模式和插值函数

取出环状单元的一个截面 ijm 如图 2.19 所示。单元结点位移为

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix}$$

选择线性位移模式

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\beta} \tag{2.6.1}$$

其中　$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\phi} = [1 \quad r \quad z]$，$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_6]^{\mathrm{T}}$

与平面问题类同，可以用 6 个结点位移表示 6 个广义坐标 $\beta_1 \sim \beta_6$，代回(2.6.1)式可以得到与平面问题类似的表达式

$$\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ w &= N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

式中 N_i, N_j, N_m 是插值函数

$$S_i = \frac{E(1-\nu)}{2A(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} b_i + A_1 f_i & A_1 c_i \\ A_1(b_i + f_i) & c_i \\ A_2 c_i & A_2 b_i \\ A_1 b_i + f_i & A_1 c_i \end{bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{2.6.10}$$

$$A_1 = \frac{\nu}{1-\nu},\ A_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{2.6.11}$$

由(2.6.10)可见，单元中除剪应力 τ_{rz} 外其它应力也非常量。

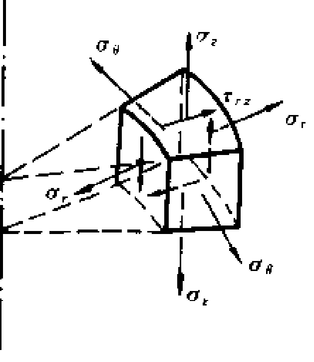


图 2.20 应力分量

2.6.2 3结点环状单元的单元刚度矩阵

单元刚度矩阵可参见(2.3.12)普遍公式，在轴对称的情况下有

$$\begin{aligned} K^e &= \iiint_{V_e} B^T D B r\,d\theta\,dr\,dz \\ &= 2\pi \iint_{\Omega_e} B^T D B r\,dr\,dz \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

为了简化计算和消除在对称轴上 $r=0$ 所引起的麻烦，把单元中随点而变化的 r、z 用单元截面形心处的坐标 $\bar{r}$ 和 $\bar{z}$ 来近似，即

$$\begin{aligned} r &\approx \bar{r} = \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_m) \\ z &\approx \bar{z} = \frac{1}{3}(z_i - z_j + z_m) \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

这样(2.6.8)式就近似为

$$f_i \approx \bar{f}_i = \frac{a_i}{\bar{r}} + b_i + \frac{c_i \bar{z}}{\bar{r}} \quad (i,j,m)$$

作了这样的近似后，应变矩阵 B 和应力矩阵 S 都成了常量阵，根据(2.6.12)式很快可以积出单元刚度矩阵的显式

$$\begin{aligned} K^e &= 2\pi\bar{r} B^T D B A \\ &= \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

式中 A 是三角形环状单元的截面积。对于(2.6.14)式中每一子块

$$K_{rs} = 2\pi\bar{r} B_r^T D B_s A \tag{2.6.15}$$

代入 B 和 D 后可以得到

$$K_{rs} = \frac{\pi E(1-\nu)\bar{r}}{2A(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_2 & K_4 \end{bmatrix} \quad (r,s = i,j,m) \tag{2.6.16}$$

$$S_i = \frac{E(1-\nu)}{2A(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} b_i + A_1 f_i & A_1 c_i \\ A_1(b_i + f_i) & c_i \\ A_2 c_i & A_2 b_i \\ A_1 b_i + f_i & A_1 c_i \end{bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{2.6.10}$$

$$A_1 = \frac{\nu}{1-\nu},\ A_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{2.6.11}$$

由(2.6.10)可见，单元中除剪应力 τ_{rz} 外其它应力也非常量。

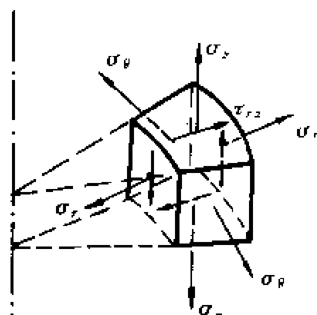


图 2.20 应力分量

2.6.2 3结点环状单元的单元刚度矩阵

单元刚度矩阵可参见(2.3.12)普遍公式，在轴对称的情况下有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^e &= \iiint_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\iint_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

为了简化计算和消除在对称轴上 $r=0$ 所引起的麻烦，把单元中随点而变化的 r、z 用单元截面形心处的坐标 $\bar{r}$ 和 $\bar{z}$ 来近似，即

$$\begin{aligned} r \approx \bar{r} &= \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_m) \\ z \approx \bar{z} &= \frac{1}{3}(z_i + z_j + z_m) \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

这样(2.6.8)式就近似为

$$f_i \approx \bar{f}_i = \frac{a_i}{\bar{r}} + b_i + \frac{c_i \bar{z}}{\bar{r}} \qquad (i,j,m)$$

作了这样的近似后，应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和应力矩阵 $\boldsymbol{S}$ 都成了常量阵，根据(2.6.12)式很快可以积出单元刚度矩阵的显式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^e &= 2\pi\bar{r}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}A \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} & \boldsymbol{K}_{im} \\ \boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} & \boldsymbol{K}_{jm} \\ \boldsymbol{K}_{mi} & \boldsymbol{K}_{mj} & \boldsymbol{K}_{mm} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

式中 A 是三角形环状单元的截面积。对于(2.6.14)式中每一子块

$$\boldsymbol{K}_{rs} = 2\pi\bar{r}\boldsymbol{B}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_s A \tag{2.6.15}$$

代入 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 后可以得到

$$\boldsymbol{K}_{rs} = \frac{\pi E(1-\nu)\bar{r}}{2A(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_2 & K_4 \end{bmatrix} \quad (r,s = i,j,m) \tag{2.6.16}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= b_r b_s + f_r f_s + A_1(b_r f_s + f_r b_s) + A_2 c_r c_s \\
K_2 &= A_1 c_r (b_s + f_s) + A_2 b_r c_s \\
K_3 &= A_1 c_s (b_r + f_r) + A_2 c_r b_s \\
K_4 &= c_r c_s + A_2 b_r b_s \\
A_1 &= \frac{\nu}{1-\nu}, \quad A_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}
\end{aligned}\right\} \tag{2.6.17}$$

2.6.3 3结点环状单元的等效结点载荷

等效结点载何仍参看(2.3.13)及(2.3.14)普遍公式。现在的等效结点力是由作用在环状单元上的体积力、分布面力等引起的。对于轴对称问题(2.3.14)式可以写作

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_f^e &= 2\pi \iint_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} r \mathrm{d}r \mathrm{d}z \\
\boldsymbol{P}_s^e &= 2\pi \int_{S_\sigma^e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} r \mathrm{d}s \\
\boldsymbol{P}_{\sigma_0}^e &= -2\pi \iint_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}_0 r \mathrm{d}r \mathrm{d}z \\
\boldsymbol{P}_{\varepsilon_0}^e &= 2\pi \iint_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r \mathrm{d}r \mathrm{d}z \\
\boldsymbol{P}_F &= 2\pi \boldsymbol{F} \\
\boldsymbol{F} &= \begin{Bmatrix} r_1 \boldsymbol{F}_1 \\ r_2 \boldsymbol{F}_2 \\ \vdots \\ r_n \boldsymbol{F}_n \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_i = \begin{Bmatrix} F_{ir} \\ F_{iz} \end{Bmatrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)
\end{aligned} \tag{2.6.18}$$

集中力应是作用在一圈结点上集中力的总量。式中 r_i 是结点 i 的 r 坐标，F_{ir}，F_{iz}是作用在结点 i 圆周每单位长度上的集中载荷在 r 和 z 方向的分量。

下面我们推导几种常见载荷的等效结点载荷。

1. 自重

若旋转对称轴 z 垂直于地面，此时重力只有 z 方向的分量。设单位体积的重量为 ρ，则体积力

$$\boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho \end{Bmatrix}$$

代入(2.6.18)式的第一式

$$\boldsymbol{P}_f^e = 2\pi \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho \end{Bmatrix} r \mathrm{d}r \mathrm{d}z$$

对于结点 i 上有

$$\boldsymbol{P}_{if}^e = 2\pi \int_{\Omega_e} N_i \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho \end{Bmatrix} r \mathrm{d}r \mathrm{d}z \qquad (i, j, m) \tag{2.6.19}$$

利用面积坐标建立关系

$$r = r_iL_i + r_jL_j + r_mL_m \tag{2.6.20}$$

则有

$$\iint_{\Omega_e} N_i r \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \iint_{\Omega_e} L_i(r_iL_i + r_jL_j + r_mL_m)\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{2.6.21}$$

利用面积坐标的积分公式(2.5.31)式可以计算(2.6.21)式的积分

$$\iint_{\Omega_e} N_i r \mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{A}{12}(2r_i + r_j + r_m) = \frac{A}{12}(3\bar{r} + r_i) \quad (i,j,m) \tag{2.6.22}$$

代入(2.6.19)式即得到

$$\boldsymbol{P}_{if}^e = \begin{Bmatrix} P_{ir} \\ P_{iz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6}\pi\rho A(3\bar{r} + r_i) \end{Bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{2.6.23}$$

2. 旋转机械的离心力

若旋转机械绕 z 轴旋转的角速度为 ω，则离心力载荷

$$\boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\rho}{g}\omega^2 r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{if}^e = \begin{Bmatrix} P_{ir} \\ P_{iz} \end{Bmatrix} = 2\pi\iint_{\Omega_e} N_i \begin{Bmatrix} \frac{\rho}{g}\omega^2 r \\ 0 \end{Bmatrix} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (i,j,m) \tag{2.6.24}$$

式中积分

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_e} N_i r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}z &= \iint_{\Omega_e} L_i(r_iL_i + r_jL_j + r_mL_m)^2\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ &= \frac{A}{30}[(r_i + r_j + r_m)^2 + 2r_i^2 - r_jr_m] \\ &= \frac{A}{30}[9\bar{r}^2 + 2r_i^2 - r_jr_m] \quad (i,j,m)\end{aligned} \tag{2.6.25}$$

代入(2.6.24)式得到离心力的等效结点载荷

$$\boldsymbol{P}_{if}^e = \begin{Bmatrix} P_{ir} \\ P_{iz} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\pi\rho\omega^2 A}{15g}(9\bar{r}^2 + 2r_i^2 - r_jr_m) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{2.6.26}$$

3. 均布侧压

假设单元的 im 边作用有均布侧压 q，以压向单元边界为正，如图 2.21 面积力为

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} T_r \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q\sin\alpha \\ -q\cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q\,\frac{z_m - z_i}{l_{im}} \\ q\,\frac{r_i - r_m}{l_{im}} \end{Bmatrix} \tag{2.6.27}$$

式中 r_i, z_i, r_m, z_m 为结点 i 和结点 m 的坐标，l_{im} 为 im 边的边长。根据(2.6.18)式的第二式

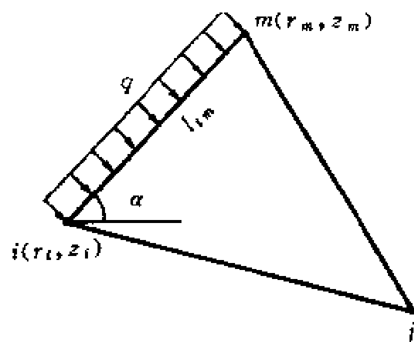


图 2.21 均布侧压载荷

$$P_s^e = \begin{Bmatrix} P_{is} \\ P_{js} \\ P_{ms} \end{Bmatrix} = 2\pi \int N^T \begin{Bmatrix} T_r \\ T_z \end{Bmatrix} r\mathrm{d}s$$

$$P_{is}^e = 2\pi \int N_i \begin{Bmatrix} q \dfrac{z_m - z_i}{l_{im}} \\ q \dfrac{r_i - r_m}{l_{im}} \end{Bmatrix} r\mathrm{d}s \tag{2.6.28}$$

式中积分

$$\int N_i r\mathrm{d}s = \int L_i (r_i L_i + r_j L_j + r_m L_m) \mathrm{d}s$$

注意到沿边界 im 积分时 $L_j=0$，上式积分有

$$\int N_i r\mathrm{d}s = \frac{1}{6}(2r_i + r_m) l_{im} \tag{2.6.29}$$

代入(2.6.28)式得到

$$P_{is}^e = \begin{Bmatrix} P_{ir} \\ P_{iz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\pi q (2r_i + r_m) \begin{Bmatrix} z_m - z_i \\ r_i - r_m \end{Bmatrix} \tag{2.6.30}$$

同理可得

$$P_{ms}^e = \begin{Bmatrix} P_{mr} \\ P_{mz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\pi q (r_i + 2r_m) \begin{Bmatrix} z_m - z_i \\ r_i - r_m \end{Bmatrix} \tag{2.6.31}$$

由于沿 im 边 $L_j=0$，所以 $P_{js}^e = \mathbf{0}$

4. 温度变化引起的等效结点载荷

由于温度变化，体内将产生应变，可被作为初应变来处理。假如温度改变为 T，产生的初应变是

$$\varepsilon_0 = \alpha T [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T \tag{2.6.32}$$

其中 α 是材料的线膨胀系数。

根据(2.6.18)式中第 4 式

$$P_{\varepsilon_0}^e = \begin{Bmatrix} P_{i\varepsilon_0} \\ P_{j\varepsilon_0} \\ P_{m\varepsilon_0} \end{Bmatrix}^e = 2\pi \iint B^T D \varepsilon_0 r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$P_{i\varepsilon_0}^e = 2\pi \iint B_i^T D \varepsilon_0 r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \qquad (i,j,m) \tag{2.6.33}$$

上式中代入(2.6.7)式的 B_i 和表 1.2 中的弹性矩阵 D 以及(2.6.32)式的 ε_0 可得

$$P_{iT}^e = \frac{\pi E \alpha}{A(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} \iint (b_i + f_i) T r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ \iint c_i T r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \end{Bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{2.6.34}$$

上式可用数值积分，亦可简单地取近似值。即取

$$f_i \approx \bar{f}_i = \frac{a_i}{\bar{r}} + b_i + \frac{c_i \bar{z}}{\bar{r}}$$

$$r \approx \bar{r} = \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_m)$$

$$T \approx \overline{T} = \frac{1}{3}(T_i + T_j + T_m)$$

这样就得到(2.6.34)的近似表达式

$$\boldsymbol{P}_{iT}^{e} = \frac{\pi E \alpha \bar{r}\,\overline{T}}{(1-2\nu)}\begin{Bmatrix} b_i + \bar{f}_i \\ c_i \end{Bmatrix} \tag{2.6.35}$$

2.6.4 单元刚度矩阵的精确积分

由计算单元刚度矩阵的(2.6.12)式可以得到应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不是常量阵时，与(2.6.15)式相应的分块矩阵的计算公式为

$$\boldsymbol{K}_{rs} = 2\pi \iint \boldsymbol{B}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_s r \mathrm{d}r \mathrm{d}z \quad (r, s = i, j, m) \tag{2.6.36}$$

在 2.6.2 节中我们把 $\boldsymbol{B}_r$、$\boldsymbol{B}_s$ 中的 r 和 z 用单元形心处的 $\bar{r}$ 和 $\bar{z}$ 来近似，得到了单元刚度矩阵的近似积分。这一节将讨论它的精确积分。把应变矩阵分成两部分

$$\boldsymbol{B}_r = \overline{\boldsymbol{B}}_r + \boldsymbol{B}'_r \qquad (r = i, j, m) \tag{2.6.37}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{B}}_r$ 是用单元形心的 $\bar{r}$ 和 $\bar{z}$ 代入 $\boldsymbol{B}_r$ 中得到的应变矩阵中的不变部分，就是计算近似单元刚度矩阵时用的应变矩阵；$\boldsymbol{B}'_r$ 是应变矩阵的变化部分

$$\boldsymbol{B}'_r = \frac{1}{2A}\left(\frac{a_r + c_r z}{r} - \frac{a_r + c_r \bar{z}}{\bar{r}}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m) \tag{2.6.38}$$

将(2.6.37)式代入(2.6.36)式可以得到

$$\boldsymbol{K}_{rs} = 2\pi \iint (\overline{\boldsymbol{B}}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \overline{\boldsymbol{B}}_s + \overline{\boldsymbol{B}}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}'_s + \boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}_r \boldsymbol{D} \overline{\boldsymbol{B}}_s + \boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}_r \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}'_s) r \mathrm{d}r \mathrm{d}z \tag{2.6.39}$$

上式中 $\overline{\boldsymbol{B}}_r$, $\overline{\boldsymbol{B}}_s$, $\boldsymbol{D}$ 都是常量阵，可以提在积分号的外面；$\boldsymbol{B}'_r$ 或 $\boldsymbol{B}'_s$ 的积分包含下面关系

$$\iint\left(\frac{a_r + c_r z}{r} - \frac{a_r + c_r \bar{z}}{\bar{r}}\right) r \mathrm{d}r \mathrm{d}z = (a_r + c_r \bar{z})A - \left(\frac{a_r + c_r \bar{z}}{\bar{r}}\right)\bar{r}A = 0 \tag{2.6.40}$$

因此(2.6.39)式中第二，三两项积分为零，即

$$\iint \overline{\boldsymbol{B}}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}'_s r \mathrm{d}r \mathrm{d}z = \iint \boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}_r \boldsymbol{D} \overline{\boldsymbol{B}}_s r \mathrm{d}r \mathrm{d}z = 0$$

于是(2.6.39)式可以写作

$$\boldsymbol{K}_{rs} = \overline{\boldsymbol{K}}_{rs} + \boldsymbol{K}'_{rs} \tag{2.6.41}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{K}}_{rs}$ 就是(2.6.16)式中给出的近似单元刚度矩阵，$\boldsymbol{K}'_{rs}$ 是它的修正部分

$$\boldsymbol{K}'_{rs} = 2\pi \iint \boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}_r \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}'_s r \mathrm{d}r \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi}{(2A)^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{D} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \iint \left(\frac{a_r + c_r z}{r} - \frac{a_r + c_r \bar{z}}{\bar{r}} \right) \left(\frac{a_s + c_s z}{r} - \frac{a_s + c_s \bar{z}}{\bar{r}} \right) r \mathrm{d}r \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\pi E(1-\nu)}{2A(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} K_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6.42}$$

在 2×2 的分块矩阵中只需修正一个元素。考虑到(2.6.40)式，修正项 K_1' 为

$$K_1' = \iint \frac{1}{r}[a_r a_s + (a_r c_s + a_s c_r)z + c_r c_s z^2] \mathrm{d}r \mathrm{d}z - \frac{A}{\bar{r}}(a_r + c_r \bar{z})(a_s + c_s \bar{z})$$

$$= a_r a_s \left(I_1 - \frac{1}{\bar{r}} \right) + (a_r c_s + a_s c_r) \left(I_2 - \frac{\bar{z}}{\bar{r}} \right) + c_r c_s \left(I_3 - \frac{\bar{z}^2}{\bar{r}} \right) \tag{2.6.43}$$

$$(r, s = i, j, m)$$

式中 I_1、I_2、I_3 代表积分

$$I_n = \frac{1}{A} \iint \frac{z^{n-1}}{r} \mathrm{d}r \mathrm{d}z \quad (n = 1, 2, 3) \tag{2.6.44}$$

上述积分需在三角形 ijm 上进行，具体积分时，可以在三个梯形（见图 2.22）$i_1 imm_1$，$m_1 mjj_1$ 以及 $i_1 ijj_1$ 上进行，由前面二个梯形面积积分和中减去第三个梯形面积上的积分。经运算、整理并采用下列符号

$$l_i = \ln r_i, \quad A_{mj} = -\frac{a_i}{c_i}, \quad B_{mj} = -\frac{b_i}{c_i} \qquad (i, j, m) \tag{2.6.45}$$

(2.6.44)式的积分是

$$\left.\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{A} \sum_{ijm} [(A_{ji} - A_{im}) l_i + B_{mj}(r_j - r_m)] \\
I_2 &= \frac{1}{A} \sum_{ijm} \Big[\frac{1}{2}(A_{ji}^2 - A_{im}^2) l_i + A_{mj} B_{mj}(r_j - r_m) \\
&\quad + \frac{1}{4} B_{mj}^2 (r_j^2 - r_m^2) \Big] \\
I_3 &= \frac{1}{A} \sum_{ijm} \Big[\frac{1}{3}(A_{ji}^3 - A_{im}^3) l_i + A_{mj}^2 B_{mj}(r_j - r_m) \\
&\quad + \frac{1}{2} A_{mj} B_{mj}^2 (r_j^2 - r_m^2) + \frac{1}{9} B_{mj}^3 (r_j - r_m^3) \Big]
\end{aligned}\right\} \tag{2.6.46}$$

(2.6.46)式中 $\sum\limits_{ijm}$ 表示对括号中的各项 i,j,m 指标轮换后再求和。(2.6.46)式可合并写作

$$I_n = \frac{1}{A} \sum_{ijm} \Big[\frac{1}{n}(A_{ji}^n - A_{im}^n) l_i + A_{mj}^{n-1} B_{mj}(r_j - r_m)$$

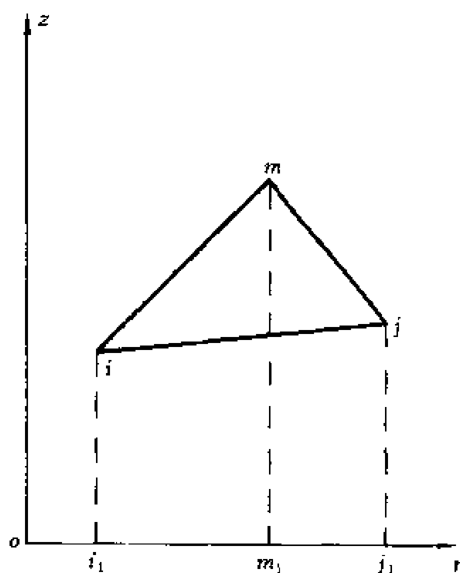
$$+ \frac{n-1}{4} A_{mj}^{n-2} B_{mj}^2 (r_j^2 - r_m^2) + \frac{(n-1)(n-2)}{18} B_{mj}^3 (r_j^3 - r_m^3) \Big]$$

$$(n = 1, 2, 3) \tag{2.6.47}$$

采用(2.6.43)及(2.6.47)式计算修正的刚度系数时，有两种情况会出现奇异性：

(1) 单元的某个结点 i 位于旋转对称轴上（即 $r_i = 0$）时，(2.6.47)式中包含对数的项

$$(A_{ji}^n - A_{im}^n) l_i = \left[\frac{(r_i z_j - r_j z_i)^n}{(r_i - r_j)^n} - \frac{(r_m z_i - r_i z_m)^n}{(r_m - r_i)^n} \right] \ln r_i$$



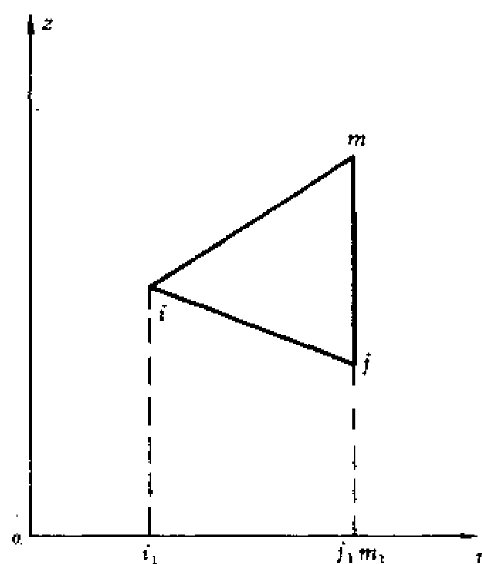


图 2.22 I_n 的积分域

图 2.23 单元的一个边平行 Z 轴

将成为 $0\times\infty$。这项极限可由罗彼塔法则来确定，事实上这个极限总是零。因此如果单元某个结点的 r 为零时，只要将其对应的对数项除去即可。

(2) 当单元的两个结点的径向坐标相等时，例如 $r_j=r_m$，见图 2.23，此时 $c_i=-(r_j-r_m)=0$，相应的 A_{mj}，B_{mj} 都成为无穷大，计算中将产生困难。然而，在此情况下，梯形 j_1jmm_1 的面积为零，因此对于 j-m 部分无需进行积分，只需令 $A_{jm}=B_{jm}=0$ 即可。

以上两种情况在网格划分时通常都会出现。综合以上讨论，可以将(2.6.45)式作如下修改即可消除计算中的奇异性：

$$\left.\begin{aligned}
l_i &= \begin{cases} 0 & \text{当 } r_i = 0 \\ \ln r_i & \text{当 } r_i \neq 0 \end{cases} \qquad (i,j,m) \\
A_{mj} &= \begin{cases} 0 & \text{当 } c_i = 0 \\ -a_i/c_i & \text{当 } c_i \neq 0 \end{cases} \qquad (i,j,m) \\
B_{mj} &= \begin{cases} 0 & \text{当 } c_i = 0 \\ -b_i/c_i & \text{当 } c_i \neq 0 \end{cases} \qquad (i,j,m)
\end{aligned}\right\} \tag{2.6.48}$$

(3) 对于有两个结点在对称轴上的单元，例如结点 i 和 j，则有 $r_i=r_j=0$，此时除了分块矩阵 $\boldsymbol{K}'_{mm}=0$ 外，其他分块矩阵的积分均发散，但是此时应有 $u_i=u_j=0$，引入此位移条件修正刚度矩阵是将第 $2i-1$ 行和 $2i-1$ 列以及 $2j-1$ 行和 $2j-1$ 列划掉，其结果就是令在此情况下单元刚度矩阵的修正项 $\boldsymbol{K}'_{rs}=0$。即采用常应变的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{rs}$ 而不必引入修正项 $\boldsymbol{K}'_{rs}$，因为这时 $\boldsymbol{K}_{rs}$ 就是精确积分的结果。

如果稍作分析以上结论是不难理解的。因为 3 结点三角形单元的径向位移 u 可表示成

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z$$

当引入对称轴上二个结点($r_i=r_j=0$)的位移条件($u_i=u_j=0$)以后，显然得到 $\alpha_1=\alpha_3=0$，所以此单元的径向位移最后可表示成

$$u = \alpha_2 r$$

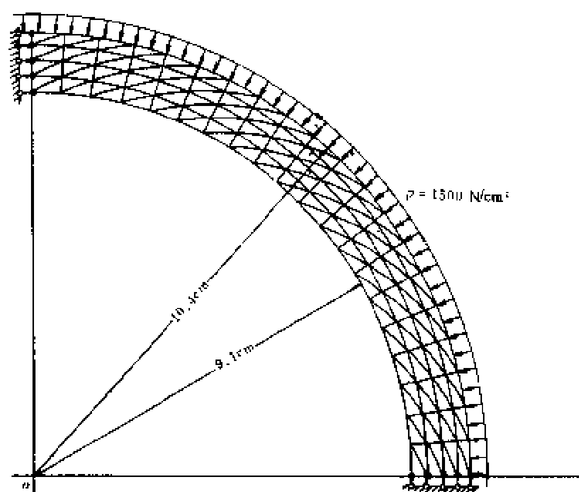
进一步可以得到

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \alpha_2 = 常数$$

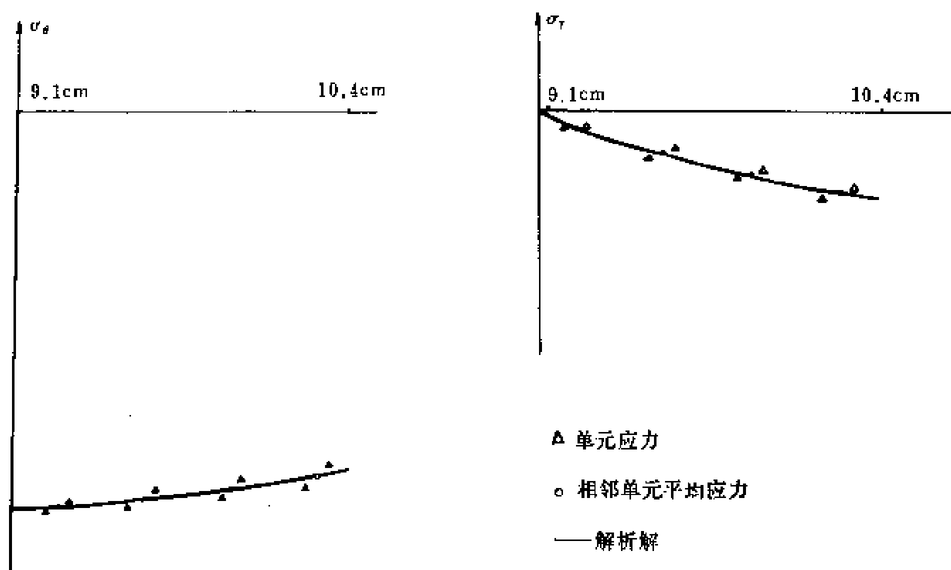
即然 ε_θ 为常数，由 ε_θ 的非常数部分引起的刚度矩阵修正项 $\boldsymbol{K}'_{rs}$ 自然就消失了，因此常应变的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{rs}$ 这时就是精确积分的结果。

实际计算也表明，采用近似积分不仅计算方便，而且其精度也是足够满意的。因此对于 3 结点三角形环状单元一般多采用近似积分来计算刚度矩阵。

例 1 厚壁圆球受外压。圆球外壁半径 $R_0=10.4\text{cm}$，内壁半径 $R_1=9.1\text{cm}$，外压 $p=1500\text{N/cm}^2$。由于对称可取 1/4 球体进行计算，网格划分及对称面条件表示方式见图 2.24



(a) 网格划分

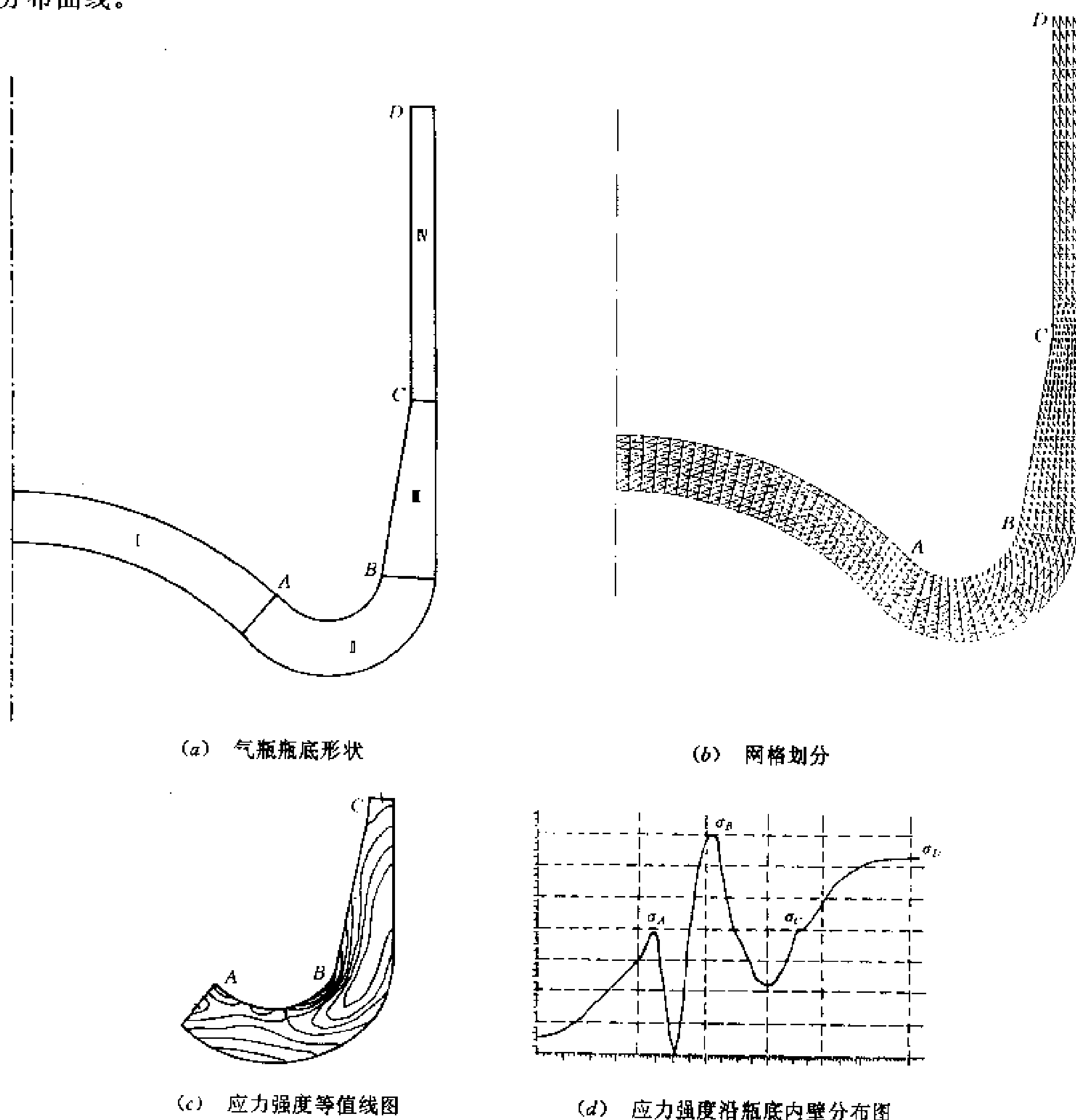


(b) 应力计算结果与解析解比较

图 2.24 厚壁球壳受外压

(a)。沿球壁厚度划分 8 个三角形单元,全部共计 160 个单元。计算结果见图 2.24(b)。取相邻单元的平均值则达到相当满意的计算精度,对于主要应力 σ_θ 最大相对误差小于 2%。

例 2 高压气瓶是医疗和工业上的常用产品,是受内压的轴对称结构。气瓶瓶底形状见图 2.25(a),由内外壁两段圆弧形成的凹底Ⅰ、Ⅱ通过锥段Ⅲ联接到圆柱形筒体Ⅳ上,在内压作用下几何形状发生变化的联结部位 A,B,C 处会产生局部应力集中。有限元分析的网格图见图 2.25(b)。分析结果表明应力集中最大值产生在气瓶内壁 B 点。图 2.25(c)为应力集中部位的应力强度($\sigma_1-\sigma_3$)等值线图;图 2.25(d)为应力强度沿气瓶内壁的分布曲线。



(a) 气瓶瓶底形状　　(b) 网格划分

(c) 应力强度等值线图　　(d) 应力强度沿瓶底内壁分布图

图 2.25 高压气瓶受内压

2.7 空间问题有限元

在实际工程问题中,有些结构形体复杂,必须按照空间问题求解。经典弹性力学对于

这类问题常常是无能为力的。在有限单元法中由于空间问题只要求 C_0 连续性，构造单元没有什么困难，因此许多过去不能解决的空间问题现在都可以通过有限单元法来计算。但是空间问题结点自由度多，需要分割的单元数量也多，因此计算量较大。一般需要有相当大内存量的计算机才能顺利进行计算。

在空间问题中对计算对象形状适应较好的是常应变 4 结点四面体单元。本节将介绍此种单元的插值函数以及六面体单元的位移函数。高次四面体元及六面体元将在第 3 章中讨论。

2.7.1 常应变四面体单元

1. 位移函数

图 2.26 所示为四面体单元，以四个角点 i,j,m,l 为结点。每个结点有 3 个自由度、一个单元有 12 个自由度，因此由广义坐标给出的位移函数是线性函数

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Phi\beta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{\phi} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{\phi}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta} \tag{2.7.1}$$

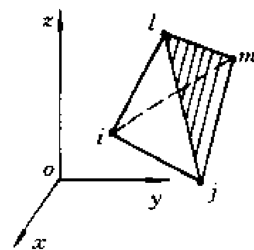


图 2.26 四面体单元

其中

$$\boldsymbol{\phi}=[1\quad x\quad y\quad z]$$

$$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_{12}]^{\mathrm{T}}$$

用 4 个结点坐标代入(2.7.1)式，可得到

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{A}} & 0 & 0\\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}} & 0\\ 0 & 0 & \tilde{\boldsymbol{A}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta} \tag{2.7.2}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e=[u_1\quad u_2\quad u_3\quad u_4\quad v_1\quad v_2\quad v_3\quad v_4\quad w_1\quad w_2\quad w_3\quad w_3]^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1 & x_i & y_i & z_i\\ 1 & x_j & y_j & z_j\\ 1 & x_m & y_m & z_m\\ 1 & x_l & y_l & z_l\end{bmatrix}$$

由(2.7.2)式求出广义坐标 $\boldsymbol{\beta}$，再代入(2.7.1)式可得到

$$\begin{aligned}u&=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m+N_lu_l\\ v&=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m+N_lv_l\\ w&=N_iw_i+N_jw_j+N_mw_m+N_lw_l\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

式中

$$N_i=\frac{1}{6V}(a_i+b_ix+c_iy+d_iz)$$

$$N_j=-\frac{1}{6V}(a_j+b_jx+c_jy+d_jz)$$

$$N_m=\frac{1}{6V}(a_m+b_mx+c_my+d_mz)$$

$$N_l = -\frac{1}{6V}(a_l + b_l x + c_l y + d_l z) \tag{2.7.4}$$

其中

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix}, \quad d_i = -\begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix} \quad (i,j,m,l) \tag{2.7.5}$$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \tag{2.7.6}$$

V 是四面体 $i\ j\ m\ l$ 的体积。为了使四面体的体积不为负值，单元结点编号 i,j,m,l 必须依照一定的顺序。在右手坐标系中，当按照 $i \to j \to m$ 的方向转动时，右手螺旋应向 l 的方向前进。

由(2.7.3)式，单元位移的矩阵表示是

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e = [\boldsymbol{I}N_i \quad \boldsymbol{I}N_j \quad \boldsymbol{I}N_m \quad \boldsymbol{I}N_l]\boldsymbol{a}^e \tag{2.7.7}$$

其中 $\boldsymbol{a}^e = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad u_m \quad v_m \quad w_m \quad u_l \quad v_l \quad w_l]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{I}$ 是三阶单位矩阵。

由于位移函数是线性的，相邻单元交界面上的位移是连续的。所以常应变四面体元是协调元。

2. 应变矩阵

在空间问题中，每点具有 6 个应变分量

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{2.7.8}$$

将(2.7.7)式代入上式，得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e = [\boldsymbol{B}_i \quad -\boldsymbol{B}_j \quad \boldsymbol{B}_m \quad -\boldsymbol{B}_l]\boldsymbol{a}^e \tag{2.7.9}$$

应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每个分块子矩阵是 6×3 的矩阵

$$\boldsymbol{B}_r = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} b_r & 0 & 0 \\ 0 & c_r & 0 \\ 0 & 0 & d_r \\ c_r & b_r & 0 \\ 0 & d_r & c_r \\ d_r & 0 & b_r \end{bmatrix} \qquad r = i,j,m,l \tag{2.7.10}$$

可以看出应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是常量阵,单元中应变分量都是常量,当然其应力分量也是常量。

3. 单元刚度矩阵

将(2.7.9)式的应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 代入(2.3.12)式中,$\boldsymbol{D}$ 应取表 1.2 中三维问题的矩阵表达形式,就可求出单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$。由于应变矩阵是常量阵,因此计算是简单的

$$\boldsymbol{K}^e = \int_{V^e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}V \tag{2.7.11}$$

把单元刚度矩阵表成按结点分块的形式

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & -\boldsymbol{K}_{ij} & \boldsymbol{K}_{im} & -\boldsymbol{K}_{il} \\ -\boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} & -\boldsymbol{K}_{jm} & \boldsymbol{K}_{jl} \\ \boldsymbol{K}_{mi} & -\boldsymbol{K}_{mj} & \boldsymbol{K}_{mm} & -\boldsymbol{K}_{ml} \\ -\boldsymbol{K}_{li} & \boldsymbol{K}_{lj} & -\boldsymbol{K}_{lm} & \boldsymbol{K}_{ll} \end{bmatrix} \tag{2.7.12}$$

其中任一分块 $\boldsymbol{K}_{rs(3\times3)}$ 由下式计算

$$\boldsymbol{K}_{rs} = \boldsymbol{B}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_sV = \frac{E(1-\nu)}{36V(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} K_1 & K_4 & K_7 \\ K_2 & K_5 & K_8 \\ K_3 & K_6 & K_9 \end{bmatrix} \tag{2.7.13}$$

$$(r,s, = i,j,m,l)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= b_rb_s + A_2(c_rc_s + d_rd_s) \\ K_2 &= A_1c_rb_s + A_2b_rc_s \\ K_3 &= A_1d_rb_s + A_2b_rd_s \\ K_4 &= A_1b_rc_s + A_2c_rb_s \\ K_5 &= c_rc_s + A_2(b_rb_s + d_rd_s) \\ K_6 &= A_1d_rc_s + A_2c_rd_s \\ K_7 &= A_1b_rd_s + A_2d_rb_s \\ K_8 &= A_1c_rd_s + A_2d_rc_s \\ K_9 &= d_rd_s + A_2(b_rb_s + c_rc_s) \end{aligned}\right\} \tag{2.7.14}$$

$$A_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad A_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

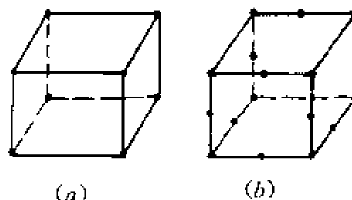
等效结点载荷可根据具体载荷按公式(2.3.13)和(2.3.14)式进行计算。

四面体单元对边界拟合的能力强,但划分单元比较复杂,易出错。

2.7.2 六面体单元

如同在平面问题中采用矩形单元一样，在空间问题中也可以采用六面体单元。图 2.27(a)表示了以 8 个角点为结点的六面体单元，每个结点三个自由度，共 24 个自由度。位移函数可以包括以下各项

$$\boldsymbol{\phi}=[1 \quad x \quad y \quad z \quad xy \quad xz \quad yz \quad xyz] \tag{2.7.15}$$



(a)　　(b)

图 2.27　六面体单元

(a) 一次单元（8 结点 24 自由度）

(b) 二次单元(20 结点 60 自由度)

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi} & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{\phi} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{\phi}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta} \tag{2.7.16}$$

$$\boldsymbol{\beta}=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{24}]^{\mathrm{T}}$$

图 2.27(b)表示的是 20 结点六面体单元。除了角点外，每边中点也是结点。单元共有 60 个自由度。位移函数可选取

$$\boldsymbol{\phi}=[1\ x\ y\ z\ xy\ xz\ yz\ x^2\ y^2\ z^2\ x^2y\ xy^2\ x^2z\ xz^2\ y^2z\ yz^2\ xyz\ x^2yz\ xy^2z\ xyz^2] \tag{2.7.17}$$

显然，如果将 2.3.2 节所讨论的一般格式，用来推导用结点位移表示 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式并得到单位插值函数的表达式，将是十分麻烦的。同时由于长方体单元形状过于规则，不易于拟合实际结构的外形，因此应用受到限制。如何利用定义于单元的自然坐标直接建立单元插值函数，以及如何利用等参变换得到任意曲面的六面体单元将分别在第 3 章和第 4 章进行讨论。

2.8 小　　结

本章以弹性力学静力分析问题为例讨论了有限单元法的基本原理和表达格式，其基本点可以归纳如下：

1. 建立有限单元法的原理和选择单元的类型。本章所采用的最小位能原理和基于它的以结点位移为基本未知量的位移元是固体力学有限单元法中应用最为广泛，也是最成熟的一种选择。现行的有限单元法的通用程序几乎无例外地都以位移元作为它最主要的、甚至是唯一的单元形式。

2. 建立有限元的计算模型。这里包括单元形式的选择、有限元网格的划分和边界条件的设置。本章着重讨论了平面问题 3 结点的三角形单元，它是在有限单元法中最早采用、而且至今仍有广泛应用的一种单元。通过它可以更好地了解有限元的概念以及表达格式的形成。本章所引入的平面或轴对称的高阶三角形单元和矩形单元以及空间的四面体单元和长方形单元实际上都可以看成是平面 3 结点三角形单元的推广。至于平面或空间的任意形状单元的插值函数和特性矩阵的形成将在第 3、4 章中详细讨论。关于有限元网格划分和边界条件设置的一般原则通过本章的讨论可以有个基本的认识，在第 5 章中将给予进一步的讨论。

3. 建立有限元的特性矩阵和求解方程。单元特性矩阵包括插值函数矩阵、应变矩阵，但最终要建立的是单元刚度矩阵和载荷向量，并用以形成有限单元法的求解方程。本章给出的广义坐标有限单元法的表达格式具有普遍意义。在以后各章的讨论中将可以看出，对于静力学问题如采用现今更为广泛应用的等参元，所不同的只是一些具体计算方法，而基本格式是一致的。对于后面要讲到的动力学问题，只是单元特性矩阵中增加了质量矩阵和阻尼矩阵，以及结点位移不再独立于时间。因此掌握本章所讨论的有限单元法的基本表达格式是至关重要的，其中，对单元刚度矩阵的特性、单元矩阵集成为系统矩阵的过程和对求解方程的特点的认识和把握是进一步选择求解方法和编制计算程序的依据，需要给予足够的注意。

4. 选择计算方法和求解有限元方程。关于线性方程组的求解方法以及编制有限元计算程序的若干实际问题将在第 6、7 章中进行详细的讨论，并在第 7 章中给出一个弹性力学平面问题的有限元分析程序的详尽资料及说明，以帮助读者进一步掌握有限单元法的基本原理和计算格式如何通过计算程序来实施，用以作为实际编程的入门。

为保证有限元方法求解的收敛性，对单元的位移插值函数提出了必须包含刚体运动和常应变位移模式的要求，同时还要求单元在交界面上保持位移的协调性。在本章所重点讨论的 3 结点三角形单元以及简要讨论的其它高阶单元或空间单元是满足上述要求的。这是由于它们都是 C_0 型单元，同时应变是用直角坐标描述的。对于今后遇到的 C_1 型单元（如板壳单元），如果应变又是用曲线坐标描述的情况，满足上述收敛准则常是相当棘手的问题，这将在今后有关章节讨论。但是上述收敛准则，读者在今后的学习和应用中需要给予充分的注意，因为对任何收敛准则的违背，都将可能使解的精度受到损害，甚至使求解失败。

习　题

2.1　证明 3 结点三角形单元的插值函数满足

$$N_i(x_j,y_j) = \delta_{ij}, \qquad 及 \qquad N_i + N_j + N_m = 1$$

2.2　图 2.28 所示 3 结点三角形单元，厚度为 t，弹性模量是 E，泊桑比 $\nu=0$。

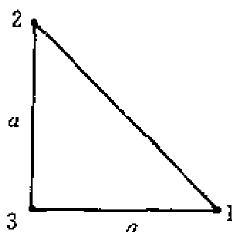


图　2.28

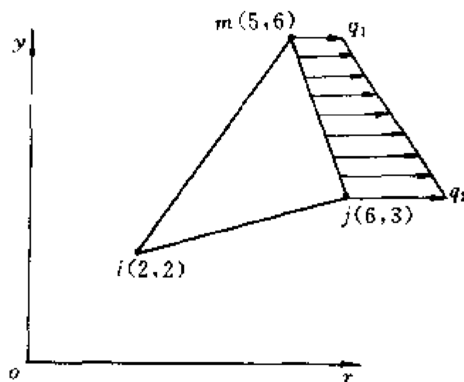


图　2.29

试求：插值函数矩阵 $\boldsymbol{N}$，应变矩阵 $\boldsymbol{B}$，应力矩阵 $\boldsymbol{S}$，单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$。

2.3 写出图 2.29 所示三角形单元的插值函数 N_i,N_j,N_m 以及应变矩阵 $\boldsymbol{B}$。

2.4 图 2.29 中单元在 jm 边作用有线性分布的面载荷（x 方向），试求结点载荷向量。

2.5 以平面问题常应变三角形单元为例，证明单元刚度矩阵的任何一行（或列）元素的总和为零。

2.6 证明常应变三角形单元发生刚体位移时，单元中将不产生应力。

提示：赋予结点在单元作平移和转动时相应的结点位移，证明单元中应力为零。

图 2.30

2.7 求图 2.30 所示二次三角形单元在 1 4 2 边作用有均布侧压 q 时的等效结点载荷。假设结点坐标已知，单元厚度为 t。

2.8 验证用面积坐标给出的二次（三角形）单元的插值函数 $N_1\sim N_6$（见(2.5.34)式及(2.5.35)式）满足 $\sum N_i=1\ (i=1\sim 6)$。

2.9 二维单元在 $x\,y$ 坐标平面内平移到不同位置，单元刚度矩阵相同吗？在平面内旋转时怎样？单元旋转 180°后单元刚度矩阵与原来的相同吗？单元作上述变化时，应力矩阵 $\boldsymbol{S}$ 如何变化？

2.10 图 2.31 中两个三角形单元组成平行四边形，已知单元①按局部编码 i,j,m 的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^{①}$ 和应力矩阵 $\boldsymbol{S}^{①}$ 是

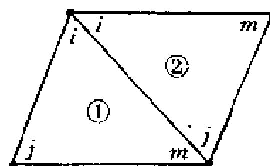


图 2.31

$$\boldsymbol{K}^{①}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 & -6 & -2 & 6 \\ & 16 & 0 & -12 & 0 & -4 \\ & & 13.5 & 4.5 & -7.5 & -4.5 \\ \text{对} & & & 13.5 & 1.5 & -1.5 \\ & & & & 9.5 & -1.5 \\ & & \text{称} & & & 5.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}^{①}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1.5 & -1.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

按图示单元②的局部编码写出 $\boldsymbol{K}^{②},\boldsymbol{S}^{②}$。

2.11 8 结点矩形元（每边中点为结点）的位移函数可取

$$u=\beta_1+\beta_2\xi+\beta_3\eta+\beta_4\xi\eta+\beta_5\xi^2+\beta_6\eta^2+\beta_7\xi^2\eta+\beta_8\xi\eta^2$$

$$v=\beta_9+\beta_{10}\xi+\beta_{11}\eta+\beta_{12}\xi\eta+\beta_{13}\xi^2+\beta_{14}\eta^2+\beta_{15}\xi^2\eta+\beta_{16}\xi\eta^2$$

试求插值函数 $N_1\sim N_8$ 并证明它们满足插值函数的基本要求。

2.12 8 结点矩形元位移模式的三次项由上题给出的 $\xi^2\eta$ 和 $\xi\eta^2$ 改为 ξ^3 和 η^3，即

$$u=\beta_1+\beta_2\xi+\beta_3\eta+\beta_4\xi\eta+\beta_5\xi^2+\beta_6\eta^2+\beta_7\xi^3+\beta_8\eta^3$$

$$v = \beta_9 + \beta_{10}\xi + \beta_{11}\eta + \beta_{12}\xi\eta + \beta_{13}\xi^2 + \beta_{14}\eta^2 + \beta_{15}\xi^3 + \beta_{16}\eta^3$$

是否可以？

提示：可由收敛准则 2 连续性要求是否能满足来论证。

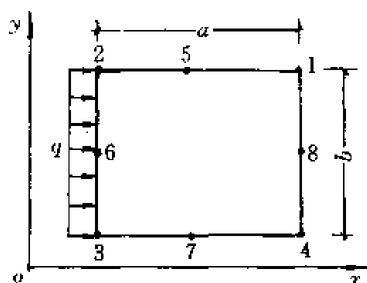


图 2.32

2.13 利用题 2.11 中得到的插值函数计算 8 结点矩形元在 2 6 3 边作用均布水平载荷 q 时的等效结点载荷，如图 2.32 所示，单元厚为 t。

2.14 试证明面积坐标与直角坐标满足下列转换关系。

$$x = x_i L_i + x_j L_j + x_m L_m$$
$$y = y_i L_i + y_j L_j + y_m L_m$$

第 3 章　单元和插值函数的构造

3.1 引　　言

在前两章的内容中，我们已讨论了通过变分法（或加权余量法的 Galerkin 提法）建立有限元方程的途径。首先是将场函数的总体泛函或总体求解域上的位能积分看成是由子域（单元）的泛函或位能积分所集成。至于有限元分析的其余步骤，原则上和传统的 Ritz 法或 Galerkin 法是相类同的。因此在一个给定问题的分析中、决定性的步骤之一是选择适当的单元和插值函数。

在前一章的讨论中，我们已经了解了广义坐标有限元方法的特点，即首先将场函数表示为多项式的形式，然后利用结点条件，将多项式中的待定参数表示成场函数的结点值和单元几何的函数，从而将场函数表示成由它结点值插值形式的表达式。无疑这一过程比较麻烦，且有时会遇到困难（(2.3.4)式中 $\boldsymbol{A}^{-1}$不存在）。同时我们在高阶三角形单元的讨论中，也已看到如果利用面积坐标（自然坐标），可以方便地直接建立起单元的插值函数，可以避免广义坐标有限元方法的麻烦和困难。本章的目的就是着重系统地讨论利用适合各自单元形式的自然坐标直接建立不同类型单元插值函数的方法。

一般说来，单元类型和形状的选择依赖于结构或总体求解域的几何特点、方程的类型及求解所希望的精度等因素，而有限元的插值函数则取决于单元的形状，结点的类型和数目等因素。

例如在图 3.1 上，一个二维域利用一系列三角形或四边形单元进行离散，即将总体求解域理想化为由很多子域（单元）所组成。

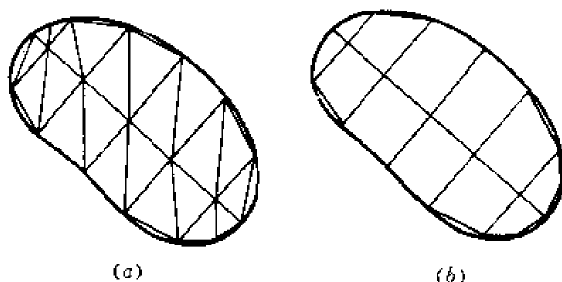


图 3.1　二维域的有限元离散
(*a*) 三角形单元 (*b*) 四边形单元

在一般情况下，总体域也可能是一维或三维的，在图 3.2 上分别给出只具有端结点或角结点的一维、二维和三维单元的几种可能形式。一维单元可以简单地是一直线，二维单元可以是三角形、矩形或四边形，三维单元可以是四面体、五面体、长方体或一般六面体。具有轴对称几何形状和轴对称物理性质的三维域能用二维单元绕对称轴旋转形成的三维环单元进行离散。

从结点参数的类型上区别、它们可以是只包含场函数的结点值，也可能同时包含场函数导数的结点值。这主要取决于单元交界面上的连续性要求，而后者又由泛函中场函数导数的最高阶次所决定。如果泛函中场函数导数的最高阶为 1 次，则单元交界面上只要求函数值保持连续，即要求单元保持 C_0 连续性。在此情况下，通常结点参数只包含场函数的结点值。如果泛函中场函数导数最高阶为 2 次，则要求场函数的一阶导数在交界面上也保持

连续，即要求单元保持 C_1 连续性，这时结点参数中必须同时包含场函数及其一阶导数的结点值。

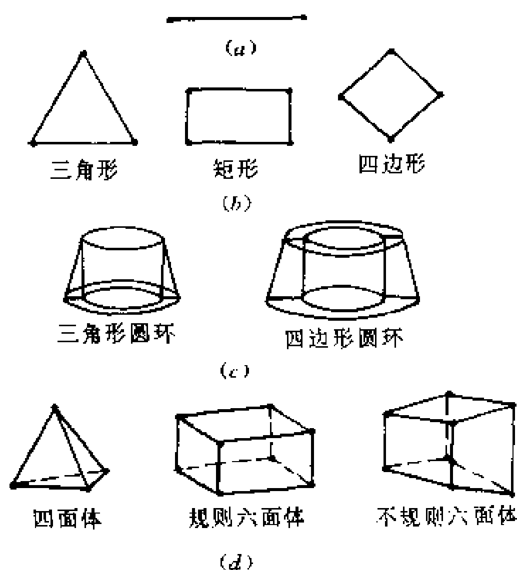


图 3.2 各种形状只有角结点的单元
(a) 一维单元 (b) 二维单元
(c) 轴对称单元 (d) 三维单元

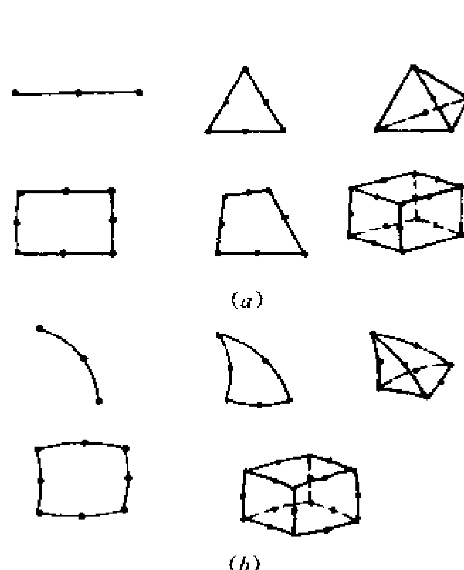


图 3.3 二次单元
(a) 直线边 (b) 曲线边

关于单元插值函数的形式，有限单元法中几乎全部采用不同阶次幂函数的多项式。这是因为它们具有便于运算和易于满足收敛性要求的优点。如果采用幂函数多项式作为单元的插值函数，对于只满足 C_0 连续性的单元（称 C_0 型单元），单元内的未知场函数的线性变化能够仅用角（或端）结点的参数表示。对于它的二次变化，则必须在角（或端）结点之间的边界上适当配置一个边内结点（如图 3.3 所示）。它的三次变化，则必须在每个边界上配置二个边内结点（如图 3.4 所示）。配置边内结点的另一原因是常常要求单元的边界是曲线的，沿边界配置适当的边内结点，从而可能构成二次或更高次多项式来描述它们。有时为使插值函数保持为一定阶次的完全多项式可能还需要在单元内部配置结点。然而这些内部结点除非是所考虑的具体情况绝对必需，否则是不希望的，因为这些结点的存在将增加表达格式和计算上的复杂性。

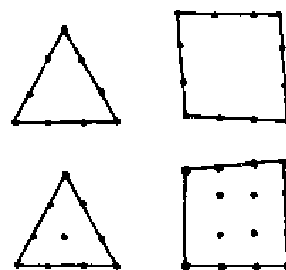


图 3.4 三次或高次单元

本章将首先通过一维单元讨论有限单元法经常使用的 Lagrange 插值函数和 Hermite 插值函数。在二维单元的讨论中着重阐述构造单元和插值函数的一般方法。在三维单元的讨论中将进一步看到应用上述方法建立各种单元的可能性。

在本章的讨论中，重点是放在一些常用的 C_0 型单元。很多适合于各种专门用途的单元暂时不准备涉及。例如 C_1 型单元将在以后结合板壳问题的有限单元法进行讨论。

另外，本章将对阶谱单元的基本概念和它的阶谱函数的构造方法作一扼要的介绍。这是考虑到阶谱单元是自适应有限元分析的组成部分。而后者是当前有限元方法发展中具

有重要理论和实际意义的问题之一。

3.2 一维单元

一维单元可以分为两类。一类是单元的结点参数中只包含场函数 ϕ 的结点值。另一类单元的结点参数中，除场函数的结点值外，还包含场函数导数 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$ 的结点值。这二类单元就是以下将讨论的 Lagrange 单元和 Hermite 单元。现对它们的一般形式进行讨论。

3.2.1 Lagrange 单元

对于具有 n 个结点的一维单元，如果它的结点参数中只含有场函数的结点值，则单元内的场函数可插值表示为

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i\phi_i \tag{3.2.1}$$

其中插值函数 $N_i(x)$ 具有下列性质

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} N_i(x) = 1 \tag{3.2.2}$$

式内 δ_{ij} 是 Kronecker dalta。

上述第一个性质是插值函数自身性质所要求。因为在(3.2.1)式的右端用结点 j 的坐标 x_j 代入，左端函数 ϕ 应取结点 j 的函数值 ϕ_j，因此必须具有 $N_i(x_j)=\delta_{ij}$ 的性质。上述第二个性质是插值函数完备性要求决定的。因为(3.2.1)式右端各个结点值 ϕ_i 取相同的常数 C，则左端的场函数 ϕ 也应等于常数 C，所以插值函数必须具有 $\sum_{i=1}^{n} N_i(x) = 1$ 的性质。当然单是这性质还不是完备性要求的全部。因为完备性还要求 C_0 型单元场函数的一阶导数应包含常数项。这点将在下一章中讨论。

关于插值函数 $N_i(x)$ 的构造，为避免繁锁的推导，不必按第 2 章中所述步骤进行，而是直接采用熟知的 Lagrange 插值多项式。对于 n 个结点的一维单元，$N_i(x)$ 可采用 $n-1$ 次 Lagrange 插值多项式 $l_i^{(n-1)}(x)$，即令

$$\begin{aligned} N_i(x) &= l_i^{(n-1)}(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \\ &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

其中 $l_i^{(n-1)}(x)$ 的上标 $(n-1)$ 表示 Lagrange 插值多项式的次数，$\prod$ 表示二项式在 j 的范围内 $(j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)$ 的乘积，n 是单元的结点数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个结点的坐标。

如果 $n=2$，函数 ϕ 的插值表示如下

$$\phi = \sum_{i=1}^{2} l_i^{(1)}(x)\phi_i \tag{3.2.4}$$

其中 $$l_1^{(1)}(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2},\ l_2^{(1)}(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

如令 $x_1=0$, $x_2=l$,则 $l_1^{(1)}(x)=1-x/l$, $l_2^{(1)}=x/l$,

如果引入无量纲坐标

$$\xi=\frac{x-x_1}{x_n-x_1}=\frac{x-x_1}{l} \tag{3.2.5}$$

其中 l 代表单元长度,则(3.2.3)式可表示为

$$l_i^{(n-1)}(\xi)=\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\xi-\xi_j}{\xi_i-\xi_j} \tag{3.2.6}$$

当 $n=2$ 时,$\xi_1=0$,$\xi_2=1$,则有

$$l_1^{(1)}=\frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}=1-\xi,\quad l_2^{(1)}=\frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}=\xi \tag{3.2.7}$$

当 $n=3$,且 $x_2=(x_1+x_3)/2$ 时,$\xi_1=0$,$\xi_2=1/2$,$\xi_3=1$,则有

$$\begin{aligned}
l_1^{(2)}&=\frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)}=2\left(\xi-\frac{1}{2}\right)(\xi-1)\\
l_2^{(2)}&=\frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)}=-4\xi(\xi-1)\\
l_3^{(2)}&=\frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)}=2\xi\left(\xi-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

如果无量纲坐标采用另一种形式

$$\xi=2\,\frac{x-x_c}{x_n-x_1}=\frac{2x-(x_1+x_n)}{x_n-x_1} \tag{3.2.9}$$

其中 $x_c=(x_1+x_n)/2$ 是单元中心的坐标,则对于 $n=2$,有

$$l_1^{(1)}=\frac{1}{2}(1-\xi),\quad l_2^{(1)}-\frac{1}{2}(1+\xi) \tag{3.2.10}$$

对于 $n=3$,且 $\xi_2=0$,有

$$l_1^{(2)}=\frac{1}{2}\xi(\xi-1),\quad l_2^{(2)}=1-\xi^2,\quad l_3^{(2)}=\frac{1}{2}\xi(\xi+1) \tag{3.2.11}$$

上述两种无量纲表示,即(3.2.5)和(3.2.9)式,都是今后常用的,在这里可称为长度坐标,更一般化的可称为自然坐标,在上述两种表示中,分别有 $0\leqslant\xi\leqslant1$,和 $-1\leqslant\xi\leqslant1$。

为今后构造其它形式的 Lagrange 单元方便,在此还可将(3.2.6)式改写成

$$N_i=l_i^{(n-1)}=\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{f_j(\xi)}{f_j(\xi_i)} \tag{3.2.12}$$

其中 $f_j(\xi)=\xi-\xi_j$ 表示任一点 ξ 至点 ξ_j 的距离,也是 j 点坐标 $\xi=\xi_j$ 表示成方程形式 $f_j(\xi)=\xi-\xi_j=0$ 的左端项。显然可见:$f_j(\xi_j)=0$。$N_i=l_i^{(n-1)}$ 的展开式中包含了除 $f_i(\xi)$ 而外的所有 $f_j(\xi)(j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)$的因子,从而保证了 $N_i(\xi_j)=0(j\neq i)$这一要求的满足。$f_j(\xi_i)=\xi_i-\xi_j$ 是点 i 的坐标代入 $f_j(\xi)$后得到的数值,这一因子引入 $l_i^{(n-1)}$ 的分母,是为了保证满足 $N_i(\xi_i)=1$ 这一要求。理解 $f_j(\xi)$和 $f_j(\xi_i)$的意义,对今后构造其他形式 Lagrange 单元的插值函数是有帮助的。

还应指出：$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\phi_i = \sum_{i=1}^{n} l_i^{(n-1)}(\xi)\phi_i$ 仍是 ξ 的 $n-1$ 次完全多项式。它的项数和结点数相同且包含常数项，这样构成的场函数模式是满足收敛准则的。特别地，如令 $\phi_i=1(i=1,2,\cdots,n)$，则可从(3.2.1)式得到

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(\xi) = \sum_{i=1}^{n} l_i^{(n-1)}(\xi) = 1$$

这是一很重要的性质，由于上式的成立，通过坐标变换将直线单元转换为曲线单元，单元的场函数仍满足收敛准则(见 4.3.2 节)。

3.2.2 Hermite 单元

如果希望在单元间的公共结点上还保持场函数导数的连续性，则结点参数中还应包含场函数导数的结点值。这时可以方便地采用 Hermite 多项式作为单元的插值函数。对于只有两个端结点的一维单元，函数 ϕ 采用 Hermite 多项式的插值表达式可写成

$$\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{2} H_i^{(0)}(\xi)\phi_i + \sum_{i=1}^{2} H_i^{(1)}(\xi)\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_i \tag{3.2.13}$$

或

$$\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi)Q_i \tag{3.2.14}$$

其中 Hermite 多项式具有以下性质

$$\left.\begin{aligned} H_i^{(0)}(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad \left.\frac{dH_i^{(0)}(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi_j} = 0 \\ H_i^{(1)}(\xi_j) = 0, \quad \left.\frac{dH_i^{(1)}(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi_j} = \delta_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.15}$$

当 $\xi_1=0$, $\xi_2=1$ 时，$H_i^{(0)}(\xi)$ 和 $H_i^{(1)}(\xi)$ 是以下形式的三次多项式(参见图 3.5)

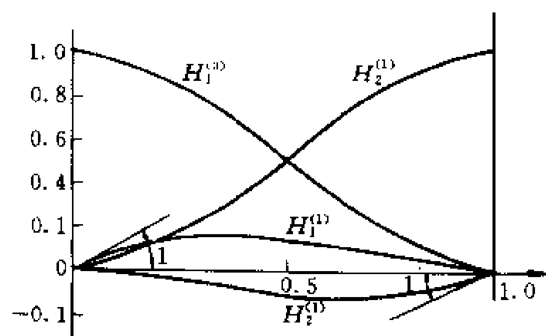


图 3.5 一阶 Hermite 插值函数

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= H_1^{(0)}(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2 &= H_2^{(0)}(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_3 &= H_1^{(1)}(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ N_4 &= H_2^{(1)}(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.16}$$

并且

$$Q_1 = \phi_1,\ Q_2 = \phi_2,\ Q_3 = \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_1,\ Q_4 = \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_2 \tag{3.2.17}$$

以上在端部结点最高保持场函数的一阶导数连续性的 Hermite 多项式称为一阶 Hermite 多项式。在两个结点的情况下，它是自变量 ξ 的三次多项式。0 阶 Hermite 多项式即 Lagrange 多项式。推而广之，在结点上保持至函数的 n 阶导数连续性的 Hermite 多项式称为 n 阶 Hermite 多项式。在两个结点的情况下，它是 ξ 的 $2n+1$ 次多项式。函数 ϕ 的二阶 Hermite 多项式插值表示是

$$\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{2} H_i^{(0)}(\xi)\phi_i + \sum_{i=1}^{2} H_i^{(1)}(\xi)\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_i + \sum_{i=1}^{2} H_i^{(2)}(\xi)\left(\frac{d^2\phi}{d\xi^2}\right)_i \tag{3.2.18}$$

或

$$\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{6} N_i Q_i$$

其中

$$N_1 = H_1^{(0)}(\xi) = 1 - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5, \qquad Q_1 = \phi_1$$

$$N_2 = H_2^{(0)}(\xi) = 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5, \qquad Q_2 = \phi_2$$

$$N_3 = H_1^{(1)}(\xi) = \xi - 6\xi^3 + 8\xi^4 - 3\xi^5, \qquad Q_3 = \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_1$$

$$N_4 = H_2^{(1)}(\xi) = -4\xi^3 + 7\xi^4 - 3\xi^5, \qquad Q_4 = \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_2$$

$$N_5 = H_1^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - 3\xi^3 + 3\xi^4 - \xi^5), \quad Q_5 = \left(\frac{d^2\phi}{d\xi^2}\right)_1$$

$$N_6 = H_2^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^3 - 2\xi^4 + \xi^5), \qquad Q_6 = \left(\frac{d^2\phi}{d\xi^2}\right)_2$$

3.3 二维单元

3.3.1 三角形单元

在第 2 章中我们已讨论了 3 结点的三角形单元。因为它对于复杂的几何形状有良好的适应性，获得了广泛的应用。

如同一维单元的情况，我们可以利用笛卡儿坐标，也可以利用无量纲的自然坐标以构造三角形单元的插值函数。利用笛卡儿坐标构造三角形单元的插值函数在第 2 章我们已讨论过，为确定插值函数中的各个系数涉及矩阵求逆的运算。对于高次单元，此运算比较麻烦，因此普遍应用自然(面积)坐标来直接构造一般三角形单元的插值函数，这时运算比较简单。

从第 2 章的讨论中已知、对于 3 结点三角形单元、引入面积坐标

$$L_i = A_i/A \qquad (i = 1,2,3) \tag{3.3.1}$$

则单元插值函数可以表示为

$$N_i = L_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{3.3.2}$$

如将由(3.2.12)式引入的对 Lagrange 插值函数各个因子的几何解释推广于现在的情况，则可以比较方便地利用面积坐标构造二次以及更高次的三角形单元。

1. 二次单元

如图 3.6 所示，二次单元有六个结点，各结点的面积坐标分别标注在括号内。参照(3.2.12)式，现将需要构造的插值函数表示成

$$N_i = \prod_{j=1}^{2} \frac{f_j^{(i)}(L_1, L_2, L_3)}{f_j^{(i)}(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})} \tag{3.3.3}$$

但其中 $f_j^{(i)}(L_1, L_2, L_3)$，$f_j^{(i)}(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})$赋与了和三角形单元相对应的几何意义。

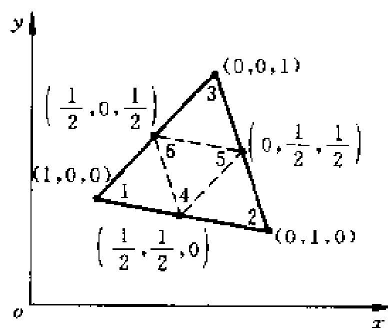


图 3.6 自然坐标三角形单元(2 次变化)

$f_j^{(i)}(L_1, L_2, L_3)$是通过除结点 i 以外所有结点的二根直线的方程 $f_j^{(i)}(L_1, L_2, L_3)=0$ 的左端项。例如当 $i=1$ 时，$f_j^{(1)}$ 分别是通过结点 4，6 的直线方程 $f_1^{(1)}(L_1, L_2, L_3)=L_1-1/2=0$ 和通过结点 2，5，3 的直线方程 $f_2^{(1)}(L_1, L_2, L_3)=L_1=0$ 的左端项。$f_j^{(i)}(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})$中的 L_{1i}，L_{2i}，L_{3i}是结点 i 的面积坐标。所以得到

$$N_1 = \frac{L_1 - 1/2}{1/2} \cdot \frac{L_1}{1} = (2L_1 - 1)L_1 \tag{3.3.4}$$

通过类似的分析步骤，可以得到

$$N_2 = \frac{L_2 - 1/2}{1/2}\frac{L_2}{1} = (2L_2 - 1)L_2,\ N_3 = \frac{L_3 - 1/2}{1/2}\frac{L_3}{1} = (2L_3 - 1)L_3,$$

$$N_4 = \frac{L_1}{1/2} \cdot \frac{L_2}{1/2} = 4L_1L_2, N_5 = \frac{L_2}{1/2} \cdot \frac{L_3}{1/2} = 4L_2L_3, N_6 = \frac{L_3}{1/2} \cdot \frac{L_1}{1/2} = 4L_3L_1 \tag{3.3.5}$$

为叙述方便，今后我们可以形象地将这种利用类似(3.3.3)式所表示的构造单元插值函数的方法称为划线法。

2. 三次单元

为保证二维域三次多项式的完备性，三次单元，应有 10 个结点，如图 3.7 所示，可根据和二次单元相同的步骤，按划线法构造它的插值函数。对于角结点

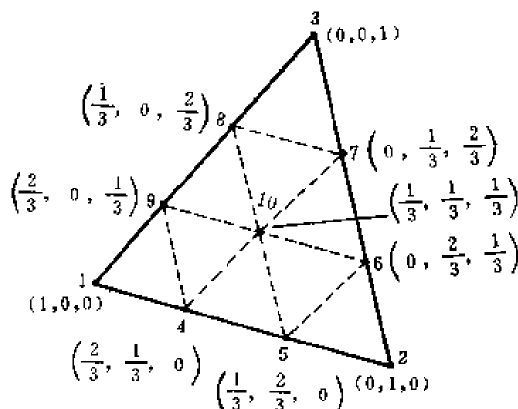


图 3.7 自然坐标三角形单元(三次变化)

$$N_i = \frac{L_i - 2/3}{1/3} \cdot \frac{L_i - 1/3}{2/3} \cdot \frac{L_i}{1} = \frac{1}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2)L_i$$

$$(i = 1,2,3) \qquad (3.3.6)$$

对于边内结点

$$N_4 = \frac{L_1}{2/3} \cdot \frac{L_2}{1/3} \cdot \frac{L_1 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$$

$$N_5 = \frac{L_1}{1/3} \cdot \frac{L_2}{2/3} \cdot \frac{L_2 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1)$$

$$N_6 = \frac{L_2}{2/3} \cdot \frac{L_3}{1/3} \cdot \frac{L_2 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1)$$

$$N_7 = \frac{L_2}{1/3} \cdot \frac{L_3}{2/3} \cdot \frac{L_3 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_8 = \frac{L_1}{1/3} \cdot \frac{L_3}{2/3} \cdot \frac{L_3 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_9 = \frac{L_1}{2/3} \cdot \frac{L_3}{1/3} \cdot \frac{L_1 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_1 - 1)$$

对于中心结点

$$N_{10} = \frac{L_1}{1/3} \cdot \frac{L_2}{1/3} \cdot \frac{L_3}{1/3} = 27L_1L_2L_3$$

如有需要，可以构造更高次的三角形单元，其步骤是：

(1) 按二维域内各次完全多项式的要求确定结点的数目(n)和位置。此要求可表示如 Pascal 三角形(如图 3.8)。例如按此要求，四次三角形结点数应为 15，并配置如图 3.9.

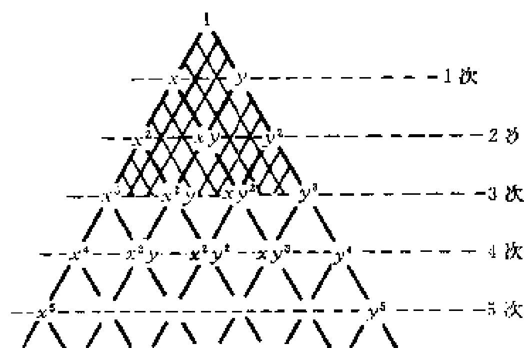


图 3.8 Pascal 三角形

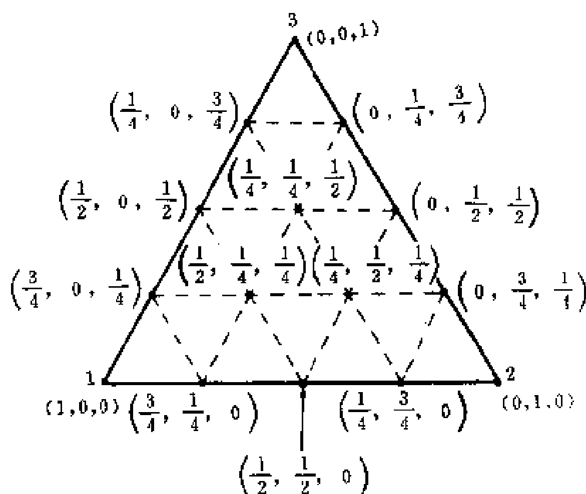


图 3.9 自然坐标三角形单元(四次变化)

(2) 按广义的 Lagrange 插值公式构造插值函数，即

$$N_i = \prod_{j=1}^{p} \frac{f_j^{(i)}(L_1, L_2, L_3)}{f_j^{(i)}(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})} \qquad (3.3.7)$$

其中 p 为插值函数的次数。显然，按上式构造的插值函数满足 $N_i(L_{1j}, L_{2j}, L_{3j}) = \delta_{ij}$这一基本要求。

另外，由于 N_i 的上述性质，以及结点的数目和配置符合 Pascal 三角形的要求，可以证明这种单元场函数是满足收敛准则的，当然 $\sum_{i=1}^{n} N_i = 1$ 这一要求也是恒被满足的。

还可指出，当引入面积坐标以后，单元矩阵经常可以表示成下列形式的积分

$$I = \int_A L_1^m L_2^n L_3^l \mathrm{d}A \tag{3.3.8}$$

而此积分可以方便地进行计算，这是三角形面积坐标单元的又一优点。

3.3.2 Lagrange 矩形单元和 Hermite 矩形单元

如果所研究问题的总体域是矩形的，采用矩形单元将比三角形单元更为有效。为了构造矩形单元的插值函数，开始总可以利用笛卡儿坐标的多项式

$$\phi = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + \cdots$$

式中所包含的项数应等于单元的结点数。但为了进一步确定上式中的系数 $a_i (i=0,1,2,\cdots)$，将涉及矩阵求逆的运算，而且在某些情况下逆矩阵并不存在，因此更经常的是利用自然坐标直接建立插值函数。方法是将一维的 Lagrange 单元和 Hermite 单元加以推广，用来构造二维的 Lagrange 矩形单元和 Hermite 矩形单元。

1. Lagrange 矩形单元

构造任意的 Lagrange 矩形单元插值函数的一个简便而系统的方法是利用二个坐标方向适当方次 Lagrange 多项式的乘积。现考虑图 3.10 所示单元，其中一系列结点布置在

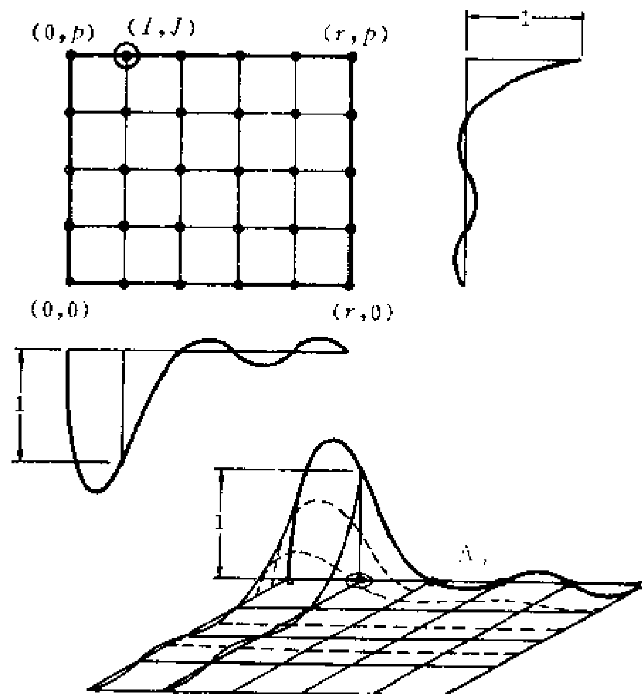


图 3.10 Lagrange 矩形单元的一个典型插值函数($r=5, p=4, I=1, J=4$)

$r+1$ 列，$p+1$ 行的规则网格上。现在需要构造和布置在 I 列 J 行结点 i(用◎表示)相应

的插值函数 N_i，我们已知 Lagrange 多项式

$$l_I^{(r)}(\xi)=\frac{(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)\cdots(\xi-\xi_{I-1})(\xi-\xi_{I+1})\cdots(\xi-\xi_r)}{(\xi_I-\xi_0)(\xi_I-\xi_1)\cdots(\xi_I-\xi_{I-1})(\xi_I-\xi_{I+1})\cdots(\xi_I-\xi_r)}$$

在第 I 列结点上等于 1，而在其它列结点上等于 0。同理

$$l_J^{(p)}(\eta)=\frac{(\eta-\eta_0)(\eta-\eta_1)\cdots(\eta-\eta_{J-1})(\eta-\eta_{J+1})\cdots(\eta-\eta_p)}{(\eta_J-\eta_0)(\eta_J-\eta_1)\cdots(\eta_J-\eta_{J-1})(\eta_J-\eta_{J+1})\cdots(\eta_J-\eta_p)}$$

在第 J 行结点上等于 1，而在其它行结点上等于 0。从以上分析可见，所需要构造的插值函数应是

$$N_i=N_{IJ}=l_I^{(r)}(\xi)l_J^{(p)}(\eta) \tag{3.3.9}$$

N_i 在结点 i 上等于 1，而在其余所有结点上等于 0。这种单元每一边界上的结点数和函数在边界上的变化是协调的。因而也保证了单元之间函数的协调性。

在图 3.11 所示为三种形式的 Lagrange 矩形单元。虽然构造它们的插值函数是很容易的，但是这种类型的单元存在一定缺点，主要是出现了随插值函数方次增高而增加的内结点，从而增加了单元的自由度数，而这些自由度的增加通常并不能提高单元的精度。如果我们考察 $r=p$ 的情况，从基于 Pascal 三角形的图 3.12 可以看出增加了很多非 r 资多项式所必要的高次项，因为单元的精度通常是由完全多项式的方次决定的，因此后面将要讨论的 Serendipity 单元在实际中得到比 Lagrange 单元更多的应用。

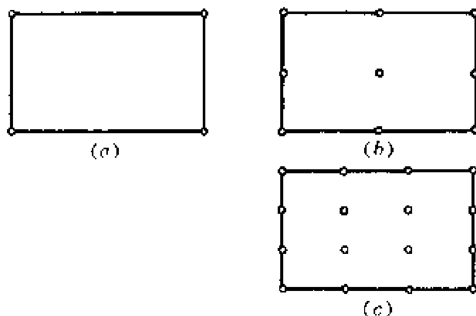


图 3.11 Lagrange 矩形单式
(a) 线性的 (b) 二次的 (c) 三次的

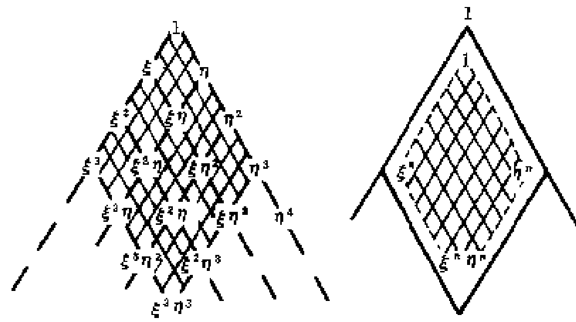


图 3.12 由 3×3(或 $n\times n$)次 Lagrange 多项式形成的多项式中的项次

2. Hermite 矩形单元

一维的 Hermite 多项式，也可以用和构造 Lagrange 单元相类似的方法，用来构造 Hermite 矩形单元的插值函数。对于双 1 阶(3 次)Hermite 多项式，可有(参看图 3.13)

$$\phi=\sum_{i=1}^{16}N_iQ_i \tag{3.3.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
N_1&=H_1^{(0)}(\xi)H_1^{(0)}(\eta), & N_2&=H_1^{(1)}(\xi)H_1^{(0)}(\eta)\\
N_3&=H_1^{(0)}(\xi)H_1^{(1)}(\eta), & N_4&=H_1^{(1)}(\xi)H_1^{(1)}(\eta)\\
N_5&=H_2^{(0)}(\xi)H_1^{(0)}(\eta), & N_6&=H_2^{(1)}(\xi)H_1^{(0)}(\eta)\\
N_7&=H_2^{(0)}(\xi)H_1^{(1)}(\eta), & N_8&=H_2^{(1)}(\xi)H_1^{(1)}(\eta)
\end{aligned}$$

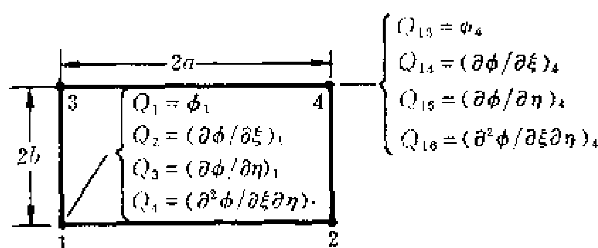


图 3.13 从1阶 Hermite 矩形单元

$$
\begin{aligned}
&N_9=H_1^{(0)}(\xi)H_2^{(0)}(\eta), \quad N_{10}=H_1^{(1)}(\xi)H_2^{(0)}(\eta)\\
&N_{11}=H_1^{(0)}(\xi)H_2^{(1)}(\eta), \quad N_{12}=H_1^{(1)}(\xi)H_2^{(1)}(\eta)\\
&N_{13}=H_2^{(0)}(\xi)H_2^{(0)}(\eta), \quad N_{14}=H_2^{(1)}(\xi)H_2^{(0)}(\eta)\\
&N_{15}=H_2^{(0)}(\xi)H_2^{(1)}(\eta), \quad N_{16}=H_2^{(1)}(\xi)H_2^{(1)}(\eta)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&Q_1=\phi_1, \quad Q_2=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_1, \quad Q_3=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_1, \quad Q_4=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\right)_1\\
&Q_5=\phi_2, \quad Q_6=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_2, \quad Q_7=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_2, \quad Q_8=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\right)_2\\
&Q_9=\phi_3, \quad Q_{10}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_3, \quad Q_{11}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_3, \quad Q_{12}=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\right)_3\\
&Q_{13}=\phi_4, \quad Q_{14}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_4, \quad Q_{15}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_4, \quad Q_{16}=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\right)_4
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&H_1^{(0)}(\xi)=1-3\xi^2+2\xi^3, \quad H_1^{(0)}(\eta)=1-3\eta^2+2\eta^3\\
&H_2^{(0)}(\xi)=3\xi^2-2\xi^3, \quad H_2^{(0)}(\eta)=3\eta^2-2\eta^3\\
&H_1^{(1)}(\xi)=\xi-2\xi^2+\xi^3, \quad H_1^{(1)}(\eta)=\eta-2\eta^2+\eta^3\\
&H_2^{(1)}(\xi)=\xi^3-\xi^2, \quad H_2^{(1)}(\eta)=\eta^3-\eta^2
\end{aligned}
$$

应该指出：由于 Hermite 矩形单元的插值函数是利用二个坐标方向的一维 Hermite 多项式的乘积而得到的，二阶混合导数的结点值也必须包含在结点参数当中。

如有需要，可以用类似的步骤得到更高阶的 Hermite 矩形单元的插值函数。

3.3.3 Serendipity 单元

结点仅配置在单元的边界上常常是人们所希望的，例如图 3.14(a)，(b)，(c)所示的三个单元，函数在边界上的变化分别是线性的、二次的和三次的。同一图(d)所示是四次的 Serendipity 单元，单元中心配置了一个结点，是为了使插值函数中的四次多项式是完全的。Serendipity 按照字的原意是意外的发现。其实，至少在构造它的插值函数时仍是有一般规律可循的。我们首先来讨论变结点数的 Serendipity 单元。一方面由于在实际应用中常希望同一单元的不同边界有不同数目的结点，这样可以实现不同阶次单元之间的过

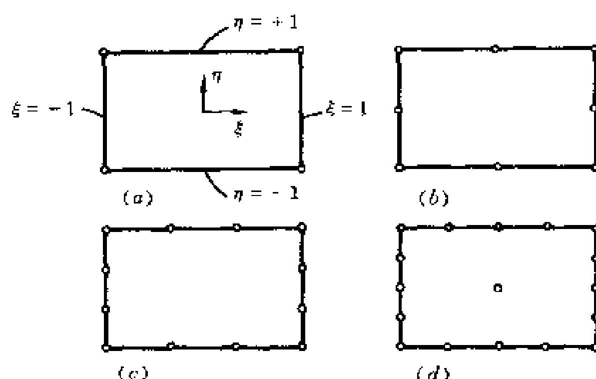


图 3.14　Serendipity 单元族

渡，从而可能在求解的不同区域采用不同精度的单元。另一方面通过它阐述构造 Serendipity 单元插值函数的一般方法。图 3.15 所示为一二次单元。假定开始只有四个角

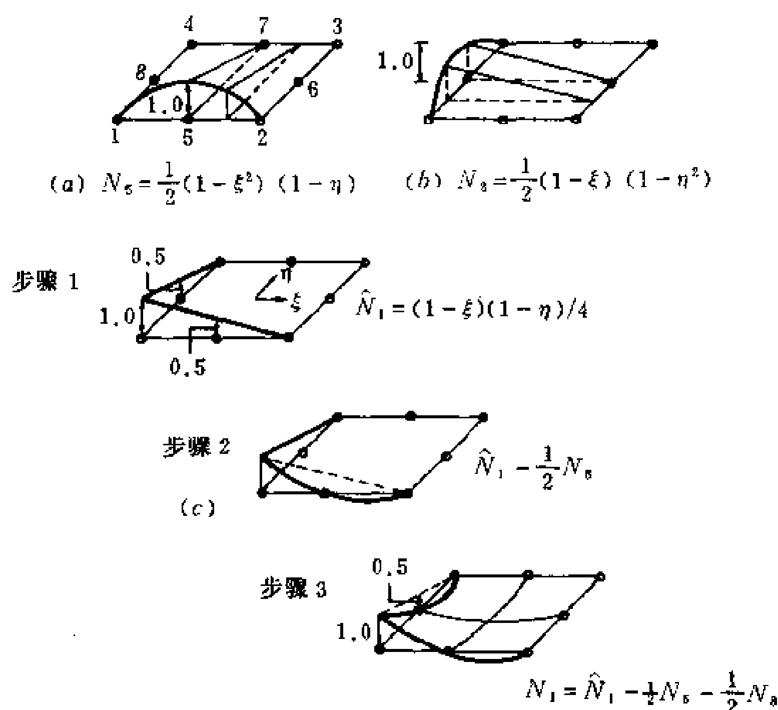


图 3.15　构造 Serendipity 单元插值函数的一般方法

结点，对应这些结点的插值函数可利用双一次 Lagrange 多项式构造，即

$$\hat{N}_i=\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)\quad(i=1,2,3,4,)\tag{3.3.11}$$

其中
$$\xi_0=\xi_i\xi,\quad \eta_0=\eta_i\eta$$

如果增加边内结点，则和它对应的插值函数可以按划线法构造，或直接表示成 ξ(或 η)方向二次和 η(或 ξ)方向一次 Lagrange 多项式的乘积。例如增加结点 5，则

$$N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\tag{3.3.12}$$

需要指出的是，对于现在5个结点的情况，N_5 满足 $N_{5j}=\delta_{5j}(j=1,2,\cdots,5)$要求，而 $\hat{N}_i$ $(i=1,2,3,4)$不再满足 $\hat{N}_{i5}=\delta_{i5}=0(i=1,2)$的要求了。为满足此要求，$\hat{N}_1,\hat{N}_2$ 需要修正为

$$N_1=\hat{N}_1-\frac{1}{2}N_5,\quad N_2=\hat{N}_2-\frac{1}{2}N_5$$

类似地，可以讨论增加边内结点 6,7,8 的情况，所以最后得到 4～8 结点单元的插值函数

$$\begin{aligned}
&N_1=\hat{N}_1-\frac{1}{2}N_5-\frac{1}{2}N_8,\quad N_2=\hat{N}_2-\frac{1}{2}N_5-\frac{1}{2}N_6\\
&N_3=\hat{N}_3-\frac{1}{2}N_6-\frac{1}{2}N_7,\quad N_4=\hat{N}_4-\frac{1}{2}N_7-\frac{1}{2}N_8\\
&N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta),\quad N_6=\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)\\
&N_7=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta),\quad N_8=\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)
\end{aligned}\tag{3.3.13}$$

（如 5,6,7,8 结点中任一个不存在，则对应的插值函数为 0）

其中

$$\hat{N}_i=\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)\quad(i=1,2,3,4)$$

$$\xi_0=\xi_i\xi,\quad \eta_0=\eta_i\eta$$

上述构造插值函数的一般化步骤，以 N_1 为例表示于图 3.15。可以证明这样构造的插值函数是满足 $N_{ij}=\delta_{ij}$和 $\sum_{i=1}^{n}N_i=1$ 这些基本要求的。

显然，对于高次的 Serendipity 单元，可用同样的方法构造它的插值函数。例如对于 p 次单元的边内结点，它的插值函数可表示成 ξ(或 η)方向 p 次和 η(或 ξ)方向一次 Lagrange多项式的乘积，而对于角结点，则其插值函数可表示成一双线性函数和用适当分数分别乘以相邻两个边界上的各个边内结点插值函数之和，以保证它在边内结点上的值也为 0。因为角结点插值函数中除双线性函数之外的附加项可随相邻边界上的边内结点的增减而变化，所以边内结点数是灵活的，这对于构造变结点数的过渡单元是很适合的。图 3.16 给出了 3 次/1 次过渡单元应用的实例。此过渡单元的插值函数，依据上述构造变结点单元插值函数的方法可以表示如下：

$$\left.\begin{aligned}
&N_1=\hat{N}_1-\frac{2}{3}N_5-\frac{1}{3}N_6\\
&N_2=\hat{N}_2-\frac{1}{3}N_5-\frac{2}{3}N_6\\
&N_3=\hat{N}_3\\
&N_4=\hat{N}_4\\
&N_5=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-3\xi)(1-\eta)\\
&N_6=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+3\xi)(1-\eta)
\end{aligned}\right\}\tag{3.3.14}$$

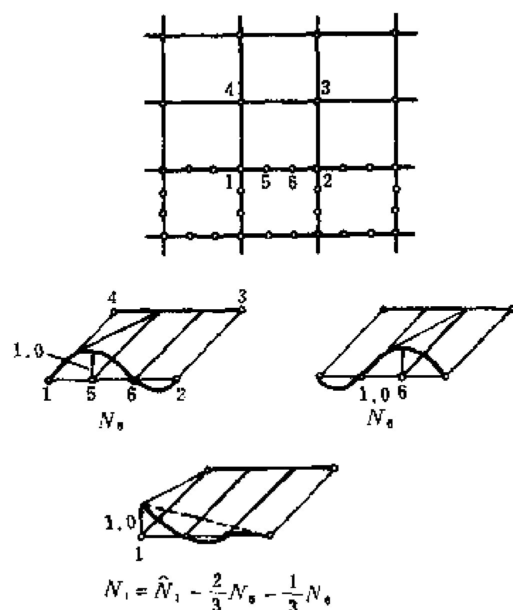


图 3.16 3次/1次过渡单元及其插值函数

其中
$$\hat{N}_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) \quad (i = 1,2,3,4)$$

分析上述构造 Serendipity 单元插值函数的区域内一般方法，可以看到只有边界结点的单元插值函数中包含的项次包含在如图 3.17 中阴影所覆盖的区域内，如果和图 3.12 所表示的各次 Lagrange 单元插值函数所包含的项次比较，显然，Serendipity 单元中完全多项式以外的高次项要少得多。但是也可看到，对于四次及其以上的 Serendipity 单元必须增加单元内部的结点，才能保持相应次多项式的完全性。

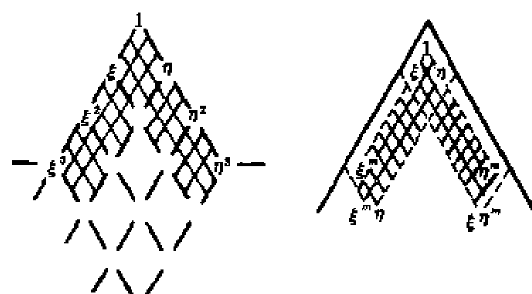


图 3.17 只有边界结点的 Serendipity 单元插值函数中的项次

关于上述构造变结点数单元插值函数的方法，我们可以指出：在实际应用中它具有更广泛的一般性，前面讨论的二维三角形单元、Lagrange 单元的插值函数也可以利用此方法进行构造。例如图 3.6 所示三角形二次单元的插值函数，利用变结点数单元的方法可以表示如下：

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_4 - \frac{1}{2}N_6 \\
N_2 &= \hat{N}_2 - \frac{1}{2}N_4 - \frac{1}{2}N_5 \\
N_3 &= \hat{N}_3 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6 \\
N_4 &= 4L_1L_2 \\
N_5 &= 4L_2L_3 \\
N_6 &= 4L_3L_1
\end{aligned}\right\} \tag{3.3.15}$$

其中 $$\hat{N}_i = L_i \quad (i = 1,2,3)$$

可以验证，上式表示的 N_1, N_2, N_3 和(3.3.4)式给出的结果是一致的。

同样，对于 Lagrange 单元，利用变结点单元的方法构造出的插值函数，和利用两个方向一维 Lagrange 插值函数相乘的方法[(3.3.9)式]得到的结果也是完全一致的，读者可以作为练习加以验证。

通过以上讨论可以看出，在构造单元插值函数的意义上，三角形单元和四边形单元，Lagrange 单元和 Serendipity 单元的差别消失了。而且这种构造单元插值函数方法可以方便地推广用于三维情况。

3.4 三维单元

三维单元可能有的几何形状比二维单元要多得多，现在只讨论几种常用的形状，又因为构造其插值函数的方法只是前节所述方法的推广，所以我们基本上只给出具体结果，而不再重复其过程。

3.4.1 四面体单元

图 3.18 表示出各次四面体单元，这种单元和二维情况的三角形单元相类似，插值函数是在三维坐标内的各次完全多项式。在各个面上的结点配置和同次的二维三角形单元相同，函数是相应二维的完全多项式，从而保证了单元之间的协调性。

根据三维四面体单元的几何特点，引进的自然坐标是体积坐标，如图 3.19 所示，单元内任一点 P 的体积坐标是

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\mathrm{vol}(P234)}{\mathrm{vol}(1234)}, \quad L_2 = \frac{\mathrm{vol}(P341)}{\mathrm{vol}(1234)} \\
L_3 &= \frac{\mathrm{vol}(P412)}{\mathrm{vol}(1234)}, \quad L_4 = \frac{\mathrm{vol}(P123)}{\mathrm{vol}(1234)}
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

且有 $$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

当引入体积坐标以后，各次四面体单元的插值函数可以仿照二维三角形单元的构造方法得到。

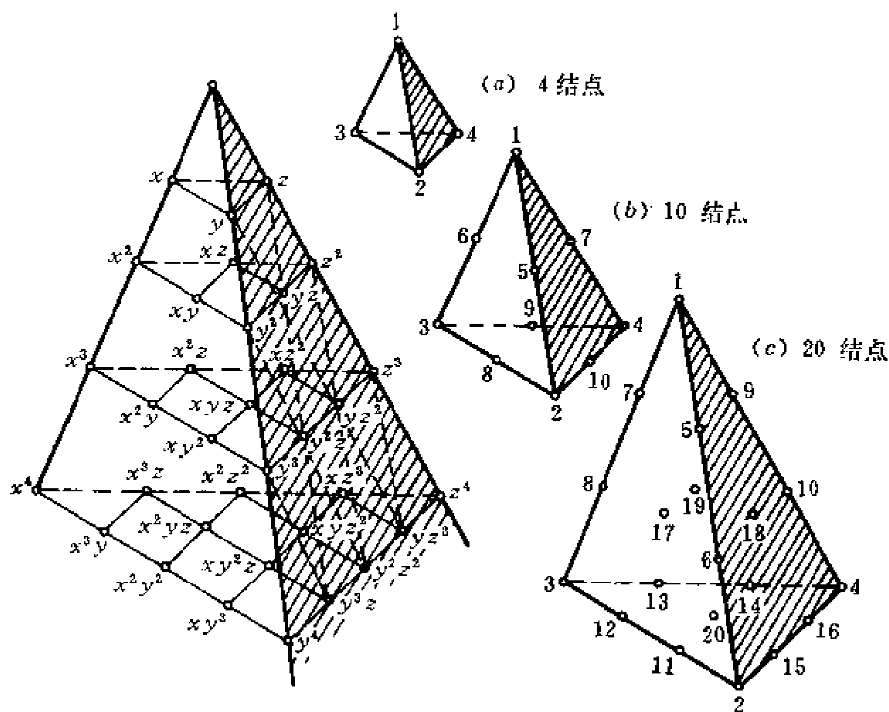


图 3.18 四面体单元

(a) 线性的 (b) 二次的 (c) 三次的

线性单元：

$$N_i = L_i \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{3.4.2}$$

二次单元：

$$\left.\begin{array}{lll} \text{角结点} & N_i = (2L_i - 1)L_i, & (i = 1,2,3,4) \\ \text{棱内结点} & N_5 = 4L_1L_2, & N_6 = 4L_1L_3 \\ & N_7 = 4L_1L_4 & N_8 = 4L_2L_3 \\ & N_9 = 4L_3L_4 & N_{10} = 4L_2L_4 \end{array}\right\} \tag{3.4.3}$$

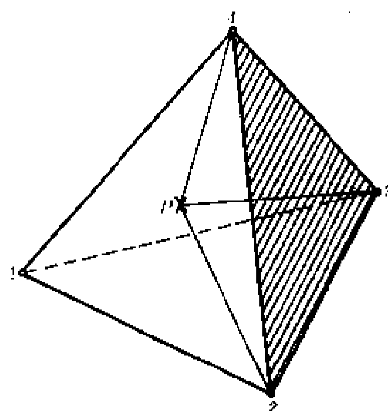


图 3.19 体积坐标

三次单元：

$$\begin{array}{ll} \text{角结点} & N_i = \frac{1}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2)L_i, \quad (i = 1,2,3,4,) \\ \text{棱内结点} & N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1) \quad \text{等} \\ \text{面内结点} & N_{17} = 27L_1L_2L_3 \quad \text{等} \end{array} \tag{3.4.4}$$

3.4.2 Serendipity 单元

图 3.20 所示的各个单元和图 3.14 所示的二维 Serendipity 单元是相当的。现在引入

三个自然坐标 ξ,η,ζ 和符号 $\xi_0=\xi_i\xi,\eta_0=\eta_i\eta,\zeta_0=\zeta_i\zeta$，则仿照二维单元插值函数构造方法可以得到三维 Serendipity 单元的插值函数。

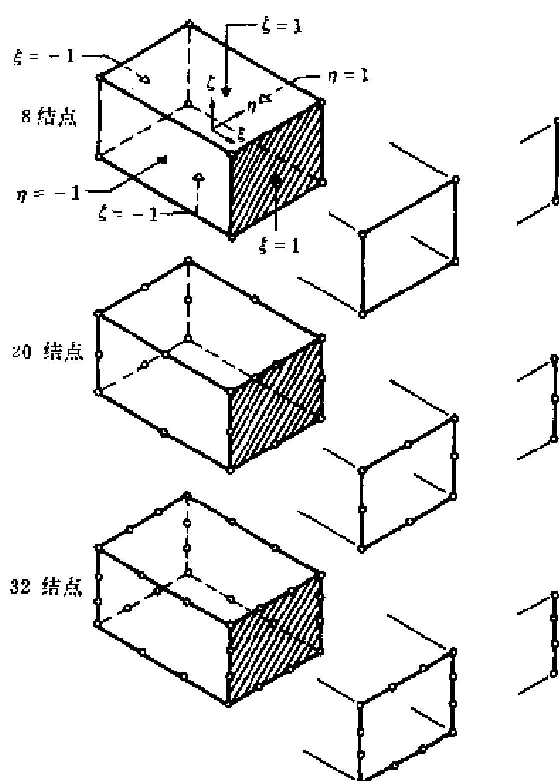


图 3.20 三维 Serendipity 单元及相应的二维和一维单元

线性单元(8 结点)：

$$N_i=\frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0) \tag{3.4.5}$$

其中 $$\xi_0=\xi_i\xi \quad \eta_0=\eta_i\eta \quad \zeta_0=\zeta_i\zeta$$

对于二次、三次单元的插值函数可以方便地利用变结点单元的方法构造，以下是给出经过整理后的结果，读者可作为练习验证其正确性。

二次单元(20 结点)：

角结点 $$N_i=\frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)(\xi_0+\eta_0+\zeta_0-2) \tag{3.4.6}$$

典型的棱内结点($\xi_i=0$, $\eta_i=\pm1$, $\zeta_i=\pm1$)

$$N_i=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$$

三次单元(32 结点)：

角结点 $$N_i=\frac{1}{64}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)[9(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-19] \tag{3.4.7}$$

典型的棱内结点 $(\xi_i=\pm\frac{1}{3},\quad \eta_i=\pm1,\quad \zeta_i=\pm1)$

$$N_i = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1+9\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$$

可以指出：在(3.4.5)—(3.4.7)式中，如令 $\zeta=\zeta_0=1$，则它们分别减缩为相应的各次二维单元的插值公式。如进一步在二维单元的各式中令 $\eta=\eta_0=1$。则它们又分别减缩为相应的各次一维单元的插值公式。所以这种形式的三维单元如和相应次的平面或线单元相连结(如图 3.20 所示)是能保证协调的。

还应指出：如果仿照二维变结点过渡单元插值函数的构造方法，同样能构造三维的变结点数的过渡单元。

3.4.3 Lagrange 单元

图 3.21 所示是三维 Lagrange 单元，它的插值函数可直接表示成三个坐标方向 Lagrange多项式的乘积，例如

$$N_i = N_{IJK} = l_I^{(n)} l_J^{(m)} l_K^{(p)} \tag{3.4.8}$$

其中 m，n，p 分别代表每一坐标方向的行列数减 1，也即每一坐标方向 Lagrange 多项式的次数，I，J，K 表示结点 i 在每一坐标方向的行列号。

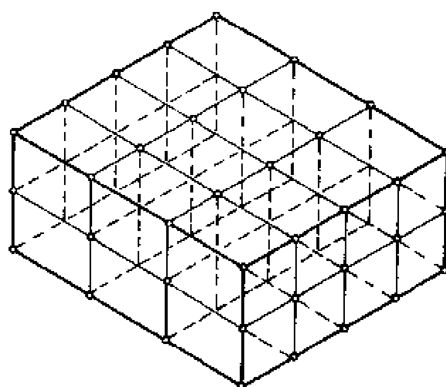


图 3.21　三维 Lagrange 单元

3.4.4 三角形棱柱单元(五面体单元)

为了更方便地离散形状复杂的三维求解域，在某些边界区域采用三角形棱柱单元常常是必要的。此单元如图 3.22 所示，依据矩形面上的结点配置特点，也可区分为 Serendipity 棱柱单元和 Lagrange 棱柱单元。这种单元的插值函数可以通过结合二维的三角形单元和 Serendipity(或 Lagrange)单元的插值函数而得到。例如对于图 3.22(b)所示的二次单元。

$$\left.\begin{aligned}
&\text{角结点} && N_1 = \frac{1}{2}L_1(2L_1-1)(1+\zeta) - \frac{1}{2}L_1(1-\zeta^2)\ \text{等}\\
&\text{三角形的边内结点} && N_{10} = 2L_1L_2(1+\zeta)\ \text{等}\\
&\text{矩形的边内结点} && N_7 = L_1(1-\zeta)\ \text{等}
\end{aligned}\right\} \tag{3.4.9}$$

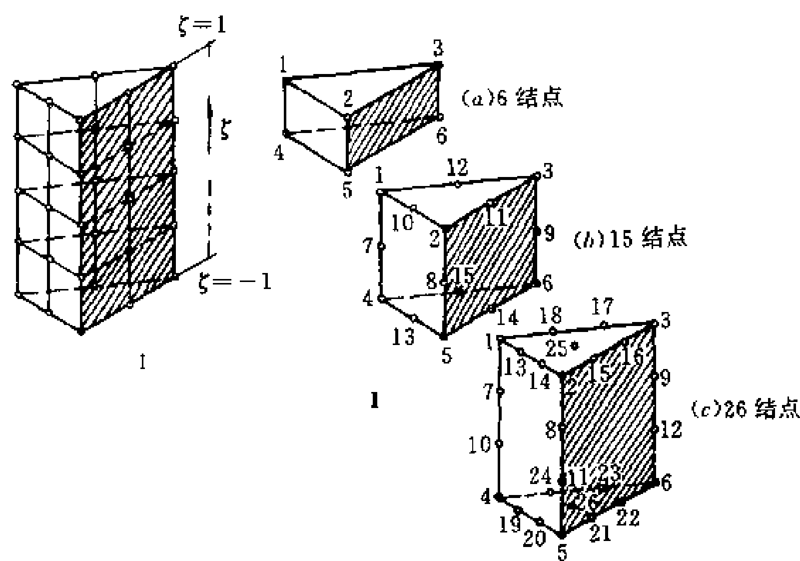


图 3.22　三角形棱柱单元

(a) 线性的 (b) 二次的 (c) 三次的

3.5　阶谱单元

3.5.1　一维阶谱单元

以前各节所讨论的 C_0 型单元，都可称之为标准型式的 C_0 型单元。它们的各个结点参数都具有相同的物理意义，也即是结点的函数值。因此单元的插值函数具有我们已熟知的性质，即每个插值函数在自己所对应的结点上等于 1，而在其他结点上等于 0；同时所有插值函数之和等于 1。但是这类单元也有一固有的缺点，即当低阶单元升为高阶单元时，低阶单元的各个插值函数也都随之变化。这将为通用程序的编制带来不便，特别是不适合用于自适应有限元的分析。因为在自适应有限元分析中，当发现利用较低阶单元对一问题进行分析的精度不满足给定的要求时，可能需要在单元网格划分不变的条件下提高单元的阶次。这时希望已形成的低阶单元的刚度等特性矩阵保持不变地仍被利用。显然如果采用的单元是标准型式的单元是不可能实现上述希望的。因为这时低阶单元的插值函数已经改变，则相应的单元刚度等特性矩阵势必重新形成。而本节所讨论的阶谱单元(hierachical element)则可以实现上述目的。

从本章第 2 节的讨论已知，一维 Lagrange 单元中，单元内场函数值可以表示成

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\phi_i \tag{3.5.1}$$

其中 ϕ_i 是结点 i 函数值，$N_i(\xi)$是对应于结点 i 的插值函数。

一维线性单元具有两个结点，即 $n=2$。这时相应的插值函数是

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi),\ N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{3.5.2}$$

当单元内增加结点 3，使之成为二次单元时，如按变结点单元插值函数构造方法，则

它的各个插值函数可以写成

$$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_3 \quad N_2 = \hat{N}_2 - \frac{1}{2}N_3 \quad N_3 = 1 - \xi^2 \tag{3.5.3}$$

其中
$$\hat{N}_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \hat{N}_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \tag{3.5.4}$$

是原线性单元的插值函数。

现将(3.5.3)(3.5.4)式代入(3.5.1)式(其中 $n=3$),并按 $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ 和 N_3 将表达式重新排列,则可以将单元内场函数表示成

$$\phi = \hat{N}_1\phi_1 + \hat{N}_2\phi_2 + N_3\left(\phi_3 - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \tag{3.5.5}$$

还可以将上式进一步改写成

$$\phi = \sum_{p=1}^{3} H_p(\xi)a_p \tag{3.5.6}$$

其中
$$\left.\begin{aligned} &H_1(\xi) = \hat{N}_1,\ H_2(\xi) = \hat{N}_2,\ H_3(\xi) = N_3 \\ &a_1 = \phi_1,\ a_2 = \phi_2,\ a_3 = \phi_3 - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{3.5.7}$$

H_1,H_2 即原来线性单元的插值函数,a_1, a_2 即原来线性单元的结点参数(结点函数值),H_3 是在结点 1,2 为 0,在结点 3 等于 1 的二次函数,a_3 不再是结点 3 的函数值,而是它和原线性单元在结点 3 函数值的差。这样一来,当单元从线性升阶为二次单元时,原线性单元的插值函数保持不变。这将意味着在进一步形成二次单元的各个特性矩阵时,原线性单元的相应部分可以保持不变地而被继续使用,从而达到节省程序编制和运算的时间。这就是阶谱单元的基本概念。

需要指出:在阶谱单元中,由于结点参数不一定都具有结点函数值的物理意义,因而原来标准型 C_0 型单元插值函数所具有的性质现在也不再保持了。例如从(3.5.7)式可见,H_1、H_2 在单元中点($\xi=0$)不再等于 0,同时 $H_1+H_2+H_3$ 也不再等于 1。正因为现在的 H_1、H_2、H_3 不再具有标准型的 C_0 型单元插值函数所具有的性质,为区别起见,今后称它们为阶谱函数,并用符号 H 表示。但是应该指出,单元的收敛性质并未改变,因为现在只是重新定义了第三个结点参数的意义为 $a_3(=\phi_3-\frac{1}{2}(\phi_1+\phi_2))$,而单元内函数 ϕ 的插值表示的实质并未改变。

需要指出的另一点是:阶谱函数 H_3 在以上的讨论中采用了 $1-\xi^2$ 的形式,但这并非唯一可能的选择。实际上只要是在结点 1、2 保持为 0 的任一二次函数都是可能的选择,当然这样一来结点参数 a_3 的意义也将相应地改变。而且在实际分析中,对结点参数的理解也不一定非要和某个结点的具体物理量相联系不可。

循上述思路继续前进,如果将一维二次单元升阶为三次单元。在标准型一维单元中,我们将增加结点 4,通常还要调整结点 3 的位置,并重新构造插值函数 N_1, N_2, N_3。而在阶谱单元中,我们保持阶谱函数 H_1, H_2, H_3 不变,当然结点 3 的位置也保持不变,只要求新增加的 H_4 是在结点 1、2 等于 0 的一个三次函数。例如将 H_4 表示成

$$H_4(\xi) = \xi(1 - \xi^2) \tag{3.5.8}$$

这时
$$H_4(-1) = H_4(1) = 0$$
并且
$$H_4(0) = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}H_4(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0} = 1$$

如将单元的函数 ϕ 用阶谱函数表示

$$\phi(\xi) = \sum_{p=1}^{4} H_p(\xi) a_p \tag{3.5.9}$$

则可识别新增加的参数 a_4 的物理意义为

$$a_4 = \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=0} - \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1) \tag{3.5.10}$$

即函数在单元中点($\xi=0$)的斜率$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=0}$和线性单元的斜率$\frac{1}{2}(\phi_2-\phi_1)$之差。此时它的物理意义就比 a_3 更加不那么明显，因此正如前面所说，对于阶谱单元的各个"结点"(其实并不一定和某个具体结点相联系)参数不一定要通过某个具体结点的物理量去理解它。

如按上述思路继续下去，我们可以构造更高阶的阶谱函数。例如

$$H_5 = \xi^2(1-\xi^2), \; H_6 = \xi^3(1-\xi^2), \cdots \tag{3.5.11}$$

不过此时与之对应的参数 a_5,a_6 的物理意义更不易识别，虽然这种识别不一定是必要的。

正如我们在前面已指出，阶谱函数的形式不是唯一的，另一种方便的形式可以表示如下：

$$H_p(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{(p-1)!}(\xi^{p-1} - 1) & (p = 3,5,\cdots) \\ \dfrac{1}{(p-1)!}(\xi^{p-1} - \xi) & (p = 4,6,\cdots) \end{cases} \tag{3.5.12}$$

从上式可以得到

$$\begin{aligned} &H_3 = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1), \quad H_4 = \frac{1}{6}(\xi^3 - \xi) \\ &H_5 = \frac{1}{24}(\xi^4 - 1), \quad H_6 = \frac{1}{120}(\xi^5 - \xi) \text{ 等} \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

和以前形式的阶谱函数相比较，H_3，H_4 只相差一系数，H_5 及其更高阶的 H_6，H_7 等则有所区别。现在的阶谱函数具有以下性质

$$\left.\frac{\mathrm{d}^j H_p}{\mathrm{d}\xi^j}\right|_{\xi=0} = \begin{cases} 0 & (j = 2,3,\cdots,p-2) \\ 1 & (j = p-1) \end{cases} \tag{3.5.14}$$

这样一来 $a_p(p\geqslant 3)$就被赋予了简单的物理意义(并非一定必要)，即

$$a_p = \left.\frac{\mathrm{d}^{p-1}\phi}{\mathrm{d}\xi^{p-1}}\right|_{\xi=0} \quad (p \geqslant 3) \tag{3.5.15}$$

从此也更便于理解，当阶谱单元用于二维、三维情况时，在单元交界面上，如有共同的参数，则自动满足了单元间 C_0 连续性的要求。

在本节开始已指出，阶谱单元的优点之一是用于自适应分析时，可以节省程序编制和计算的时间，现在再进一步加以阐述。如果问题采用二结点的线性单元进行分析，当计算结果的误差被估计不满足精度要求时，在网格保持不变的情况下，我们可以采用高阶的阶谱单元进行重分析(即提高 p 的数值，这种自适应的重分析，叫做 p 方案)。线性单元的刚

度矩阵可以表示成

$$\boldsymbol{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{3.5.16}$$

当用二次或三次单元进行重分析时，考虑到阶谱单元的特性，它们的单元刚度矩阵可以分别表示为

$$\boldsymbol{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(3)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(3)} \\ K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{3.5.17}$$

$$\boldsymbol{K}^{(4)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(3)} & K_{14}^{(4)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(4)} \\ K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(4)} \\ K_{41}^{(4)} & K_{42}^{(4)} & K_{43}^{(4)} & K_{44}^{(4)} \end{bmatrix} \tag{3.5.18}$$

从上式可见，当形成高阶单元的刚度矩阵时，低阶单元的刚度矩阵可以保持不变地被利用。并且还可根据阶谱函数形式不存在唯一性的特点，进一步考虑选择一种优化的形式，使刚度的非对角项消失(即使高低阶函数之间不耦合)，即

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad (i \neq j \text{ 且 } i \text{ 或 } j \geqslant 3) \tag{3.5.19}$$

对于一维弹性力学问题

$$K_{ij} = K_{ji} = \int_l k \frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}H_j}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}H_j}{\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}\xi \tag{3.5.20}$$

其中：k 是截面刚性系数，l 是单元长度。

上式说明，为使 $K_{ij}=K_{ji}=0$，$\frac{\mathrm{d}H_i}{\mathrm{d}\xi}$ 和 $\frac{\mathrm{d}H_j}{\mathrm{d}\xi}$ 应在 $-1\leqslant\xi\leqslant1$ 区间内满足正交性条件。我们已知 Legendre 多项式

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\xi^p} [(\xi^2 - 1)^p] \tag{3.5.21}$$

是满足此条件的一种多项式函数，因此可以通过对它的积分获得需要的阶谱函数

$$H_{p+2} = \int P_p(\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{(p-1)!2^{p-1}} \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}\xi^{p-1}} [(\xi^2 - 1)^p]$$

或

$$H_p = \int P_{p-2}(\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{(p-3)!2^{p-3}} \frac{\mathrm{d}^{p-3}}{\mathrm{d}\xi^{p-3}} [(\xi^2 - 1)^{p-2}] \tag{3.5.22}$$

从上式可以得

$$H_3 = \xi^2 - 1,\ H_4 = 2(\xi^3 - \xi) \text{ 等} \tag{3.5.23}$$

和前面得到的另一种阶谱函数(3.5.12)、(3.5.13)式比较，对于 H_3 和 H_4，两类函数也仅相差一系数，而对于 H_5 及其以后的阶谱函数两者是不同的。

从本小节的讨论可以看到，一维阶谱单元阶谱函数的构造方法是，首先利用线性插值函数构造分别与单元两端结点相联系的线性项 H_1 和 H_2。而后 H_3，H_4，H_5 等高阶阶谱函数是在两端点取 0 值并依次为二次、三次、四次等的任意函数。和一维变结点单元插值函数的构造方法相比，H_3，H_4，H_5 等的具体形式不像 N_3，N_4，N_5 等那样只有唯一的选择，而且对应的“结点”参数不一定和某个结点的具体物理量相联系；另一方面最重要的

是，当单元阶次增加时，已形成低阶阶谱函数不需要修改或重新构造。认识上述特点，可以方便或比较方便地构造二维、三维阶谱单元的阶谱函数。

3.5.2 二维、三维阶谱单元

对于图 3.23 所示二维四边形单元，1，2，3，4 是角结点，用符号"0"表示。5，6，7，8 是各边中点所在位置，用符号"‖"表示，以示和结点的区别，因为和它们相联系的"结点"参数不一定是一个，而是依赖于阶谱单元的阶次。当单元为线性单元时，阶谱函数仅有 H_1，H_2，H_3，H_4 四个，它们和双线性 Lagrange 单元相同，即

$$H_i = N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \qquad (3.5.24)$$

图 3.23 二维四边形单元

当单元升阶为类似 Serendipity 型二次单元时，阶谱函数 H_5、H_6、H_7、H_8 的构造原则是：它们应分别是在除自身所在的三个边取 0 值的二次函数，例如采取以下形式

$$\begin{aligned} H_5 &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad H_6 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2) \\ H_7 &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad H_8 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2) \end{aligned} \qquad (3.5.25)$$

如果希望构造类似于 Lagrange 型的二次单元，则再增加 H_9，它的表示式可取如下形式

$$H_9 = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta^2) \qquad (3.5.26)$$

从形式看 H_5，H_6，…，H_9 和 Serendipity 二次单元及 Lagrange 二次单元的 N_5，N_6，…，N_9相同，但现在 H_1，H_2，H_3，H_4 仍保持线性单元的形式而不必修改。如果要求单元升阶为类似 Serendipity 型或 Lagrange 型的三次或更高次单元，需要增加的阶谱函数可用类似的方法构造。正如在一维阶谱单元的讨论中所见，从二次阶谱函数开始，其形式有多种可能的选择，包括使之满足一定正交性的选择，以达到单元刚度矩阵中各个阶次之间不相耦合，从而达到计算简化的目的。例如利用(3.5.12)式给出的一维阶谱函数，我们可以构造二维 Serendipity 型的阶谱单元，它的二阶以上阶谱函数可以表示如下：

$$H_{5,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\times p!}(\xi^p-1)(1+\eta) & (p=2,4,\cdots) \\ \dfrac{1}{2\times p!}(\xi^p-\xi)(1+\eta) & (p=3,5,\cdots) \end{cases}$$

$$H_{6,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\times p!}(\eta^p-1)(1-\xi) & (p=2,4,\cdots) \\ \dfrac{1}{2\times p!}(\eta^p-\eta)(1-\xi) & (p=3,5,\cdots) \end{cases}$$

$$H_{7,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\times p!}(\xi^p-1)(1-\eta) & (p=2,4,\cdots) \\ \dfrac{1}{2\times p!}(\xi^p-\xi)(1-\eta) & (p=3,5,\cdots) \end{cases}$$

$$H_{8,p}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\times p!}(\eta^p-1)(1+\xi) & (p=2,4,\cdots)\\ \dfrac{1}{2\times p!}(\eta^p-\eta)(1+\xi) & (p=3,5,\cdots)\end{cases} \tag{3.5.26}$$

式中“p”代表阶次。当 $p=2$ 时，从上式就得到(3.5.25)式给出的二阶阶谱函数。

依据阶谱单元的基本概念以及构造阶谱函数的一般原则，不难构造出二维三角形以及三维四面体、五面体、六面体等形状的阶谱单元及其阶谱函数，这里就不一一列举。必要时读者可查阅其他文献(例如本书末页所附主要参考书目 4 的第七章)。

3.6 小　　结

本章着重讨论了标准型 C_0 单元及其插值函数的构造方法，其中包括二维三角形单元、四边形的 Lagrange 单元和 Serendipity 单元，三维四面体单元、五面体和六面体的 Lagrange单元和 Serendipity 单元。它们插值函数的构造方法都可以归纳如下：对于三角形单元和四面体单元一般可以直接利用广义的 Lagrange 插值函数法(即划线法)构造它们的插值函数；而对于四边形单元和六面体单元等一般可以利用变结点单元的方法构造它们的插值函数，即首先利用双线性或三线性 Lagrange 函数表示它们角结点的插值函数，然后根据实际结点设置的需要利用划线法构造它们边内或面内结点的插值函数，并对已形成的角结点插值函数作相应的修正。当然这种方法也可用于三角形单元和四面体单元插值函数的构造。

以上两种方法构造出的插值函数都能够满足插值函数的基本要求。即在自身的结点等于 1，而在其他结点等于 0，并且所有插值函数之和恒等于 1。

变结点单元插值函数构造方法的原理可以推广用于阶谱单元，并且更为简单。因为这时边内或面内“结点”的阶谱函数可以有不是唯一的选择，并且单元升阶时已形成的低阶阶谱函数不必修正或重新构造。

最后应该指出，本章所讨论的单元都是建立于自然坐标内的规范化的单元。在实际分析中，为适合一般几何形状的要求，通常首先需要通过坐标变换将它们变换到物理坐标(例如笛卡尔坐标、圆柱坐标等)内。变换的方法及相应的数值运算技巧将在下一章中进行讨论。

习　　题

3.1　证明一维 Lagrange 单元的插值函数满足 $\sum_{i=1}^{n} N_i = 1$ 的要求(n 是结点数)。

3.2　利用构造变结点数单元插值函数的方法，构造图 3.24 中 9 结点单元的插值函数，并和利用构造二维 Lagrange 单元插值函数方法得到的结果进行比较。

3.3　利用构造变结点数单元插值函数的方法，构造图 3.25 所示三次三角形单元的插值函数，并和(3.3.5)式的结果进行比较。

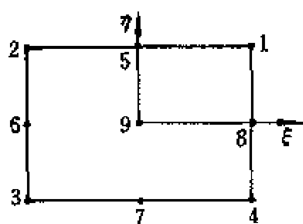


图 3.24

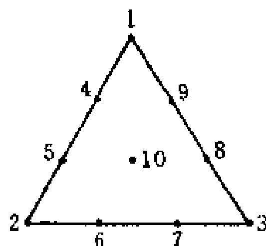


图 3.25

3.4 利用构造变结点单元插值函数的方法、构造图 3.22(*b*)所示五面体单元的插值函数，并验证它们是否符合插值函数的性质。

3.5 在(−1, 1)区域内构造 1 阶 Hermite 单元的插值函数，并讨论所构造函数的性质。

3.6 有一物理问题的方程是$\frac{d^2\phi}{dx^2}-\phi=0$，端点条件是：$\phi=0$，在 $x=0$；$\phi=1$ 在 $x=1$。现在用标准型和阶谱型的线性和二次单元求解，导出它们的单元刚度矩阵，并比较二类单元的特点。

第4章 等参单元和数值积分

4.1 引 言

前一章讨论了经常应用的一些单元形式,从中可以看到,随着单元结点数目的增加,插值函数的方次也增加了,因而用于实际问题的分析时、可能达到的精度也随之提高了。对于一个给定问题的求解域,预期用较少的单元即可获得需要精度的解答。但是用较少的形状规则的单元离散几何形状比较复杂的求解域常会遇到困难,因此需要寻找适当的方法将上一章讨论的规则形状的单元转化为其边界为曲线或曲面的相应单元。在有限单元法中最普遍采用的变换方法是等参变换,即单元几何形状的变换和单元内的场函数采用相同数目的结点参数及相同的插值函数进行变换。采用等参变换的单元称之为等参单元。借助于等参单元可以对于一般的任意几何形状的工程问题和物理问题方便地进行有限元离散,因此,等参单元的提出为有限单元法成为现代工程实际领域最有效的数值分析方法迈出了极为重要的一步。

由于等参变换的采用使等参单元的刚度、质量、阻尼、载荷等特性矩阵的计算仍在上一章所表示单元的规则域内进行,因此不管各个积分形式的矩阵的被积函数如何复杂,都可以方便地采用标准化的数值积分方法计算,从而使各类不同工程实际问题的有限元分析纳入了统一的通用化的程序。

本章第2,3,4节依次讨论等参变换的概念和单元矩阵的变换、等参变换实现的条件和等参单元的收敛性条件、等参元用于分析弹性力学问题的一般格式。第5,6节讨论数值积分的方法及计算等参元刚度矩阵时数值积分阶次的选择。

4.2 等参变换的概念和单元矩阵的变换

4.2.1 等参变换

为将局部(自然)坐标中几何形状规则的单元转换成总体(笛卡尔)坐标中几何形状扭曲的单元,以满足对一般形状求解域进行离散化的需要,要建立一个坐标变换

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f\left(\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}\right) \text{或} f\left(\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}\right) \tag{4.2.1}$$

图4.1和图4.2所示就是这种变换的某些例子。

为建立前面所述的变换,最方便的方法是将(4.2.1)式也表示成插值函数的形式

$$x = \sum_{i=1}^{m} N'_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{m} N'_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^{m} N'_i z_i \tag{4.2.2}$$

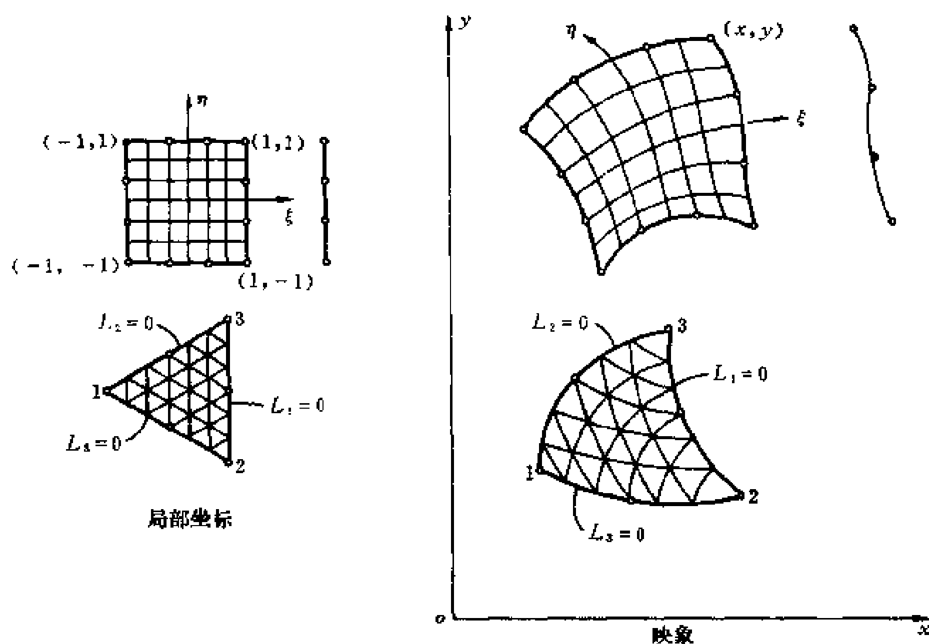


图 4.1　某些二维单元的变换

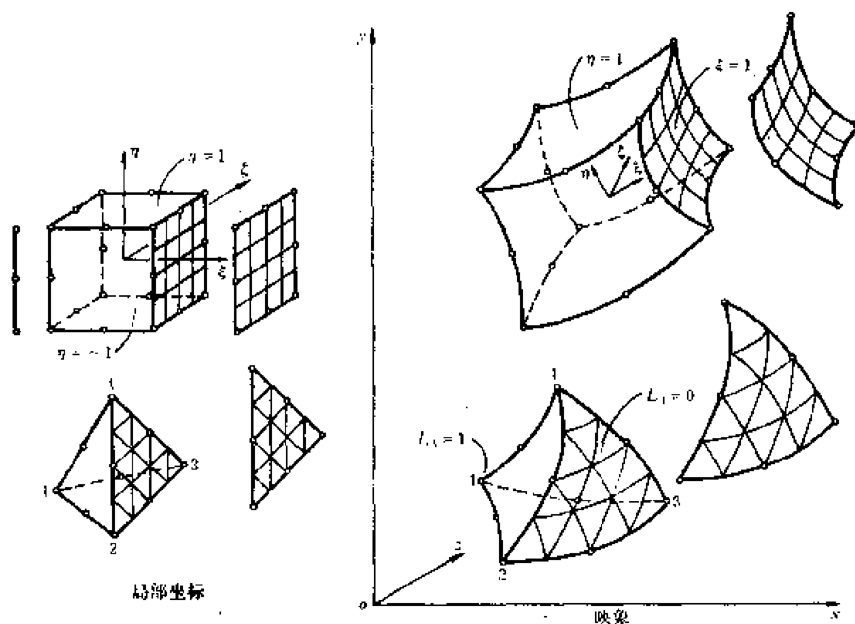


图 4.2　某些三维单元的变换

其中 m 是用以进行坐标变换的单元结点数，x_i, y_i, z_i 是这些结点在总体（笛卡儿）坐标内的坐标值，N_i' 称为形状函数，实际上它也是用局部（自然）坐标表示的插值函数。

通过上式建立起两个坐标系之间的变换，从而将自然坐标内的形状规则的单元（母单元）变换为笛卡儿坐标内的形状扭曲的单元（子单元）。

我们还可以看到坐标变换关系式（4.2.2）和函数的插值表示式：$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i \phi_i$ 在形式

上是相同的。如果坐标变换和函数插值采用相同的结点，并且采用相同的插值函数，即 $m=n, N_i'=N_i$，则称这种变换为等参变换。如果坐标变换结点数多于函数插值的结点数，即 $m>n$ 则称为超参变换。反之，$m<n$，则称为次(亚)参变换。

4.2.2 单元矩阵的变换

在有限元分析中，为建立求解方程，需要进行各个单元体积内和面积内的积分，它们的一般形式可表示为

$$\int_{V_e} G\mathrm{d}V = \iiint_{V_e} G(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4.2.3}$$

和

$$\int_{S_e} g\mathrm{d}S = \iint_{S_e} g(x,y,z)\mathrm{d}S \tag{4.2.4}$$

而 G 和 g 中还常包含着场函数对于总体坐标 x,y,z 的导数。

由于在现在的情况下，场函数是用自然坐标表述的，又因为在自然坐标内的积分限是规格化的，因此我们希望能在自然坐标内并按规格化的数值积分方法进行上述积分。为此需要建立两个坐标系内导数、体积微元、面积微元之间的变换关系。

1. 导数之间的变换

按照通常的偏微分规则，函数 N_i 对 ξ 的偏导数可表示成

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

对于其它两个坐标(η,ζ)，可写出类似的表达式，将它们集合成矩阵形式，则有

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{4.2.5}$$

上式中 $\boldsymbol{J}$ 称为 Jacobi 矩阵，可记作 $\partial(x,y,z)/\partial(\xi,\eta,\zeta)$，利用(4.2.2)式，$\boldsymbol{J}$ 可以显式地表示为自然坐标的函数

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi}x_i & \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi}y_i & \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi}z_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta}x_i & \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta}y_i & \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta}z_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta}x_i & \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta}y_i & \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta}z_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1'}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2'}{\partial \xi} & \cdots & \dfrac{\partial N_m'}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1'}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2'}{\partial \eta} & \cdots & \dfrac{\partial N_m'}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_1'}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial N_2'}{\partial \zeta} & \cdots & \dfrac{\partial N_m'}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & y_m & z_m \end{bmatrix} \tag{4.2.6}$$

这样一来，N_i 对于 x,y,z 的偏导数可用自然坐标显式地表示为

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{4.2.7}$$

其中 $\boldsymbol{J}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{J}$ 的逆矩阵，它可按下式计算得到

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{J}|}\boldsymbol{J}^{*} \tag{4.2.8}$$

$|\boldsymbol{J}|$ 是 $\boldsymbol{J}$ 的行列式，称为 Jacobi 行列式，$\boldsymbol{J}^{*}$ 是 $\boldsymbol{J}$ 的伴随矩阵，它的元素 J_{ij}^{*} 是 $\boldsymbol{J}$ 的元素 J_{ji} 的代数余子式。

2. 体积微元、面积微元的变换

从图 4.2 可以看到 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$ 在笛卡儿坐标系内所形成的体积微元是

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}) \tag{4.2.9}$$

而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi \boldsymbol{k} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \boldsymbol{k} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} &= \frac{\partial x}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是笛卡儿坐标 x，y 和 z 方向的单位向量。将(4.2.10)式代入(4.2.9)式，得到

$$\mathrm{d}V = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta = |\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \tag{4.2.11}$$

关于面积微元，例如在 ξ=常数(c)的面上

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= |\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}|_{\xi=c} \\ &= \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta = A\mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

其他面上的 $\mathrm{d}A$ 可以通过轮换 ξ,η,ζ 而得到。

在有了以上几种坐标变换时的关系式以后，积分(4.2.3)和(4.2.4)式最终可以变换到自然坐标系的规则化域内进行，它们可分别表示成

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G^{*}(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \tag{4.2.13}$$

和
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g^*(c,\eta,\zeta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \text{ 等} \tag{4.2.14}$$
$$(\xi = \pm 1 \text{ 的面上}, c = \pm 1)$$

其中
$$G^*(\xi,\eta,\zeta) = G(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta))|\boldsymbol{J}|$$
$$g^*(c,\eta,\zeta) = g(x(c,\eta,\zeta), y(c,\eta,\zeta), z(c,\eta,\zeta))A$$

对于二维情况，以上各式将相应蜕化，这时 Jacobi 矩阵是

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1'}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2'}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_m'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1'}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2'}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_m'}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \end{bmatrix} \tag{4.2.15}$$

二个坐标之间的偏导数关系是

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{4.2.16}$$

$\mathrm{d}\xi$ 和 $\mathrm{d}\eta$ 在笛卡儿坐标内形成的面积微元是

$$\mathrm{d}A = |\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4.2.17}$$

$\xi=c$ 的曲线上，$\mathrm{d}\eta$ 在笛卡儿坐标内的线段微元的长度是

$$\mathrm{d}s = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}\eta = s\mathrm{d}\eta \tag{4.2.18}$$

3. 面积(或体积)坐标与笛卡儿坐标之间的变换

以上关于 $\boldsymbol{J}$, $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}A$, $\mathrm{d}s$ 等的公式原则上对于任何坐标和笛卡儿坐标之间的变换都是适用的，但是当自然坐标是面积或体积坐标时要注意两点：

(1) 面积或体积坐标都不是完全独立的，分别存在关系式：$L_1+L_2+L_3=1$, $L_1+L_2+L_3+L_4=1$。因此可以重新定义新的自然坐标，例如对于三维情况，可令

$$\xi = L_1, \eta = L_2, \zeta = L_3 \tag{4.2.19}$$

且有
$$1 - \xi - \eta - \zeta = L_4$$

这样一来，(4.2.5)—(4.2.12)式形式上都保持不变，N_i 也仍保持它的原来形式，只是它对 ξ,η,ζ 的导数应作如下替换，

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_4}\frac{\partial L_4}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_3} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

对于二维情况，则因为可令

$$\xi = L_1, \quad \eta = L_2, \quad 1 - \xi - \eta = L_3 \tag{4.2.21}$$

所以

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \qquad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \tag{4.2.22}$$

(2) (4.2.13)，(4.2.14)等式的积分限应根据体积坐标和面积坐标特点，作必要的改变，这样一来，上述各式将成为

$$\int_0^1\int_0^{1-L_2}\int_0^{1-L_2-L_3} G^*(L_1,L_2,L_3)\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_3 \tag{4.2.23}$$

和

$$\int_0^1\int_0^{1-L_3} g^*(0,L_2,L_3)\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_3 \text{ 等} \tag{4.2.24}$$

(4.2.24)式用于 $L_1=0$ 的表面，类似地可以得到用于 $L_2=0$，$L_3=0$ 和 $L_4=0$ 表面的表达式。应注意的是，由于 L_4 可以不以显式出现，对于 $L_4=0$ 面上的积分，可以表示成

$$\int_0^1\int_0^{1-L_3} g^*(1-L_2-L_3,L_2,L_3)\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_3 \tag{4.2.25}$$

4.3 等参变换的条件和等参单元的收敛性

4.3.1 等参变换的条件

从微积分学知识已知，两个坐标之间一对一变换的条件是 Jacobi 行列式 $|\boldsymbol{J}|$ 不得为 0，等参变换作为一种坐标变换也必须服从此条件。这点从上小节各个关系式中的意义也清楚看出。首先从(4.2.11)和(4.2.17)式可见，如 $|\boldsymbol{J}|=0$，则表明笛卡儿坐标中体积微元(或面积微元)为 0，即在自然坐标中的体积微元 $\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$(或面积微元 $\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$)对应笛卡儿坐标中的一个点，这种变换显然不是一一对应的。另外因为 $|\boldsymbol{J}|=0$，$\boldsymbol{J}^{-1}$ 将不成立，所以两个坐标之间偏导数的变换(4.2.7)和(4.2.16)式就不可能实现。

现在着重研究在有限元分析的实际中如何防止出现 $|\boldsymbol{J}|=0$ 的情况。为简单起见，先讨论二维情况，从(4.2.17)式已知 $\mathrm{d}A=|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$，另方面笛卡儿坐标中的面积微元可直接表示成

$$\mathrm{d}A = |\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}| = |\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|\ |\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|\sin(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}\boldsymbol{\eta})^* \tag{4.3.1}$$

所以从上式和(4.2.17)式可得

$$|\boldsymbol{J}| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|\ |\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|\ \sin(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}\boldsymbol{\eta})}{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta} \tag{4.3.2}$$

从上式可见，只要以下三种情况之一成立，即

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}| = 0, \quad \text{或 } |\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}| = 0, \quad \text{或 } \sin(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}) = 0 \tag{4.3.3}$$

就将出现 $|\boldsymbol{J}|=0$ 的情况，因此在笛卡儿坐标内划分单元时，要注意防止以上所列举情况的发生。图 4.3(*a*)所示单元是正常情况，而(*b*)～(*d*)都属于应防止出现的不正常情况。(*b*)所示单元结点 3，4 退化为一个结点，在该点 $|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|=0$，(*c*)所示单元结点 2，3 退化为一个结点，在该点 $|\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|=0$，(*d*)所示单元在结点 1，2，3，$\sin(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}\boldsymbol{\eta})>0$，而在结点 4，$\sin(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}\boldsymbol{\eta})<0$。因为 $\sin(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}\boldsymbol{\eta})$ 在单元内连续变化，所以单元内肯定存在 $\sin(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}\boldsymbol{\eta})=0$，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$

* $|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\times\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|$ 表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\times\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$ 的模；$|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|$，$|\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}|$ 表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$ 的长度。

和 $d\eta$ 共线的情况。这是由于单元过分歪曲而发生的。

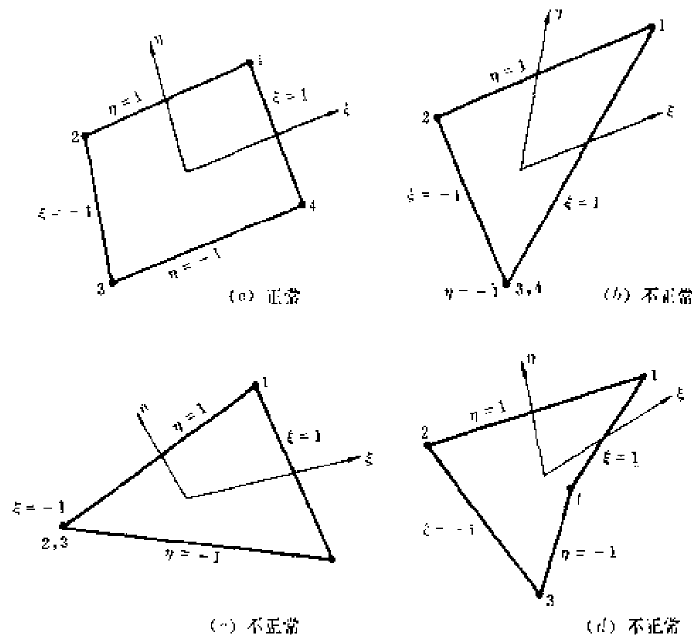


图 4.3　单元划分的正常与不正常情况

以上讨论可以推广到三维情况，即为保证变换的一一对应，应防止因任意的二个结点退化为一个结点而导致 $|d\boldsymbol{\xi}|$，$|d\boldsymbol{\eta}|$，$|d\boldsymbol{\zeta}|$ 中的任一个为 0，还应防止因单元过分歪曲而导致的 $d\boldsymbol{\xi}$，$d\boldsymbol{\eta}$，$d\boldsymbol{\zeta}$ 中的任何二个发生共线的情况。

4.3.2　等参单元的收敛性

在 2.4 节我们已讨论了有限元分析中解的收敛性条件，即单元必须是协调的和完备的。现在来讨论等参元是否满足此条件。

为研究单元集合体的协调性，需要考虑单元之间的公共边(或面)。为了保证协调，相邻单元在这些公共边(或面)上应有完全相同的结点，同时每一单元沿这些边(或面)的坐标和未知函数应采用相同的插值函数加以确定。显然，只要适当划分网格和选择单元，等参元是完全能满足协调性条件的。图 4.4(a)所示正是这种情况，而(b)所示是不满足协调性条件的。

关于单元的完全性，对于 C_0 型单元，要求插值函数中包含完全的线性项(即一次完全多项式)。这样的单元可以表现函数及其一次导数为常数的情况。显然，本章讨论的所有单元在自然坐标中是满足此要求的。现在要研究经等参变换后，在笛卡儿坐标中此要求是否仍然满足。

现考查一个三维等参单元，坐标和函数的插值表示是

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^{n} N_i z_i \tag{4.3.4}$$

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i \phi_i \tag{4.3.5}$$

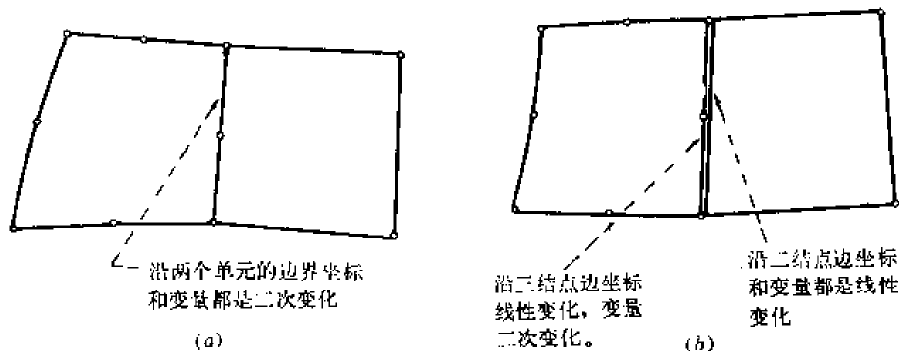


图 4.4 单元交界面上变量协调和不协调的情况
(a) 变量协调 (b) 变量不协调

现给各个结点参数以和线性变化场函数

$$\phi = a + bx + cy + dz \tag{4.3.6}$$

相对应的数值，即

$$\phi_i = a + bx_i + cy_i + dz_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.3.7}$$

将上式代入(4.3.5)式并利用(4.3.4)式，就得到单元内的函数表示式

$$\phi = a\sum_{i=1}^{n} N_i + bx + cy + dz \tag{4.3.8}$$

从上式可以看到，如果插值函数满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = 1 \tag{4.3.9}$$

则(4.3.8)式和(4.3.6)式完全一致，说明在单元内确实得到了原来给予各个结点的线性变化的场函数，即单元能够表示线性变化的场函数，亦即满足完备性要求。

我们知道在构造插值函数时，条件(4.3.9)是确实满足了的。由此还可进一步看到等参元的好处，在母单元内只要满足条件(4.3.9)，则子单元可以满足更严格的完备性要求。

如果单元不是等参的，即坐标插值表示式(4.2.2)式中的结点数 m 和插值函数 N'_i 各自不等于函数插值表示式：$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i\phi_i$ 中的结点数 n 和插值函数 N_i，这时可分为两种情况。

(1) 超参单元，即 $m>n$，单元完备性要求通常是不满足的。

(2) 次参单元，即 $m<n$，这时从 3.3 节关于构造变结点单元插值函数的一般方法可以推知存在下列关系式：

$$N'_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}N_j, \quad x_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij}x_i \tag{4.3.10}$$

其中 C_{ij}是常系数。利用上式和(4.2.2)式，(4.3.6)式可变换成

$$\begin{aligned}\phi &= a\sum_{i=1}^{n} N_i + b\sum_{i=1}^{m} N'_i x_i + c\sum_{i=1}^{m} N'_i y_i + d\sum_{i=1}^{m} N'_i z_i \\ &= a\sum_{i=1}^{n} N_i + bx + cy + dz \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

这样就得到和(4.3.8)式同样的结果，也就是说只要 $\sum_{i=1}^{n} N_i = 1$ 条件得到满足，则次参单元满足完备性要求，而 $\sum_{i=1}^{n} N_i = 1$ 在构造插值函数时已得到保证。

4.4 等参元用于分析弹性力学问题的一般格式

等参元通常也以位移作为基本未知量，因此在2.3节中用最小位能原理变分得到的有限元一般格式对等参元同样适用。差别在于等参元的插值函数是用自然坐标给出的，等参元的一切计算都是在自然坐标系中规则的母单元内进行，因此只要用4.2.2节中有关的转换公式对2.3节中的一般格式作一定的修正即可得到等参元的一般格式。

系统方程仍是 $\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{K}=\sum_{e}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{e}\boldsymbol{G}$；$\boldsymbol{P}=\sum_{e}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{e}$。计算单元矩阵只需作两方面的修改：积分变量（取自然坐标）及积分限。下面以三维单元为例，讨论单元矩阵计算公式，采用两种不同的自然坐标系。

1. 母单元为 ξ,η,ζ 坐标系中的立方体单元系列。可以是8结点的一次单元、20结点的二次单元等。自然坐标有

$$-1\leqslant\xi\leqslant1,\quad -1\leqslant\eta\leqslant1,\quad -1\leqslant\zeta\leqslant1$$

单元矩阵计算时，可将(2.3.12)式以及(2.3.14)式中的 $\mathrm{d}V$ 及 $\mathrm{d}S$ 用(4.2.11)式及(4.2.12)式代入并确定积分上下界即可得到

$$\boldsymbol{K}^{e}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.4.1}$$

$$\boldsymbol{P}_{f}^{e}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.4.2}$$

$$\boldsymbol{P}_{S}^{e}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}A\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\,(T\text{ 作用在 }\xi=1\text{ 的面}) \tag{4.4.3}$$

$$\boldsymbol{P}_{\sigma_0}^{e}=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_0\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.4.4}$$

$$\boldsymbol{P}_{\epsilon_0}^{e}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.4.5}$$

其中

$$|\boldsymbol{J}|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial z}{\partial\xi}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta} & \dfrac{\partial z}{\partial\eta}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial\zeta}\end{vmatrix} \tag{4.4.6}$$

$$A=\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\zeta}-\frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\zeta}-\frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\zeta}-\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.4.7}$$

在求作用于 $\eta=1$ 或 $\zeta=1$ 面上的面载荷引起的等效结点载荷时，只需将(4.4.3)式中的积分变量作相应的变化并将(4.4.7)式的 A 作坐标轮换即可。

2. 母单元为四面锥的单元系列，如一次 4 结点单元、二次 10 结点单元等，自然坐标取体积坐标 L_1,L_2,L_3,L_4，因为它们不完全独立，如令

$$\xi = L_1, \qquad \eta = L_2, \qquad \zeta = L_3$$

则有

$$1-\xi-\eta-\zeta = L_4$$

对于(4.4.1)～(4.4.5)式可以改写成如下形式

$$\boldsymbol{K}^e = \int_0^1\int_0^{1-L_3}\int_0^{1-L_2-L_3}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_3 \tag{4.4.8}$$

$$\boldsymbol{P}_f^e = \int_0^1\int_0^{1-L_3}\int_0^{1-L_2-L_3}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_3 \tag{4.4.9}$$

$$\boldsymbol{P}_c^e = \int_0^1\int_0^{1-L_3}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}A\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_3 \tag{4.4.10}$$

($\boldsymbol{T}$ 作用在 $L_1=0$ 的面)

……………

在上述计算中，计算应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 需要用到 Jacobi 矩阵的逆矩阵，将插值函数对总体坐标的求导转化为对自然坐标求导。

对于二维问题只要将以上二组公式退化即可以得到母单元为正方形系列以及三角形系列的二维等参元的相应公式。

对于以上各积分式表示的单元矩阵和向量，只有对于少数规则形状的单元，积分可以解析地积出。对于三维单元、矩阵和向量可以解析积分的是棱边为直线的四面体单元、平行六面体单元以及上下底面为全等且平行的三角形组成的五面体单元。对于二维单元、可解析积分的是周边为直线的三角形单元和平行四边形单元。因为这些在棱边或周边上无边内结点或有等距分布边内结点的情况下，Jacobi 矩阵是常数矩阵，当然相应的 Jacobi 行列式 $|\boldsymbol{J}|$ 和 A 等尺度转换参数也是常数。这里给出面(体)积坐标的幂函数的常用积分公式。

在某一棱(周)边(例如 ij 边)上的积分公式：

$$\int_l L_i^a L_j^b \mathrm{d}l = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}l \tag{4.4.11}$$

在某一三角形(例如 ijk)全面积上的积分公式

$$\int_A L_i^a L_j^b L_k^c \mathrm{d}A = \frac{2a!b!c!}{(a+b+c+2)!}A \tag{4.4.12}$$

在四面体($ijkm$)全体积上的积分公式

$$\int_V L_i^a L_j^b L_k^c L_m^d \mathrm{d}V = \frac{6a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!}V \tag{4.4.13}$$

由于子单元形状复杂多变，因此在通常情况下 $\boldsymbol{J}$ 及 $|\boldsymbol{J}|$ 都比较复杂，在单元矩阵的计算中，尽管采用了自然坐标后积分限规格化了，但是除了上述少数较简单的情况外，一般都不能进行显式积分而需求助于数值积分。计算单元特性矩阵一般采用高斯数值积分，例如单元刚度矩阵，数值积分形式可以表示为

$$K^e \approx \widetilde{K}^e = \sum_{i=1}^{n_g} H_i B_i^T D B_i |J_i| \tag{4.4.14}$$

其中 H_i 是权系数，n_g 是高斯积分点的点数，B_i，$|J_i|$ 等是 B，$|J|$ 等在高斯积分点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取值。

4.5 数值积分方法

4.5.1 一维数值积分

首先讨论一维问题的数值积分 $\int_a^b F(\xi)\mathrm{d}\xi$，其基本思想是：构造一个多项式 $\psi(\xi)$，使在 $\xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 上有 $\psi(\xi_i) = F(\xi_i)$，然后用近似函数 $\psi(\xi)$ 的积分 $\int_a^b \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 来近似原被积函数 $F(\xi)$ 的积分 $\int_a^b F(\xi)\mathrm{d}\xi$。$\xi_i$ 称为积分点或取样点。积分点 ξ_i 的数目和位置决定了 $\psi(\xi)$ 近似 $F(\xi)$ 的程度，因而也就决定了数值积分的精度。

对于 n 个积分点，按照积分点位置的不同选择，通常采用两种不同的数值积分方案，即 Newton-Cotes 积分方案和高斯积分方案。

1. Newton-Cotes 积分

在这种积分方案中，包括积分域端点在内的积分点按等间距分布。

对于 n 个积分点(或称取样点)，根据积分点上的被积函数值 $F(\xi_i)$ 可以构造一个近似多项式 $\psi(\xi)$，使在积分点上有

$$\psi(\xi_i) = F(\xi_i) \qquad (i, = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.5.1}$$

这个近似多项式可以通过 Lagrange 多项式来表示

$$\psi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} l_i^{(n-1)}(\xi) F(\xi_i) \tag{4.5.2}$$

其中 $l_i^{(n-1)}(\xi)$ 是 $n-1$ 阶 Lagrange 插值函数(见 3.2 节)

$$l_i^{(n-1)}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\cdots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\cdots(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\cdots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\cdots(\xi_i - \xi_n)} \tag{4.5.3}$$

由于 Lagrange 插值函数有如下性质

$$l_i(\xi_j) = \delta_{ij} \tag{4.5.4}$$

所以有

$$\psi(\xi_i) = F(\xi_i)$$

(4.5.3)式的插值函数是 $n-1$ 次多项式，因此近似函数 $\psi(\xi)$ 也是 $n-1$ 次多项式。$\psi(\xi)$ 的积分

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(\xi)\mathrm{d}\xi &= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} l_i^{(n-1)}(\xi) F(\xi_i)\mathrm{d}\xi \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b l_i^{(n-1)}(\xi)\mathrm{d}\xi \right) F(\xi_i) \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

令

$$H_i = \int_a^b l_i^{(n-1)}(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.5.6}$$

则(4.5.3)式可以写作

$$\int_a^b \psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} H_i F(\xi_i) \tag{4.5.7}$$

式中 H_i 称为积分的权系数，简称为权，由(4.5.6)式确定。可以看到加权系数 H_i 与被积函数 $F(\xi)$ 无关，只与积分点的个数和位置有关。

Newton-Cotes 积分中，积分点的位置按等间距分布，即

$$\xi_i = a + ih \quad (i = 0,1,2,\cdots,n-1) \tag{4.5.8}$$

其中 h 是积分点间距 $h=(b-a)/(n-1)$。

现在用 $\int_a^b \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 近似 $\int_a^b F(\xi)\mathrm{d}\xi$，根据(4.5.7)式可以写出

$$\int_a^b F(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} H_i F(\xi_i) + R_{n-1} \tag{4.5.9}$$

式中 R_{n-1} 是余项。

为了使权系数使用规则化，计算权系数时，(4.5.6)式中的积分限可以规格化，我们引入

$$\xi' = \frac{1}{b-a}(\xi - a) \tag{4.5.10}$$

代入(4.5.6)式得到

$$H_i = (b-a)C_i^{n-1} \tag{4.5.11}$$

其中

$$C_i^{n-1} = \int_0^1 l_i^{(n-1)}(\xi')\mathrm{d}\xi' \tag{4.5.12}$$

C_i^{n-1} 称为 $n-1$ 阶的 Newton-Cotes 数值积分常数。对于 n 个积分点则有 n 个 $n-1$ 阶的数值积分常数，可以预先计算得到。我们把积分阶数记为 $m(m=n-1)$，规格化积分域(0,1)上的 $m=1\sim6$ 的 C_i^m 及余项 R_m 的上限见表 4.1。其中 $m=1$ 和 $m=2$ 就是著名的梯形公式和 Simpson 公式。作为误差估计，余项 R_m 的上限是原被积函数 $F(\xi)$ 导数的函数(表内 R_m 表达式中 F 的右上标表示函数 $F(\xi)$ 的导数的阶次)。从表中可以看到 $m=3$，$m=5$ 分别与 $m=2$，$m=4$ 具有同阶的精度，因此在实际计算中只采用 $m=2,4$ 等偶数阶的 Newton-Cotes 积分。

由于 n 个积分点的 Newton-Cotes 积分构造的近似函数 $\psi(\xi)$ 是 $n-1$ 次多项式，因此我们说 n 个积分点的 Newton-Cotes 积分可达到 $n-1$ 阶的精度，即如果原被积函数 $F(\xi)$ 是 $n-1$ 次多项式，则积分结果将是精确的。

Newton-Cotes 积分用于被积函数只便于等间距取样的情况是比较合适的。但是在有限元分析中，编制程序计算单元内任意指定点的被积函数值是十分方便的，因此不必受等间距分布积分点的限制，可以通过优化积分点的位置进一步提高积分的精度，即在给定积分点数目的情况下更合理地选择积分点的位置以达到更高的数值积分精度。高斯数值积分就是这种积分方案中最常用的一种，在有限元分析中得到了广泛的应用。

表 4.1　Newton-Cotes 积分常数及误差估计

积分阶数 m	C_1^m	C_2^m	C_3^m	C_4^m	C_5^m	C_6^m	C_7^m	R_m 的上限
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$10^{-1}(b-a)^3F^{\mathrm{II}}(\xi)$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$					$10^{-3}(b-a)^5F^{\mathrm{IV}}(\xi)$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				$10^{-3}(b-a)^5F^{\mathrm{IV}}(\xi)$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$			$10^{-6}(b-a)^7F^{\mathrm{VI}}(\xi)$
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$		$10^{-6}(b-a)^7F^{\mathrm{VI}}(\xi)$
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$	$10^{-9}(b-a)^9F^{\mathrm{VIII}}(\xi)$

2. 高斯积分

在此积分方案中，积分点 ξ_i 不是等间距分布。积分点的位置由下述方法确定：首先定义 n 次多项式 $P(\xi)$

$$P(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\cdots(\xi - \xi_n) = \prod_{j=1}^{n}(\xi - \xi_j) \tag{4.5.13}$$

由下列条件确定 n 个积分点的位置

$$\int_a^b \xi^i P(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \quad (i = 0,1,\cdots,n-1) \tag{4.5.14}$$

由上二式可见，$P(\xi)$有以下性质

(1) 在积分点上 $P(\xi_i)=0$。

(2) 多项式 $P(\xi)$与 $\xi^0,\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{n-1}$在$(a,b)$域内正交。由此可见 n 个积分点的位置 ξ_i 是在求积域(a,b)内与 $\xi^0,\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{n-1}$正交的 n 次多项式 $P(\xi)$构成方程 $\int_a^b \xi^i P(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$ 的解。

被积函数 $F(\xi)$可由 $2n-1$ 次多项式 $\psi(\xi)$来近似

$$\psi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} l_i^{(n-1)}(\xi)F(\xi_i) + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\xi^i P(\xi) \tag{4.5.15}$$

用 $\int_a^b \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 近似$\int_a^b F(\xi)\mathrm{d}\xi$，并考虑到(4.5.14)式，则仍得到和(4.5.9)式在形式上相同的结果

$$\begin{aligned}\int_a^b F(\xi)\mathrm{d}\xi &= \sum_{i=1}^{n}\int_a^b l_i^{(n-1)}(\xi)F(\xi_i)\mathrm{d}\xi + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\int_a^b \xi^i P(\xi)\mathrm{d}\xi + R \\ &= \sum_{i=1}^{n} H_i F(\xi_i) + R\end{aligned} \tag{4.5.16}$$

其中

$$H_i = \int_a^b l_i^{(n-1)}(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.5.17}$$

应该指出高斯积分的(4.5.16)式和 Newton-Cotes 积分的(4.5.9)式虽然形式上相同，但实质上是有区别的，区别在于

(1) 在高斯积分中 $\psi(\xi)$不是 $n-1$ 次多项式，而是包含 $F(\xi_i)(i=1,2,\cdots,n)$和 $\beta_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$共 $2n$ 个系数的 $2n-1$ 次多项式。

(2) 积分点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$不是等间距分布，而是由(4.5.14)式所表示的 n 个条件确定的。

正因为 $\psi(\xi)$是 $2n-1$ 次多项式，因此 n 个积分点的高斯积分可达 $2n-1$ 阶的精度。这就是说如果 $F(\xi)$是 $2n-1$ 次多项式，积分结果将是精确的。

为便于计算积分点的位置 ξ_i 和权系数 H_i，我们把(4.5.14)式及(4.5.17)式中积分限规格化，可令 $a=-1,b=1$。这样计算得到的 ξ_i 和 H_i 对于原积分域(a,b)，积分点的坐标和积分的权系数分别为

$$\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\xi_i \text{ 和 } \frac{b-a}{2}H_i \tag{4.5.18}$$

例 1 求两点高斯积分的积分点位置及积分权系数。

二次多项式

$$P(\xi)=(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)$$

求积分点位置

$$\int_{-1}^{1}P(\xi)\xi^i\mathrm{d}\xi=0 \quad (i=0,1)$$

$$i=0: \qquad \int_{-1}^{1}(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\mathrm{d}\xi=\frac{2}{3}+2\xi_1\xi_2=0$$

$$i=1: \qquad \int_{-1}^{1}(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\xi\mathrm{d}\xi=-\frac{2}{3}(\xi_1+\xi_2)=0$$

得到的联立方程

$$\begin{cases}\xi_1\xi_2+\dfrac{1}{3}=0\\ \xi_1+\xi_2=0\end{cases}$$

求得联立方程的解

$$-\xi_1=\xi_2=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577350269189626$$

积分权系数为

$$H_i=\int_{-1}^{1}l_i^{(1)}(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad H_1=\int_{-1}^{1}\frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\mathrm{d}\xi=1,\quad H_2=\int_{-1}^{1}\frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\mathrm{d}\xi=1$$

表 4.2 中列出了对于$(-1,1)$积分域 $n=1\sim6$ 的积分点位置 ξ_i 和权系数 H_i 的值

表 4.2 高斯积分的积分点坐标和权系数

积分点数 n	积分点坐标 ξ_i	积分权系数 H_i
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	±0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	±0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556

续表

积分点数 n	积分点坐标 ξ_i	积分权系数 H_i
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
4	±0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	±0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
5	±0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
	±0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
	0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
6	±0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
	±0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	±0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691

下面我们将用 Newton-Cotes 积分及高斯积分计算$\int_0^3 (2^r - r)\mathrm{d}r$，由此可以得到两种积分精确度的比较。该积分的精确解

$$\int_0^3 (2^r - r)\mathrm{d}r = \left(\frac{1}{\ln 2}2^r - \frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = 5.598865$$

(1) 两点 Newton-Cotes 积分

积分点位置 $r_1=0, r_2=3$

积分权系数 $H_1=0.5, H_2=0.5$

积分限 $b-a=3$

积分点上被积函数值

$$F(r_1) = 2^0 - 0 = 1,\quad F(r_2) = 2^3 - 3 = 5$$

$$\int_0^3 (2^r - r)\mathrm{d}r = (b-a)[H_1F(r_1) + H_2F(r_2)]$$

$$= 3(0.5 \times 1 + 0.5 \times 5) = 9$$

误差 $\varepsilon = 60.7\%$

(2) 三点 Newton-Cotes 积分

$$\int_0^3 (2^r - r)\mathrm{d}r = \frac{3}{6}[(1)(1) + (4)(1.328427) + (1)(5)] = 5.656854$$

误差 $\varepsilon = 1.04\%$

(3) 两点高斯积分

积分点位置与积分权系数由(4.5.14)式及(4.5.17)确定

$$r_1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), r_2 = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$H_1 = H_2 = \frac{3}{2}$$

$$F(r_1) = 0.9178598, F(r_2) = 2.789164$$

$$\int_0^3 (2^r - r)\mathrm{d}r = \frac{3}{2}(0.9178598 + 2.789164)$$

$$= 5.560536$$

误差 $\varepsilon = -0.685\%$

由上例可见，由于优化了积分点的位置，高斯积分能达到较高的精度。

综上所述，对于 n 个积分点，Newton-Cotes 积分可以达到的精度是 $n-1$ 阶多项式，误差为 $O(h^n)$ 阶，h 是积分点间距；高斯积分可以达到 $2n-1$ 阶多项式的精度，误差是 $O(h^{2n})$ 阶。图 4.5 表示精确到 7 次多项式时两种积分方案积分点的数目及坐标。

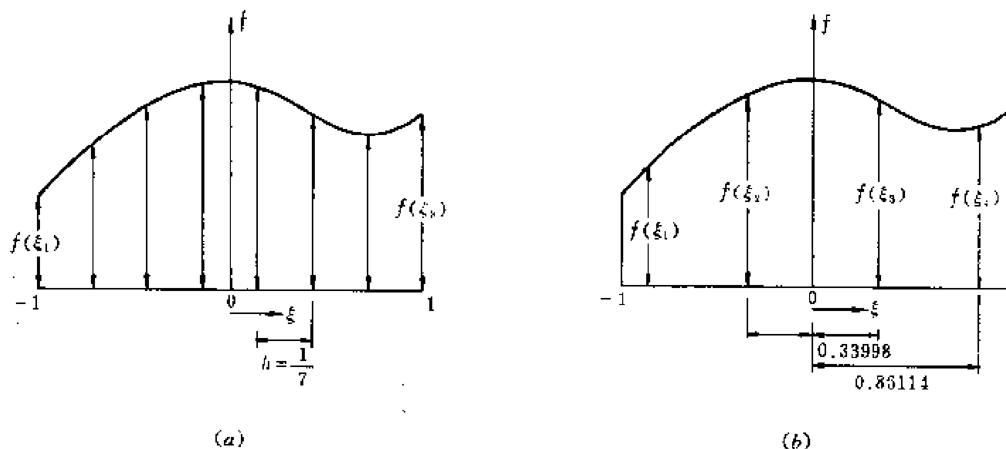


图 4.5　两种积分方案（误差 $O(h^2)$）

(a) Newton-Cotes 积分　(b) 高斯积分

4.5.2　二维和三维高斯积分

将上一节中讨论的一维高斯积分用于二维或三维数值积分时，可以采用与解析方法计算多重积分相同的方法，即在计算内层积分时，保持外层积分变量为常量。这样，可以很简单地得到二维问题的数值积分。二维积分

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

首先令 η 为常数，进行内层积分

$$\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi = \sum_{j=1}^{n} H_j F(\xi_j,\eta)$$

用同样的方法进行外层积分就得到

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \int_{-1}^{1}\sum_{j=1}^{n} H_j F(\xi_j,\eta)\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n} H_i \sum_{j=1}^{n} H_j F(\xi_j,\eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i H_j F(\xi_j,\eta_i) = \sum_{i,j=1}^{n} H_{ij} F(\xi_j,\eta_i) \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

其中 H_i，H_j 就是一维高斯积分的权系数，n 是在每个坐标方向的积分点数。如果 $F(\xi,\eta) = \sum a_{ij}\xi^i\eta^j$，且 $i,j \leqslant 2n-1$，则(4.5.19)式将能给出积分的精确值。

类似地，对于三维数值积分，则有

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} H_i H_j H_m F(\xi_i, \eta_j, \zeta_m) = \sum_{m,j,i=1}^{n} H_{ijm} F(\xi_i, \eta_j, \zeta_m) \tag{4.5.20}$$

如果 $F(\xi,\eta,\zeta) = \sum a_{ijm}\xi^i\eta^j\zeta^m$，且 $i,j,m \leqslant 2n-1$，则上式给出精确的积分结果。

在上面的讨论中，每个坐标方向上选取的积分点数是相同的。实际上，在 ξ，η 和 ζ 各个不同的坐标方向上，可以选取不同的积分点数，即可以根据具体情况采用不同阶的积分方案。

4.5.3 Irons 积分[1]

在有限元分析中，如将被积函数 $F(\xi,\eta,\zeta)$ 表示成 $\sum a_{ijk}\xi^i\eta^j\zeta^k$，其中 i、j、k 不一定同时达到最大值，而是 $i+j+k \leqslant N$，N 是某个整数，因此可以利用更为有效的积分方案。Irons 提出了一个较高斯积分效率更高的积分公式，该积分公式直接写成一次求和的形式。在这里不作详细的推导，只是给出其结果。关于三维积分 Irons 给出的公式是

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta &= A_1 F(0,0,0) + B_6\{F(-b,0,0) + F(b,0,0) \\
&+ F(0,-b,0) + F(0,b,0) + F(0,0,-b) + F(0,0,b) \\
&+ C_8\{F(-c,-c,-c) + F(c,-c,-c) + F(-c,c,-c) \\
&+ F(-c,-c,c) + F(c,c,-c) + \cdots + F(c,c,c)(\text{共 8 项})\} \\
&+ D_{12}\{F(-d,-d,0) + F(d,-d,0) + F(-d,0,-d) \\
&+ F(d,0,-d) + F(0,-d,-d) + \cdots(\text{共 12 项})\}
\end{aligned} \tag{4.5.21}$$

式中权系数 A_1，B_6，C_8，D_{12} 和积分点坐标 b，c，d 以及误差均列于表 4.3 中。对于 20 结点等参元，由(4.5.21)式给出的 14 点积分方案基本上可以达到 27(3×3×3)点高斯积分同样的结果，所以这种积分方案得到广泛应用。

表 4.3 Irons 积分公式的权系数和积分点坐标

积分点数	权系数*	积分点坐标	误 差
1	$A_1=8$		$O(h^2)$
6	$B_6=8/6$	$b=1$	$O(h^4)$
14	$B_6=0.886426593$ $C_8=0.335180055$	$b=0.795822426$ $c=0.758786911$	$O(h^6)$
27	$A_1=0.788073483$ $B_6=0.499369002$ $C_8=0.478508449$ $D_{12}=0.032303742$	$b=0.848418011$ $c=0.652816472$ $d=1.106412899$	$O(h^8)$

* 未列出的权系为 0。

4.5.4 二维三角形单元和三维四面锥单元的 Hammer 积分

在三角形单元和四面锥单元中，自然坐标是面积坐标和体积坐标，积分具有如下形式

二维 $$I = \int_0^1\int_0^{1-L_1} F(L_1,L_2,L_3)\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_1$$

三维 $$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_2-L_1} F(L_1, L_2, L_3, L_4) \mathrm{d}L_3 \mathrm{d}L_2 \mathrm{d}L_1$$

积分限中包含了变量自身。Hammer[2]等导出了有效的积分方案。二维三角形单元以及三维四面锥单元的积分点位置、权函数和误差量级分别列于表 4.4 表 4.5。

表 4.4 三角形单元的数值积分

阶次	图形	误差	积分点	面积坐标	权系数
线性		$R=O(h^2)$	a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	1
二次		$R=O(h^3)$	a	$\frac{1}{2},\frac{1}{2},0$	$\frac{1}{3}$
			b	$0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
			c	$\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
三次		$R=O(h^4)$	a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
			b	0.6,0.2,0.2	$\frac{25}{48}$
			c	0.2,0.6,0.2	
			d	0.2,0.2,0.6	
四次		$R=O(h^6)$	a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	0.22500,00000
			b	α_1,β_1,β_1	9.13239,41527
			c	β_1,α_1,β_1	
			d	β_1,β_1,α_1	
			e	α_2,β_2,β_2	0.12593,91805
			f	β_2,α_2,β_2	
			g	β_2,β_2,α_2	
			其中		
			$\alpha_1=0.0597158717$		
			$\beta_1=0.4701420641$		
			$\alpha_2=0.7974269853$		
			$\beta_2=0.1012865073$		

表 4.5　四面体单元的数值积分表

单元阶次	图形	误差	积分点	体积坐标	权系数
线性单元		$R=O(h^2)$	a	$\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}$	1
二次单元		$R=O(h^3)$	a	α,β,β,β	$\frac{1}{4}$
			b	β,α,β,β	$\frac{1}{4}$
			c	β,β,α,β	$\frac{1}{4}$
			d	β,β,β,α	$\frac{1}{4}$
				$\alpha=0.58541020$ $\beta=0.13819660$	
三次单元		$R=O(h^4)$	a	$\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$
			b	$\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
			c	$\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
			d	$\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
			e	$\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3}$	$\frac{9}{20}$

仿照(4.5.21)式给出的 Irons 积分，二维三角形的 Hammer 积分可以表示为

$$\int_0^1\int_0^{1-L_1}F(L_1,L_2,L_3)\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_1 = A_1F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) + B_3\{F(a,a,b)+F(a,b,a)+F(b,a,a)\} + C_3\{F(c,c,d)+F(c,d,c)+F(d,c,c)\} \tag{4.5.22}$$

三维四面锥的 Hammer 积分可以表示为

$$\int_0^1\int_0^{1-L_1}\int_0^{1-L_1-L_2}F(L_1,L_2,L_3,L_4)\mathrm{d}L_3\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_1 = A_1F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)+B_4\{F(a,b,b,b)+F(b,a,b,b) + F(b,b,a,b)+F(b,b,b,a)\} \tag{4.5.23}$$

表 4.6 和表 4.7 中分别列出了用于(4.5.22)式及(4.5.23)式的权系数、积分点坐标和误差估计。采用上述表达形式可以很方便地与 Irons 积分一起编制统一的计算机程序进行

数值积分。

表 4.6　二维 Hammer 积分的权系数和积分点坐标

积分点数	权系数*	积分点坐标	误　差
1	$A_1=1$	1/3,1/3,1/3	$O(h^2)$
3	$B_3=1/3$	$a=1/2,b=0$	$O(h^3)$
4	$A_1=-27/48$ $B_3=25/48$	$a=1/5,b=3/5$	$O(h^4)$
7	$A_1=0.22500,00000$ $B_3=0.12593,91805$ $C_3=0.13239,41527$	$a=0.1012865073$, $b=0.7974269853$ $c=0.4701420641$, $d=0.0597158717$	$O(h^6)$

* 未列出的权系数为 0。

表 4.7　三维 Hammer 积分的权系数和积分点坐标

积分点数	权系数	积分点坐标	误　差
1	$A_1=1$	1/4,1/4,1/4,1/4	$O(h^2)$
4	$B_4=1/4$	$a=0.58541020$ $b=0.13819660$	$O(h^3)$
5	$A_1=-4/5$ $B_4=9/20$	$a=1/3\quad b=1/6$	$O(h^4)$

* 未列出的权系数为 0。

4.6　等参元计算中数值积分阶次的选择

当在计算中必须进行数值积分时，如何选择数值积分的阶次将直接影响计算的精度和计算工作量。如果选择不当，甚至会导致计算的失败。

选择积分阶次的原则如下：

1．保证积分的精度

以一维问题刚度矩阵的积分为例，如果插值函数 N 中的多项式阶数为 P，微分算子 L 中导数的阶次是 m，则有限元得到的被积函数是 $2(p-m)$ 次多项式(对于等参元假设 $|J|$ 是常数时)。为保证原积分的精度，应选择高斯积分的阶次 $n=p-m+1$，这时可以精确积分至 $2(p-m)+1$ 次多项式，可以达到精确积分刚度矩阵的要求。还需指出，由于位移有限元所根据的最小位能原理是极值原理，所以当单元尺寸 h 不断减小时，有限元解将单调地收敛于精确解。

对于二维、三维单元，则需要对被积函数作进一步的分析。例如二维 4 结点双线性单元，它的插值函数中包含 1、ξ、η、$\xi\eta$ 项，在假设单元的 $|J|$ 是常数(单元形状为矩形或平行四边形)的情况下，刚度矩阵的被积函数中包含 1、ξ、η、ξ^2、η^2、$\xi\eta$ 项。由于被积函数在 ξ 和 η 方向的最高方次为 2 所以要达到精确积分，应采用 2×2 阶高斯积分。如果单元的 $|J|\neq$ 常数，则需要选取更多的积分点。对于二维 8 结点单元也可作类似的分析。结论是：为精确

积分单元刚度矩阵，在$|\boldsymbol{J}|=$常数条件下，应采用3×3阶高斯积分。如果$|\boldsymbol{J}|\neq$常数，则需要采用更高阶的高斯积分。正如前面已指出的，在对单元刚度矩阵进行精确积分的条件下，将保证当单元尺寸h不断减小时，有限元解单调地收敛于精确解。

但是在很多情况下，实际选取的高斯积分点数低于精确积分的要求。例如按单元插值函数中完全多项式的阶数p来选取，仍以上述二维4结点和8结点单元为例，它们的插值函数中完全多项式阶数p分别等于1和2。由完全多项式所产生的刚度矩阵中被积函数在ξ方向和η方向的最高方次，在$|\boldsymbol{J}|=$常数条件下为$2(p-m)=2(p-1)$，即对上述二种单元分别为0和2。因此保证这部分被积函数积分的精度，只需要分别采用1×1和2×2的高斯积分。一般化，即仍按$n=p-m+1$来确定积分方案。式中p是插值函数中完全多项式的方次，m是微分算子L中导数的阶次、二维单元和三维单元分别采用$n\times n$和$n\times n\times n$高斯积分来进行单元刚度矩阵的计算。这种高斯积分阶数低于被积函数所有项次精确积分所需要阶数的积分方案称之为减缩积分。实际计算表明：采用减缩积分往往可以取得较完全精确积分更好的精度。这是由于：

(1) 精确积分常常是由插值函数中非完全项的最高方次要求，而决定有限元精度的是完全多项式的方次。这些非完全的最高方次项往往不能提高精度，反而可能带来不好的影响。取较低阶的高斯积分，使积分精度正好保证完全多项式方次的要求，而不包括更高次的非完全多项式的要求，其实质是相当用一种新的插值函数替代原来的插值函数，从而一定情况下改善了单元的精度。这种积分方案又称为优化积分方案，是减缩积分的一种。

(2) 基于最小位能原理基础上建立的位移有限元，其解答具有下限性质。即有限元的计算模型具有较实际结构偏大的整体刚度。选取减缩积分方案将使有限元计算模型的刚度有所降低，因此可能有助于提高计算精度。

另外，这种减缩积分方案对于泛函中包含罚函数的情况也常常是必须的，用以保证和罚函数相应的矩阵的奇异性(见8.2节)，否则将可能导致完全歪曲了的结果。

2. 保证结构总刚度矩阵$\boldsymbol{K}$是非奇异的

求解系统方程$\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$，要求方程有解则必须系数矩阵的逆矩阵$\boldsymbol{K}^{-1}$是存在的，即在引入强迫边界条件后$\boldsymbol{K}$必须是非奇异的。系数矩阵$\boldsymbol{K}$非奇异的条件是$|\boldsymbol{K}|\neq0$，或称$\boldsymbol{K}$是满秩的。如果$\boldsymbol{K}$是$N$阶方阵，则要求它的秩为$N$。数值积分应保证$\boldsymbol{K}$的满秩，否则将使求解失败。

关于矩阵的秩，有下面两个基本规则：

(1) 矩阵相乘的秩规则

若
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{UAV} \tag{4.6.1}$$
则
$$\text{秩}\,\boldsymbol{B}\leqslant\min(\text{秩}\,\boldsymbol{U},\text{秩}\,\boldsymbol{A},\text{秩}\,\boldsymbol{V})$$
秩$\boldsymbol{B}$就是矩阵$\boldsymbol{B}$的秩，它必然小于最多等于相乘矩阵中秩最小者。

(2) 矩阵相加的秩规则

若$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

则
$$\text{秩}\,\boldsymbol{C}\leqslant\text{秩}\,\boldsymbol{A}+\text{秩}\,\boldsymbol{B} \tag{4.6.2}$$
即矩阵和的秩必然小于最多等于矩阵秩的和。

现在再来考察单元刚度矩阵的计算公式(4.4.14)式

$$K^e = \sum_{i=1}^{n_g} H_i B_i^T D B_i |J_i| \tag{4.6.3}$$

其中弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是 $d\times d$ 方阵，秩 $\boldsymbol{D}=d$。d 是应变分量数(或独立关系数)。对于二维平面问题 $d=3$，轴对称问题 $d=4$，三维问题则 $d=6$。应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $d\times n_f$ 矩阵，n_f 是单元的结点自由度数。在一般情况下 $d<n_f$，所以秩 $\boldsymbol{B}=d$。根据矩阵的秩的基本规则(4.6.1)式及(4.6.2)式，可以得到结论：秩 $\boldsymbol{K}^e\leqslant n_g d$，$n_g$ 是高斯积分点数。如果系统的单元数为 M，再一次利用(4.6.2)式可得

$$\text{秩}\ \boldsymbol{K} \leqslant M\cdot n_g \cdot d \tag{4.6.4}$$

因此系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 非奇异的必要条件是

$$M\cdot n_g\cdot d \geqslant N \tag{4.6.5}$$

N 是系统的独立自由度数，也就是系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的阶数。

(4.6.5)式表明：假如未知场变量 $\boldsymbol{a}$ 的元素数目超过全部积分点能提供的独立关系数，则矩阵 $\boldsymbol{K}$ 必然是奇异的。

实际分析中要对矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是否满足非奇异性进行检查的是采用减缩积分方案计算矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的情况。因为任何有别于刚体运动的位移模式加于一个真实的结构系统，必将在系统内产生大于零的应变能。如果采用精确积分方案进行 $\boldsymbol{K}$ 的计算，实际上就是对应变能 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}$ 进行精确的计算。因为 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}>0$，所以 $\boldsymbol{K}$ 必然是正定的，也即 $\boldsymbol{K}$ 是非奇异的。而在采用减缩积分时，情况就不一样，系统的应变能并未被精确计算。对于某些除刚体运动而外的位移模式，在减缩积分点的应变可能正好等于零，则该点的独立关系式实际上就不能对 $\boldsymbol{K}$ 的秩作出贡献，因而最后导致 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性的必要条件(4.6.5)式不能满足。图 4.6 所示给出了这样一个例证。对于二维 8 结点单元，给定如下结点位移模式：

$$-u_1=u_3=u_5=-u_7=v_1=v_3=-v_5=-v_7=1$$

$$-u_4=u_8=-v_2=v_6=\frac{1}{2}$$

$$u_2=u_6=v_4=v_8=0$$

可以验证，在单元减缩积分方案的 2×2 高斯点上对应于上述位移模式的应变正好等于0。这时如利用 2×2 高斯积分计算单元的应变能则有

$$\int_{V_e}\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}H_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}|\boldsymbol{J}|=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\Big(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}H_{ij}\boldsymbol{B}_{ij}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_{ij}|\boldsymbol{J}|\Big)\boldsymbol{a}$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\Big(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}H_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}\Big)\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=0$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 是结点位移模式，H_{ij}是权系数，$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\boldsymbol{\varepsilon}(\xi_i,\eta_j)$，$\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{B}(\xi_i,\eta_j)$，$\boldsymbol{K}_{ij}=\boldsymbol{K}(\xi_i,\eta_j)$，$\xi_i,\eta_j$ 是高斯点坐标，$|\boldsymbol{J}|=ab$。上式表明通过 2×2 积分计算得到的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 必然是奇异的。这是由于采用减缩积分导致的结果，如果采用 3×3 的精确积分，则有$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}>0$，也即 $\boldsymbol{K}^e$ 是非奇异的。这种由于采用减缩积分导致的使应变能为零、而自身有别于刚体运动的位移模式称为零能模式。它的存在将使解答失真，甚至求解无法进行。因此在实际分析中，必须防止零能模式的出现。也即在采用减缩积分时，必须注意检查 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性条件是否得到保证。

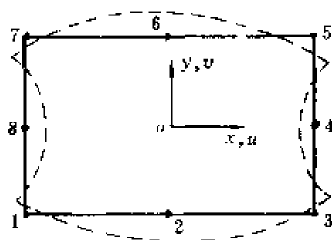
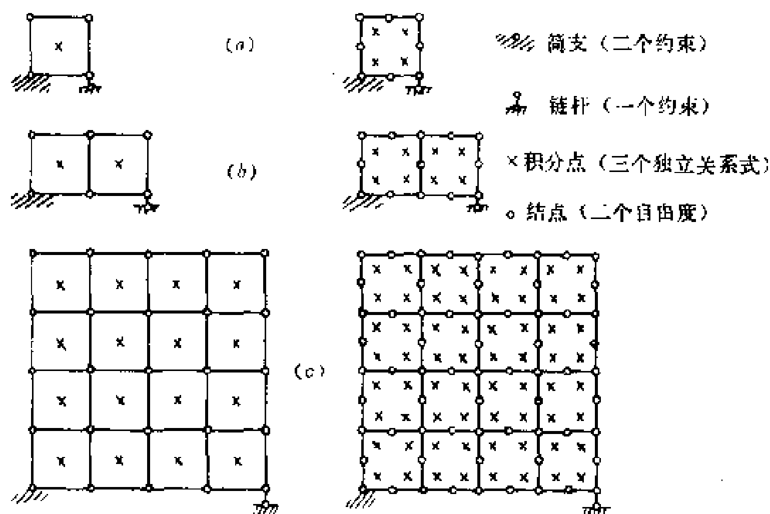


图 4.6 给定位移模式下的 8 结点单元

图 4.7 给出了二维 4 结点单元和 8 结点单元组成的系统刚度矩阵奇异性检查的实例。从图可见，在只有刚体约束情况下，如只有一个单元，这两种单元的 $\boldsymbol{K}$ 都是奇异的；如网格增加到二个单元，4 结点单元的 $\boldsymbol{K}$ 仍是奇异的，而 8 结点的 $\boldsymbol{K}$ 已不再奇异了。当网格增加到 16 个单元时，4 结点单元的 $\boldsymbol{K}$ 也不奇异了。但是必须指出此结论是根据(4.6.5)式得出的，而此式给出的仅是 $\boldsymbol{K}$ 非奇异的必要条件，并非充分条件。实际计算表明，如仅给以刚体运动约束，即使 16 个 4 结点单元组成的网格 $\boldsymbol{K}$ 仍是奇异的。由此可见，对于 4 结点单元、改善应力结果的减缩积分方案和保证系统矩阵非奇异的最低阶积分方案并不一致，这是此单元较少被采用的原因之一。而对于 8 结点单元，这二种积分方案是一致的，即在 $|\boldsymbol{J}|$ = 常数情况下都是 2×2 个积分点，这也是它能得到普遍应用的原因之一。当然由于此积分方案不能保证对刚度矩阵的精确积分，因此也不能保证有限元解的单调收敛。



	线性单元 自由度数　独立关系式	二次单元 自由度数　独立关系式
(a)	$4\times2-3=5>1\times3=3$ 奇异	$2\times8-3=13>4\times3=12$ 奇异
(b)	$6\times2-3=9>2\times3=6$ 奇异	$13\times2-3=23<8\times3=24$
(c)	$25\times2-3=47<16\times3=48$	$65\times2-3=117<64\times3=192$

图 4.7 二维网格系统刚度矩阵奇异性检查

以上分析的原则同样适用于其他二维单元以及三维单元。综合以上关于选择数值积分阶次的讨论，在表 4.8 中给出了二维等参元的高斯数值积分的推荐阶次。它也可以推广用于一维或三维单元刚度矩阵的计算。

表 4.8　二维等参元推荐采用的积分阶数

单　　元	通常优化积分阶数	最高积分阶数
4 结点矩形单元	2×2	2×2
4 结点任意四边形单元	2×2	3×3
8 结点矩形单元	2×2	3×3
8 结点曲边单元	3×3	4×4

最后再次强调，(4.6.5)式给出的仅是保证系统刚度矩阵非奇异性的必要条件。这是由于所有高斯点的应变分量所提供的 Mn_gd 个关系式可能不是完全独立的，所以即使(4.6.5)式成立，系统刚度矩阵仍可能是奇异的。这时系统的解答中可能包含虚假的零能位移模式，从而使整个解答失去意义，或者求解过程因 $\boldsymbol{K}$ 奇异而不可能继续。保证系统非奇异性的严格证明是求解系统 $\boldsymbol{K}$ 的特征值问题，如果系统不出现对应于除刚体运动而外位移模式的 0 特征值，则系统 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性得到保证。关于通过求解系统特征值问题检查刚度矩阵是否奇异问题可以指出，实际上只要求解仅给以刚体运动约束的一个单元刚度矩阵的特征值问题就可以回答，这点在图 4.7 的例子中已得到证实。并将在第 10 章板单元

的讨论中得到进一步的应用和讨论。

4.7 小　　结

等参元在有限元法的发展中占有重要的位置，由于它能使局部坐标系内的形状规则的单元变换为总体坐标系内形状为扭曲的单元，从而为求解域是任意形状的实际问题的求解提供了有效的单元形式。两种坐标系内坐标的变换通常采用和位移函数相类同的插值形式，依据坐标变换插值点数和位移插值点数相比较，分别称之为等参元、超参元和次参元。通常应用最多的是两者插值点数相同的等参元。

等参元的表达格式和第 2 章中已讨论的广义坐标有限元表达格式原则上是一致的。不同的是位移插值函数不必通过较繁杂的计算得到，而是由前一章讨论的构造插值函数的一般方法直接得到。在单元特性矩阵的形成时，由于等参元的特性矩阵是建立于单元局部坐标系的，因此必须进行导数、体积、面积、长度等的变换，掌握它们的变换方法是等参元应用中的重要环节。同时为保证上述变换能够进行，必须保证等参变换能够实现，其基本点是要保证单元的形状不过分扭曲，这在实际应用中应给予足够注意。

等参元应用中另一重要问题是数值积分方法和阶次的选择，虽然由于等参元的特性矩阵是建立于局部坐标系的规则域内、为数值积分方法的采用提供了很大的方便，同时高斯积分也已被证实是最方便而有效的方法而被广泛采用，但积分阶次的选择仍是等参元应用中需要认真对待的问题。本章给出了选择数值积分阶次的一般原则，并就几种常用单元形式推荐了常采用的积分阶次。至于板壳单元、非协调单元、以及用于非线性分析的情况，单元矩阵的数值积分仍有一些需要研究的专门问题，这将在以后有关章节予以讨论。

习　　题

4.1　图 4.8 所示为二次四边形单元，试计算 $\partial N_1/\partial x$ 和 $\partial N_2/\partial y$ 在自然坐标为(1/2,1/2)的点 Q 的数值(因为单元的边是直线，可用 4 个结点定义单元的几何形状)。

4.2　图 4.9 所示为二次三角形单元，试计算 $\partial N_4/\partial x$ 和 $\partial N_4/\partial y$ 在点 $P(1.5,2.0)$ 的数值。

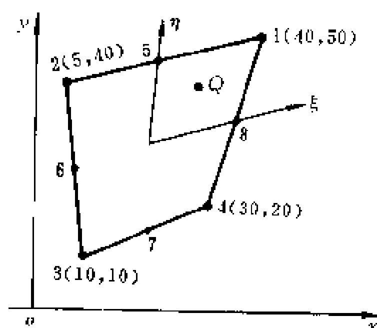


图　4.8

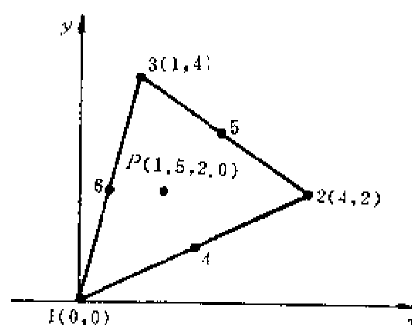


图　4.9

4.3 证明边界为直线的三角形和平行四边形的二维单元的 Jacobi 矩阵是常数矩阵。

4.4 证明棱边为直线的四面体和平行六面体的三维单元的 Jacobi 矩阵是常数矩阵。

4.5 导出面(体)坐标的幂函数的常用积分公式(4.4.11)式,(4.4.12)式和(4.4.13)式(提示:利用面(体)积坐标之和等于 1 的关系消去被积函数中的一个坐标,并注意积分上下限的设置)。

4.6 利用面积坐标幂函数的积分公式,导出 6 结点三角形二维单元刚度矩阵的显式表达式。

4.7 证明 9 结点二维单元经次参变换(坐标用 4 点插值、场函数用 9 点插值)仍满足收敛性条件。

4.8 证明:若在(-1,1)区间内的任意二次、三次曲线在$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$两点和一直线相交,则曲线下的面积和直线下的面积相等。

4.9 试导出一维 3 阶高斯积分点的位置及权系数。

4.10 二维 4 结点等参元,在 x,y 坐标中单元各边与坐标轴 x,y 平行,边长为 a,b,确定下列载荷情况下的结点载荷

(1) 在 x 正方向有一分布载荷作用在 $\xi=1$ 的边上,载荷在 $\eta=-1$ 为 0;在 $\eta=1$ 为 q_0,呈线性变化。

(2) 在 $\xi=1$ 的边上作用有均布载荷 q_0,方向压向单元。

(3) 在 y 正方向上作用有均匀的体积力 b_0。

4.11 上题是 8 结点等参元时,结点载荷向量各是什么?

4.12 三维一次(8 结点)和三维二次(20 结点)等参单元,在 x,y,z 坐标中单元各边与坐标轴 x,y,z 平行,边长为 a,b,c,在 4.10 题的三种载荷情况下(假设载荷沿 ζ 方向不变),结点载荷向量各是什么?

4.13 讨论下列单元的优化积分方案及精确积分方案(假定 $|\boldsymbol{J}|$ 为常数)所需的高斯积分阶次。单元是:二维三次 Serendipity 单元;三维 8 结点线性单元;三维 20 结点二次单元。

参考文献

1 Irons B M. Quadrature Rules for Brick Based Finite Elements. Int. J. Num. Meth. Eng., 1971, 3, 293~294

2 Hammer P C, Marlowe O P and Stroud A H. Numerical Integration over Simplexes and Cones. Math. Tabls Aids Comp., 1956, 10, 130~137

第 5 章　有限单元法应用中的若干实际考虑

5.1 引　　言

通过前 4 章的讨论，我们已对有限单元法的基本原理、表达格式以及常用的单元形式有了基本的了解，为有限单元法应用于实际问题的分析，特别是为最常见的连续实体结构的线弹性分析提供了必要的准备。当人们应用有限单元法于实际分析时，方便、快捷地得到可靠的结果，无疑是共同追求的目标。这当中涉及合理的计算模型的建立、适当的单元形式和计算方法的选择、以及完备的前后处理程序的研制等多方面的问题。本章主要从理论和方法角度讨论其中的几个方面。

在 5.2 节首先讨论的是应力计算结果的处理和改善。这是由于最常用的、也是广泛应用于各个大型通用程序的是以位移作为基本未知量的单元(简称位移元)，从位移经过求导得到的应变和应力相对精度较低。而从实际的工程分析的目的考虑，常常最关心的是应力计算结果。本节所讨论的是在理论上弄清位移元应力结果的性质和特点的基础上，如何采用实际可行的方法来处理和改善应力的计算结果，从而使之能较好满足工程实际的要求。

在 5.3～5.5 节所讨论的内容，实质上都是服从于一个目的，即减少计算模型的未知量数，从而达到降低对计算机资源的要求和提高计算效率的目的。对大型复杂的结构而言，如果直接对全结构进行离散并建立求解方程，无疑方程的规模很大。造成对计算机储存过高的要求，而且计算量也可能过大。如利用结构在构造和几何上的特点，将它分解为若干子结构，先在子结构的基础上进行离散和自由度的缩减，然后再集成的结构总体的求解方程的自由度可以大大减少，且在有相同形状子结构的情况下还可进一步省去形成相同形状子结构矩阵的计算工作量。5.3 节所讨论的就是关于子结构方法的有关表达格式和算法问题。5.4 节所讨论的是针对在几何形状上具有对称性和周期性的一类结构。着重阐述如何利用对称性和周期性的特点，只在结构的一部分上建立计算模型和求解方程，再从这部分结构的计算结果推广得到整个结构的结果的方法。其中包括面对称结构、轴对称结构和旋转周期结构。对于轴对称结构还包括轴对称载荷和非轴对称载荷两种情况。对于旋转周期结构还包括周期性载荷和非周期性载荷两种情况。5.4 节中关于上述各种情况，对数学模型的建立和求解方程的形式以及整个结构计算结果的表达都给予了具体的讨论。5.5 节中讨论在实际分析中已被较广泛应用的 Wilson 非协调元。其特点是保持低阶单元自由度不增加的情况下，通过增加内部自由度来提高单元的精度。但带来了在单元交界面上不满足协调性要求的缺点。因此又简要地介绍了如何检查非协调元的解是否满足有限单元收敛准则的分片试验方法，以及使 Wilson 非协调元通过分片试验的一种简便方法。

5.2 应力计算结果的处理与改善

应用位移元进行有限元分析时，未知场函数是位移。从系统平衡方程解得的是各个结点的位移值。而实际工程问题所需要的往往是应力的分布，特别是最大应力的位置和数值。为此，要利用以下公式由已解得的结点位移来求出单元内的应力。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \tag{5.2.1}$$

我们知道应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是插值函数 N 对坐标进行求导后得到的矩阵。求导一次，插值多项式的次数就降低一次。所以通过导数运算得到的应变$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和应力$\boldsymbol{\sigma}$ 精度较位移 $\boldsymbol{u}$ 降低了，即利用以上两式得到的$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和$\boldsymbol{\sigma}$ 的解答可能具有较大的误差。应力解的误差表现于：

(1) 单元内部不满足平衡方程；

(2) 单元与单元的交界面上应力一般不连续；

(3) 在力的边界 S_σ 上一般也不满足力的边界条件。

因为平衡方程式、力的边界条件以及单元交界面上内力的连续条件是泛函 Π_p 的欧拉方程，只有在位移变分完全任意的情况下，欧拉方程才能精确地满足。在有限单元法中，只有当单元尺寸趋于零时，才能精确地满足平衡方程、力的边界条件以及单元交界面上力的连续条件；当单元尺寸为有限值时，这些方程只能是近似地满足。除非实际应力变化的阶次等于或低于所采用单元的应力的阶次，得到的只能是近似解答。因此，如何从有限元位移解得到较好的应力解答，就成为需要研究和解决的问题。

在这一节中我们将首先讨论位移元应力解的性质以及等参元应力解的特点。然后介绍几种应力解的处理和改善方法，这些方法不仅适用于等参元，也适用于广义坐标有限元。其中有一些是简单易行而又行之有效的，在实际计算中经常采用；有些则伴随有相当大的计算工作量，必要时才采用。

5.2.1 应力近似解的性质

在 1.4.4 节中我们已指出用最小位能原理求得的位移解具有下限性质。由于近似解的总位能一般总是大于真正解的总位能，而近似解的应变能一般地总是小于真正解的应变能。因此，得到的位移解总体上偏小。但是用以求得的应变和应力解的性质如何呢？

由 1.4.4 节中最小位能原理可知，对于弹性力学问题，如果位移的真正解是 $\boldsymbol{u}$，相应的应变和应力的真正解是$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和$\boldsymbol{\sigma}$，并有近似解 $\boldsymbol{u}^*$，$\boldsymbol{\varepsilon}^*$及$\boldsymbol{\sigma}^*$，近似解可写作

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \tag{5.2.2}$$

根据(1.4.54)式并写作矩阵形式，则有

$$\begin{aligned}\Pi_p(\boldsymbol{u}^*) &= \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}^* \,\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{d}V - \int_V (\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V \\ &\quad - \int_{S_\sigma} (\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S && \Rightarrow \Pi_p(\boldsymbol{u}) \\
&\quad + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{D}\delta\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V - \int_V \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S && \Rightarrow \delta\Pi_p \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_V \delta\,\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{D}\delta\,\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V && \Rightarrow \delta^2\Pi_p \\
&= \Pi_p(\boldsymbol{u}) + \delta\Pi_p + \delta^2\Pi_p
\end{aligned} \tag{5.2.3}
$$

由于泛函变分要求 $\delta\Pi_p=0$，因此(5.2.3)式所示近似解的总位能泛函可进一步表示为

$$
\Pi_p(\boldsymbol{u}^*) = \Pi_p(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{d}V \tag{5.2.4}
$$

对于一个具体给定问题，它的真正的总位能 $\Pi_p(\boldsymbol{u})$是个不变量，所以求 $\Pi_p(\boldsymbol{u}^*)$的极小值问题归结为求 $\delta^2\Pi_p$ 极小值的问题。我们把 $\delta^2\Pi_p$ 写成离散形式并称它为泛函 χ

$$
\begin{aligned}
\chi(\boldsymbol{\varepsilon}^*,\boldsymbol{\varepsilon}) = \delta^2\Pi_p(\boldsymbol{\varepsilon}^*,\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{d}V \\
&= \sum_{e=1}^{M}\int_{V_e} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{5.2.5}
$$

式中 M 是系统离散的单元总数。对于线弹性问题，上式还可以表示为

$$
\chi(\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{e=1}^{M}\int_{V_e} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}V \tag{5.2.6}
$$

由(5.2.3)式、(5.2.5)式以及(5.2.6)式可见，求 $\Pi_p(\boldsymbol{u}^*)$极小值的问题，从力学上解释是求位移变分 $\delta\boldsymbol{u}$ 所引起的应变能为极小值的问题；从数学上解释是求解应变差值 $\boldsymbol{\varepsilon}^*-\boldsymbol{\varepsilon}$或应力差值$\boldsymbol{\sigma}^*-\boldsymbol{\sigma}$ 的加权二乘最小值问题。由此我们可以认识应变和应力近似解$\boldsymbol{\varepsilon}^*$和$\boldsymbol{\sigma}^*$的性质，它们是真实应变$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和真实应力$\boldsymbol{\sigma}$ 在加权最小二乘意义上的近似解。近似解应变$\boldsymbol{\varepsilon}^*$(或应力$\boldsymbol{\sigma}^*$)和真正解应变$\boldsymbol{\varepsilon}$ (或应力$\boldsymbol{\sigma}$)的差值应满足加权 $\boldsymbol{D}$(或 $\boldsymbol{C}$)的最小二乘。

从以上结论我们可以得到应变解或应力解的一个重要特点：应变近似解和应力近似解必然在真正解上下振荡。并在某些点上，近似解正好等于真实解，也即在单元内存在最佳应力点。应力解的这个特点将有助于我们处理应力计算的结果，改善应力解的精度。

5.2.2 等参元的最佳应力点

在上一小节中，已把利用位移元进行有限元应力分析归结为求泛函 χ 的极小值问题。即求解下式

$$
\delta\chi(\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{e=1}^{M}\int_{V_e} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{\sigma}^*\,\mathrm{d}V = 0 \tag{5.2.7}
$$

或

$$
\delta\chi(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{u}) = \sum_{e=1}^{M}\int_{V_e} (\mathrm{L}\boldsymbol{u}^* - \mathrm{L}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\delta(\mathrm{L}\boldsymbol{u}^*)\mathrm{d}V = 0 \tag{5.2.8}
$$

假如近似解 $\boldsymbol{u}^*$是 p 次多项式，L 是 m 阶微分算子，令 $n=p-m$，则$\boldsymbol{\varepsilon}^*$或$\boldsymbol{\sigma}^*$是 n 次多项式，为了使上面二式能够精确积分，至少应采用 $n+1$ 阶的高斯积分。当取 $n+1$ 阶高斯积分时，由 4.4 节可知，积分精度可达 $2(n+1)-1=2n+1$ 次多项式，也就是该被积函数

是$2n+1$次多项式的情况仍可达到精确积分。这说明在现在的情况下，如果 Jacobi 行列式是常数，即使(5.2.7)式中的真实应力$\boldsymbol{\sigma}$是$n+1$次多项式，数值积分仍是精确的。即数值积分式

$$\sum_{e=1}^{M}\int_{V_e}(\boldsymbol{\sigma}^*-\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{\sigma}^*\mathrm{d}V=\sum_{e=1}^{M}\sum_{i=1}^{n+1}H_i(\boldsymbol{\sigma}_i^*-\boldsymbol{\sigma}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{\sigma}_i^*=0 \tag{5.2.9}$$

是精确成立的。

若每一单元中的各高斯积分点上$\delta\boldsymbol{\sigma}_i^*(i=1,2,\cdots n+1)$的每一分量的变分是独立的，上式成立必须有

$$\boldsymbol{\sigma}_i^*-\boldsymbol{\sigma}_i=0 \tag{5.2.10}$$

前面已经论证了$\boldsymbol{\sigma}$可以是$n+1$次多项式，所以上式表明在高斯积分点上，近似解$\boldsymbol{\sigma}_i^*$可以达到$n+1$次的精度，即可以具有比$\boldsymbol{\sigma}_i^*$自身(n次多项式)高一次的精度。

归纳以上讨论，可以得到如下结论：如果位移近似解$\boldsymbol{u}^*$是p次多项式，L 是m阶微分算子，应变近似解$\boldsymbol{\varepsilon}^*$或应力近似解$\boldsymbol{\sigma}^*$是$n=p-m$次多项式。若真正解$\boldsymbol{\varepsilon}$或$\boldsymbol{\sigma}$是$n+1$次多项式，则在$n+1$阶高斯积分点上，近似解$\boldsymbol{\sigma}^*$(或$\boldsymbol{\varepsilon}^*$)和真正解$\boldsymbol{\sigma}$(或$\boldsymbol{\varepsilon}$)在数值上是相等的，即近似解$\boldsymbol{\sigma}^*$(或$\boldsymbol{\varepsilon}^*$)在积分点上具有比本身高一次的精度。

但应指出，在以上讨论中是假定了单元中反映坐标变换的 Jacobi 行列式$|\boldsymbol{J}|$是常数，同时也假定了每个单元内$\boldsymbol{\sigma}_i$(或$\boldsymbol{\varepsilon}_i$)的每个分量的变分是独立的。所以上述结论只是对结点是等间距分布的一维单元是严格的，而对于二维和三维单元则只能是近似的。在一般情况下我们不能判定真正解多项式的次数，但是可以得到如下实用的推论：在等参元中，单元中$n+1$阶($n=p-m$)高斯积分点上的应变或应力近似解比其它部位具有较高的精度，因此我们称$(n+1)$阶高斯积分点是等参元中的最佳应力点。

图 5.1 所示为真正解ε的一假定的二次变化曲线，当采用二次单元求解时，可以得到它的分段线性近似解$\boldsymbol{\varepsilon}^*$。在$n+1=2$高斯积分点上，两者的数值相等。

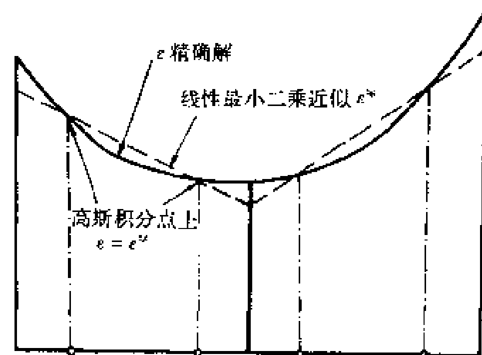


图 5.1　二次应变$\boldsymbol{\varepsilon}$与分段线性最小二乘近似解$\boldsymbol{\varepsilon}^*$

从前面的讨论中已知，由位移元得到的位移解在全域是连续的，应变和应力解在单元内部是连续的而在单元间是不连续的，即在单元边界上发生突跳。因此同一个结点，由围绕它的不同单元计算得到的应变值和应力值是不同的。另方面在边界上应力解一般地也与力的边界条件不相符合。等参元虽然在$n+1$阶高斯积分点上应力具有较高的精度，但

在结点上计算得到的应力精度却较差。通常实际工程问题中我们感兴趣的是单元边缘和结点上的应力，因此需对计算得到的应力进行处理，以改善所得的结果。从 5.2.3 节开始，一直到 5.2.7 节，我们将介绍几种应力处理的方法，可根据不同要求，适当地选用。

5.2.3 单元平均或结点平均

最简单的处理应力结果的方法是取相邻单元或围绕结点各单元应力的平均值。

1. 取相邻单元应力的平均值

这种方法最常用于 3 结点三角形单元中。这种最简单而又相当实用的单元得到的应力解在单元内是常数。可以将其看作是单元内应力的平均值，或是单元形心处的应力。由于应力近似解总是在真正解上下振荡，可以取相邻单元应力的平均值作为此二个单元合成的较大四边形单元形心处的应力。这样处理十分逼近真正解，能取得良好的结果。图 5.6(a)中，一厚壁圆球壳离散为一系列 3 结点三角形单元。图(c)中小三角形为计算得到的单元应力值，可以看到它们在真正解的上下振荡。小圈为相邻单元应力的平均值，基本上落在真正解上。

取平均应力可以采用算术平均，即

$$\text{平均应力} = \frac{1}{2}(\text{单元①应力} + \text{单元②应力})$$

也可以采用精确一些的面积加权平均，即

$$\text{平均应力} = \frac{\text{单元①应力} \times \text{单元①的面积} + \text{单元②应力} \times \text{单元②面积}}{\text{单元①面积} + \text{单元②面积}} \tag{5.2.11}$$

当相邻单元面积相差不大时，二者的结果基本相同。在单元划分时应避免相邻单元的面积相差太多，从而使求解的误差相近。

2. 取围绕结点各单元应力的平均值

取围绕该结点周围的相关单元计算得到该结点应力的平均值

$$\sigma_i = \frac{1}{m}\sum_{e=1}^{m}\sigma_i^e \tag{5.2.12}$$

$1 \sim m$ 是围绕在 i 结点周围的全部单元。取平均值时也可进行面积加权。

应注意这样得到的结点应力值是围绕该结点的有限区域内的应力平均值。这种处理方法对于等参元来说并不能从根本上改善结点应力精度差的问题。

5.2.4 总体应力磨平

前面已经指出用位移元解得的应力场在全域是不连续的，我们可以用总体应力磨平的方法来改进计算结果，得到在全域连续的应力场。

总体磨平应力方法就是构造一个改进的应力解 $\boldsymbol{\sigma}$，此改进解在全域是连续的。改进解$\boldsymbol{\sigma}$与有限单元法求得的应力解$\boldsymbol{\sigma}^*$应满足加权最小二乘的原则。也就是说，可以建立如下泛函

$$A(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{e=1}^{M}\int_{V_e}\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}V \tag{5.2.13}$$

式中 M 是单元总数，σ^* 是利用已求得的结点位移代入(5.2.1)式得到的应力解；σ 是待求的应力改进值，它在单元内的分布也取插值的形式，即设

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n_e} \tilde{N}_i \sigma_i \tag{5.2.14}$$

其中 σ_i 是待求的改进后的结点应力值；n_e 是单元的结点数，$\tilde{N}_i$ 是插值函数矩阵。用于应力插值的单元结点可以同于求解位移时的结点，这时应力插值函数 $\tilde{N}_i$ 同于位移插值函数 N_i；应力插值也可采用与位移插值不同的结点数，例如求解位移时采用二次单元，求解应力改进值时可用一次单元。

将 σ 代入(5.2.13)式并进行变分，并考虑到 $\delta\sigma_i$ 的任意性，可得

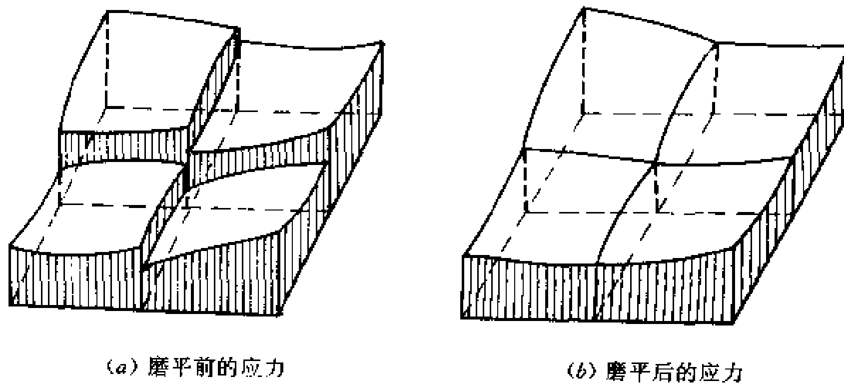
$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N)$$

即有

$$\sum_{e=1}^{M} \int_{V_e} (\sigma^* - \sigma)^{\mathrm{T}} C \tilde{N}_i \mathrm{d}V = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{5.2.15}$$

式中 N 是进行应力磨平时全部单元的结点总数。(5.2.15)式是 $N\times S$ 阶的线性代数方程组，S 是应力分量数。求解(5.2.15)式可以得到各个结点的应力改进值，再将求得的结点应力改进值代入(5.2.14)式就可以得到各单元的应力改进值。

如果插值函数 $\tilde{N}_i$ 是协调的，此应力改进解在单元交界面上是连续的，也即在全域是连续的。如果在求解方程组(5.2.15)式前已将力边界 S_σ 上的应力边界条件引入(其方法与引入给定位移边界条件相同)，则此应力改进解也将满足力的边界条件。虽然经总体磨平改进后的应力解 σ 在单元内部仍不能精确地满足平衡方程，但一般地说将较原来的应力解 σ^* 有所改善。总体应力磨平示意图见图 5.2。



(a) 磨平前的应力　　(b) 磨平后的应力

图 5.2　总体应力磨平示意

应力总体磨平方法的主要缺点是计算工作量十分庞大。方程组(5.2.15)的总阶数为 $N\times S$，当求解位移场和应力总体磨平时采取相同的结点数 N 时，方程组(5.2.15)的总阶数将大大超过原来求解结点位移时的系统方程组的阶数，这是由于应力分量数 S 总是大于结点位移自由度数。总体应力磨平时，需要形成和求解这样庞大的方程组以及需要耗费甚至比原来求解位移场时更多的机时。实际上采用这种方案改进应力解，相当于进行二次有限元的计算，一次求位移场，一次求应力场。

5.2.5 单元应力磨平

为了减少改进应力结果的工作量，可以采用单元应力的局部磨平。可以指出：当单元尺寸不断缩减时，单元的加权最小二乘和单元未加权的最小二乘是相当的，由于函数的正定性，全域的加权最小二乘是各单元最小二乘的和。因此，当单元足够小时，磨平可以在各个单元内进行，即(5.2.13)式的泛函只取一个单元，并令权函数 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$，也就是通过使泛函

$$A_e(\boldsymbol{\sigma}^*,\boldsymbol{\sigma}) = \int_{V_e} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}V \tag{5.2.16}$$

为最小求应力改进值 $\boldsymbol{\sigma}$。应力改进值仍采用结点应力 $\boldsymbol{\sigma}_i$ 的插值表示

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{n_e} \widetilde{N}_i \boldsymbol{\sigma}_i \tag{5.2.17}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_i$ 是经改进的结点应力，$\widetilde{N}_i$ 是改进应力的插值函数，上式代入(5.2.16)式并变分

$$\frac{\partial A_e}{\partial \boldsymbol{\sigma}_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n_e)$$

或有

$$\int_{V_e} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}} \widetilde{N}_i \mathrm{d}V = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n_e) \tag{5.2.18}$$

上式是以 $\boldsymbol{\sigma}_i$ 为未知量的线性代数方程组，利用解析表达式或高斯积分求出各方程的系数后，可解得 $\boldsymbol{\sigma}_i$，进而利用(5.2.17)式可计算得到单元内任何一点的应力值。

由于采用了不加权的最小二乘，在(5.2.16)式中各应力分量不再耦合，因此按(5.2.18)式磨平应力相当于将各个应力分量分别磨平。由此我们可以只磨平主要应力分量或我们有兴趣的应力分量，而不一定将全部应力分量都进行磨平。例如在实际问题中 σ_x 为主要应力，我们可以单独磨平 σ_x。这时有

$$A_e = \int_{V_e} \frac{1}{2}(\sigma_x^* - \sigma_x)^2 \mathrm{d}V \tag{5.2.19}$$

其中 σ_x 是待求的 x 方向应力的改进值；σ_x^* 是原有限元的计算值。令

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{n_e} \widetilde{N}_i \sigma_{xi} \tag{5.2.20}$$

代入(5.2.19)式变分则有

$$\int_{V_e} (\sigma_x^* - \sigma_x) N_i \mathrm{d}V = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n_e) \tag{5.2.21}$$

这时需求解的方程组(5.2.21)只是有限的 n_e 个，不需费多少计算量就可以很方便地求得 σ_x 在结点的改进值 σ_{xi}。

对于等参元来说，有了单元内应力局部磨平的方法，可以利用精度较高的高斯积分点的应力值来改进等参元结点应力的近似性质。以二维单元为例，如果是二次等参元，插值函数中的完全多项式是二次，即 $p=2$。对于 C_0 型单元 $m=1$。这时 $p-m+1=2$，若取 2 阶高斯积分，则在 2×2 个高斯积分点上有限元的应力计算值 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 有较高的精度。如果进行应力磨平时只要求得到 4 个角点的应力改进值，尽管在计算位移时是 8 结点二次等参元，但进行应力磨平时，单元结点数可只取 4 个，即用二维双线性单元进行应力磨平。磨平时各

应力分量分别进行，这时应力磨平插值函数 $\tilde{N}_i$ 应采用双线性函数，即

$$\sigma = \sum_{i=1}^{4} \tilde{N}_i \sigma_i, \tilde{N}_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \tag{5.2.22}$$

令在 2×2 高斯积分点上有 $\sigma = \sigma^*$。4 个高斯积分点的坐标（见图 5.3）如下

$$\text{I}\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \text{II}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{III}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \text{IV}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

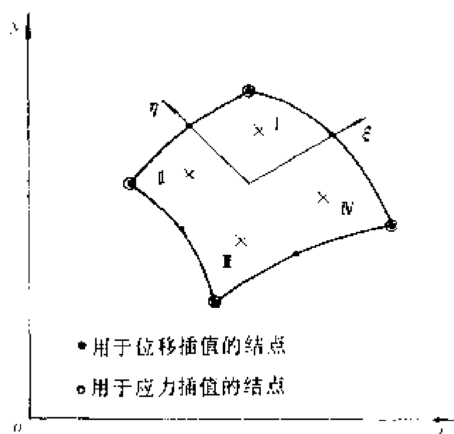


图 5.3　二维等参元

将高斯点坐标代入(5.2.22)式得到下面的等式：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\text{I}}^* \\ \sigma_{\text{II}}^* \\ \sigma_{\text{III}}^* \\ \sigma_{\text{IV}}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1(\text{I}) & \tilde{N}_2(\text{I}) & \tilde{N}_3(\text{I}) & \tilde{N}_4(\text{I}) \\ \tilde{N}_1(\text{II}) & \tilde{N}_2(\text{II}) & \tilde{N}_3(\text{II}) & \tilde{N}_4(\text{II}) \\ \tilde{N}_1(\text{III}) & \tilde{N}_2(\text{III}) & \tilde{N}_3(\text{III}) & \tilde{N}_4(\text{III}) \\ \tilde{N}_1(\text{IV}) & \tilde{N}_2(\text{IV}) & \tilde{N}_3(\text{IV}) & \tilde{N}_4(\text{IV}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \tag{5.2.23}$$

式中 $\sigma_{\text{I}}^*, \sigma_{\text{II}}^*, \sigma_{\text{III}}^*, \sigma_{\text{IV}}^*$ 是有限元中已求出的 4 个高斯点相应的应力分量；$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ 是磨平后应力的结点值；转换矩阵由(5.2.22)式的第二式代入高斯点坐标后的插值函数值构成。

由(5.2.23)式求逆可得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\text{I}}^* \\ \sigma_{\text{II}}^* \\ \sigma_{\text{III}}^* \\ \sigma_{\text{IV}}^* \end{Bmatrix} \tag{5.2.24}$$

其中

$$a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5.2.25}$$

各应力分量均可用(5.2.24)进行求解。

(5.2.21)式采用 4 结点磨平与(5.2.24)式利用 2×2 高斯积分点应力值外推得到的结点应力是相同的。但使用(5.2.24)式更为方便。这种改进结点应力的方法亦称之为应力线性外推。求得改进的应力结点值后，如需要求单元内部的应力值仍可按(5.2.22)第一式进行计算。

采用单元局部应力磨平的方法，对于同一结点，由不同相邻单元求得的应力改进值通常是不相同的。可把相关单元求得的改进结点值再取平均作为最后结点的应力值。

一般情况下，采用局部应力磨平处理可以得到较好的结果，而计算量是很小的，所以得到较广泛的应用。

例　图 5.4 所示为一受均布载荷的悬臂梁，梁的高度和跨度比为 $h/l=1/20$。分为四个 8 结点二次等参元，并采用 2×2 高斯积分。解出的位移和正应力 σ_x 的结果是非常好的。但计算得到的剪应力在单元内呈抛物线分布，与理论解相差甚远，而在高斯积分点上

计算值与理论值符合情况十分良好。经应力局部磨平处理后，剪应力的改进值和理论值十分一致，取得良好的效果。

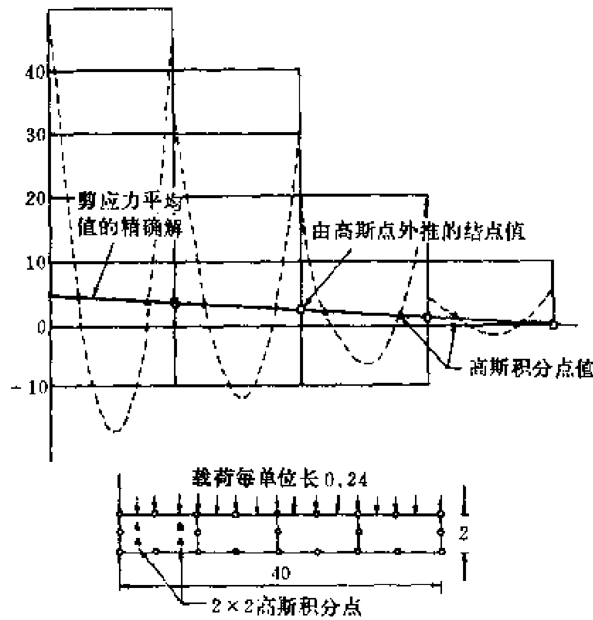


图 5.4　受均布载荷的悬臂梁

对于三维二次单元，若有 2×2×2 共 8 个高斯积分点上的应力，采用与二维单元相类同的线性外推，即局部应力磨平时取 8 结点线性单元进行插值，可以得到与(5.2.24)式类似的结果。8 个结点上的应力改进值 σ_i 可由下列方程解得：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\\ \sigma_7\\ \sigma_8\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c&b&b&c&d&c\\ b&a&b&c&c&b&c&d\\ c&b&a&b&d&c&d&c\\ b&c&b&a&c&d&c&b\\ b&c&d&c&a&b&c&b\\ c&b&c&d&b&a&b&c\\ d&c&b&c&c&b&a&b\\ c&d&c&b&b&c&b&a\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{\mathrm{I}}^*\\ \sigma_{\mathrm{II}}^*\\ \sigma_{\mathrm{III}}^*\\ \sigma_{\mathrm{IV}}^*\\ \sigma_{\mathrm{V}}^*\\ \sigma_{\mathrm{VI}}^*\\ \sigma_{\mathrm{VII}}^*\\ \sigma_{\mathrm{VIII}}^*\end{Bmatrix} \tag{5.2.26}$$

其中

$$a=\frac{5+3\sqrt{3}}{4},\quad b=-\frac{\sqrt{3}+1}{4} \tag{5.2.27}$$

$$c=\frac{\sqrt{3}-1}{4},\quad d=\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$$

式中 $\sigma_{\mathrm{I}}^*,\sigma_{\mathrm{II}}^*,\cdots,\sigma_{\mathrm{VIII}}^*$是 2×2×2 高斯积分点上由有限元计算得到的应力。高斯应力点编号见图 5.5。

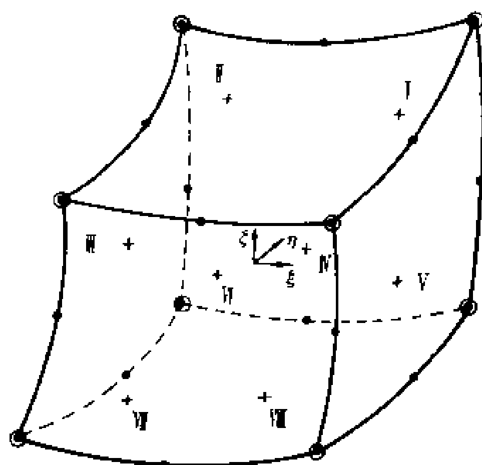


图 5.5　三维等参元

＋ 用于位移插值的结点

○ 用于应力插值的结点

5.2.6　子域局部应力磨平及外推

鉴于单元局部应力磨平不能充分利用最佳应力点应力具有的高一阶精度，同时一般不能得到在单元交界面上连续的应力，而总体应力磨平的计算工作量又太大，为了得到比单元局部磨平更好一些的应力结果而计算工作量又不太大，可以采用子域局部应力磨平。子域可选择在实际工程问题最感兴趣的区域，例如应力集中区域或是需要专门校核应力的区域。

子域局部应力磨平应力改进解的形式可以有多种不同的方案：

1. 应力改进解仍采用结点应力的插值表示式(5.2.14)

这种方案和 5.2.4 节所述总体应力磨平方法相同，仍采用(5.2.13)式定义的泛函，只是单元数 M 只限于子域内的单元。例如二维四边形单元可采用 4 个单元作为子域。

2. 应力改进解采用解析函数形式

这种方案是在整个子域内假设改进后的应力解的解析表达式，这个解析表达式中包含有待定参数，要求解析解 $\boldsymbol{\sigma}$ 和原有限元应力解 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 满足加权或不加权的最小二乘，以此确定解析表达式中的待定参数。例如改进应力解 $\boldsymbol{\sigma}$ 的解析表达式可采用多项式的形式

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}y + \boldsymbol{d}x^2 + \boldsymbol{e}xy + \boldsymbol{f}y^2 + \cdots \qquad (5.2.28)$$

式中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\cdots$ 都是待定参数。

将(5.2.28)式代入(5.2.13)式并变分，得到

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{a}} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{b}} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{f}} = 0, \quad \cdots \qquad (5.2.29)$$

由(5.2.29)方程组可解得待定参数 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$。如果预先使各个应力分量的待定系数满足平衡方程和力的边界条件，则可以得到更好一些的结果。例如满足平面问题平衡方程的各个

应力分量可以假设为

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \cdots \\
\sigma_y &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \cdots \\
\tau &= \gamma_1 - \beta_3 x - \alpha_2 y - \frac{1}{2}\beta_5 x^2 - 2(\alpha_4 + \beta_6)xy - \frac{1}{2}\alpha_3 y^2 - \cdots
\end{aligned}
\tag{5.2.30}
$$

多项式次数的选择应根据实际应力可能分布的情况进行。并不是说解析表达式的多项式次数越高就越精确。由于有限元的应力解有在真解附近振荡的特点，过高次数的多项式可能导致改进解呈虚假的波浪形分布。实际处理应力时，一般取 2～3 次多项式是合适的。

实际计算中，泛函 $A(\sigma^*,\sigma)$ 可采用不加权的最小二乘形式。如同单元应力局部磨平的情况，各个应力分量在(5.2.29)式中不再耦合，因此各个应力分量的磨平可以单独进行，这就使计算工作量大大缩减。

确定了待定参数后，可由改进解的解析表达式求得局部区域内任一点的改进后的应力值，也可求得边界上任意点的改进应力值。改进后的应力场在这个被磨平的局部区域中呈连续分布，并具有与原有限元应力解符合加权最小二乘的性质。当各个应力分量分别磨平(不加权的最小二乘)时，改进应力解与原应力解误差的平方在被磨平的局部区域上的和达到最小。

当网格划分合适时，可选取一个单元条进行局部应力处理。磨平仍采用不加权的最小二乘，因此各应力分量可以分别进行磨平。又因局部区域是一个狭窄的单元条，因此可以按一维问题沿单元条方向进行磨平。计算十分简单，只要单元条选取合适，可以取得良好的效果。

我们以厚壁球壳为例，说明这种磨平方案的实施方法。当厚壁球壳受内压或外压时，应力分布只与 r 有关。采用三角形常应变单元进行有限元计算时，典型的网格条由两条径向射线构成，网格条上划分若干三角形单元。可取一个单元条用最小二乘法进行应力磨平。假设沿壁厚磨平后的应力 σ 分布为 n 次曲线：

$$
\sigma = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n \tag{5.2.31}
$$

若单元条上共有 m 个单元，则每个单元有一个由有限元计算得到的应力值 σ_i^*，$i=1,2,\cdots,m$，被认为作用在单元形心 r_i 处。

现在建立最小二乘泛函。在第 i 个单元形心 r_i 处，磨平后的应力值是

$$
\sigma(r_i) = a_0 + a_1 r_i + a_2 r_i^2 + \cdots + a_n r_i^n \quad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{5.2.32}
$$

在各单元形心上磨平后的应力与原应力计算值的差

$$
e_i = \sigma(r_i) - \sigma_i^*
$$

全部单元形心上误差平方的总和为

$$
\sum e_i^2 = \sum_{i=1}^{m} [\sigma(r_i) - \sigma_i^*]^2
$$

建立最小二乘泛函

$$
\chi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} [\sigma(r_i) - \sigma_i^*]^2 \tag{5.2.33}
$$

泛函变分应有

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_j} = 0 \qquad (j = 0,1,2,\cdots,n) \tag{5.2.34}$$

将(5.2.33)式代入上式，得

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{m} [\sigma(r_i) - \sigma_i^*] \frac{\partial \sigma(r_i)}{\partial a_j} = 0 \qquad (j = 0,1,2,\cdots,n)$$

由于

$$\frac{\partial \sigma(r_i)}{\partial a_j} = r_i^j$$

我们得到方程组

$$\sum_{i=1}^{m} [\sigma(r_i) - \sigma_i^*] r_i^j = 0 \quad (j = 0,1,2,\cdots,n) \tag{5.2.35}$$

上式共有$(n+1)$个方程，用以求解$(n+1)$个待定参数 $a_0 \sim a_n$。

把方程组(5.2.35)式展开并写成矩阵形式则有

$$\begin{bmatrix} m & \sum_1^m r_i & \sum_1^m r_i^2 & \cdots & \sum_1^m r_i^n \\ \sum_1^m r_i & \sum_1^m r_i^2 & \sum_1^m r_i^3 & \cdots & \sum_1^m r_i^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_1^m r_i^n & \sum_1^m r_i^{n+1} & \sum_1^m r_i^{n+2} & \cdots & \sum_1^m r_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_1^m \sigma_i^* \\ \sum_1^m \sigma_i^* r_i \\ \vdots \\ \sum_1^m \sigma_i^* r_i^n \end{Bmatrix} \tag{5.2.36}$$

由展开式可以看到系数矩阵是对称的。求出待定系数 $a_0 \sim a_n$ 后，可由磨平后应力的解析表达式(5.2.31)式求得单元条内各点磨平后的应力以及沿单元条方向内外表面的应力值。

图 5.6(a)是厚壁球壳网格划分。(b)是取出典型单元条及按一维问题处理的示意图。(c)是 σ_θ, σ_r 磨平后的结果。它们的解析表达式取二次多项式，磨平后的应力与解析解的结果符合得非常好，在图上已不能区分它们的差别。(d)是选取过高多项式处理的应力曲线，呈虚假的波浪形。

还可以指出，如将每两个相邻三角形单元的 σ_i^* 值平均并看作是该两个单元共同形心处的应力，则此平均值也正好落在磨平后的应力曲线上。因此在5.2.3节中介绍的取相邻单元应力平均值的方法正是常应变单元常用的应力处理方法，其有效性在这里也得到了证明。

5.2.7 引入力的边界条件修正边界应力

在工程实际问题中，所关心的最大应力一般出现在边界上。为了在边界上得到更为精确的应力值，可以直接引入力的边界条件来修正边界的应力值。在域的边界上建立局部坐标 x'、y'、z'。令 z' 轴沿边界外法线方向，x' 及 y' 则沿另两个与之相垂直的方向，例如可取在另二个主应力方向。对此局部坐标有应力应变关系：

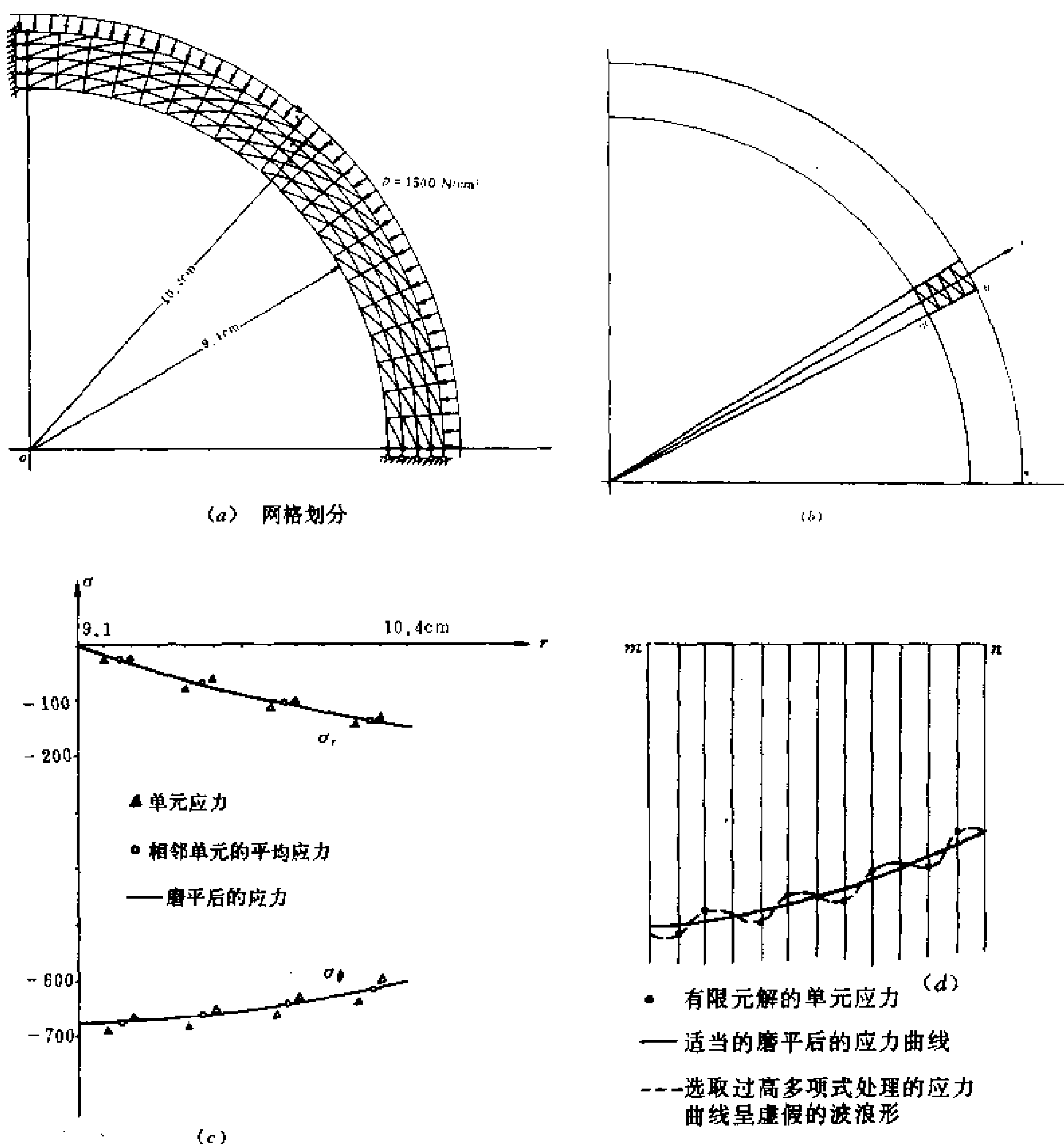


图 5.6 厚壁圆球壳的有限元计算模型及应力磨平

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{x'} + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{y'} + \varepsilon_{z'})\right] \\
\sigma_{y'} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{y'} + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{z'})\right] \\
\sigma_{z'} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{z'} + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'})\right]
\end{aligned}
\tag{5.2.37}
$$

引入力的边界条件修正应力。令 $\sigma_{z'}=-p$，代入上式第三式解出 $\varepsilon_{z'}$，再代入第一、二式则可得到计算 $\sigma_{x'}$和 $\sigma_{y'}$的修正公式：

$$
\sigma_{x'} = \frac{E(\varepsilon_{x'} + \nu\varepsilon_{y'}) - \nu(1+\nu)p}{1-\nu^2}
$$

$$\sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_{x'}) - \nu(1+\nu)p}{1-\nu^2} \tag{5.2.38}$$

式中 $\varepsilon_{x'}$ 及 ε_y 为原有限元解得的在局部坐标系中的应变。

采用以上公式的计算结果和未经修正的(5.2.37)式所给出的结果比较，边界应力值有相当大的改进。

5.3 子结构法

在工程实际中，特别是土木和船舶等结构中，有时利用子结构法进行分析是很有效的。例如图 5.7(*a*)所示为一个四层三跨的框架结构，其中各跨的框架梁是完全相同的。每一根梁上有三个孔作为通过管道之用。如用通常的分析方法，离散有孔的梁需要很多的单元和结点。如果采用子结构法可以大量减少数据的准备和输入、单元矩阵计算以及系统方程求解的工作量，还可以减少对计算机存储量的需要。可以选取典型结构的一部分作为结构子块，叫作一个子结构，子结构中也可以再套子结构，称为多重子结构。图 5.7(*b*)中的带孔梁可以处理为一个多重的子结构。

第一层子结构是图 5.7(*b*)所示的带有三个孔洞的单跨梁，12 个这样的子结构和模拟立柱的其他平面框架元件共同组成图 5.7(*a*)所示的框架结构。如将图 5.7(*b*)所示的子结构进一步划分为更简单的元件，则可得到第二层、第三层子结构如图 5.7(*c*)和(*d*)所示。

各层子结构中用以和其他子结构或其他单元相联结的结点称为交界面结点或外部结点，其余结点称为内部结点。例如图 5.7(*d*)所示第三层子结构有限元网格划分如图 5.8(*a*)，共 32 个二次单元 105 个结点，其中交界面结点只有 16 个。内部结点的自由度在子结构的刚度矩阵形成以后可以凝聚掉。这样一来第三层子结构可以看成是 16 个结点的一个超级单元如图 5.8(*b*)所示。四个这样的单元可进一步通过集成和凝聚成为一个 10 结点的超级单元，这就是第二层的子结构如图 5.8(*c*)所示。最后三个这样的单元经过集成和凝聚，再将端点自由度进行转换，可以得到一个 2 结点的梁单元作为子结构，如图5.8(*d*)所示。实际上它也是一个超级单元。

像图 5.8(*d*)这样的子结构在原框架中有 12 个，由于采用子结构方法，计算子结构需要的数据准备和刚度矩阵的计算只需要进行一次，而其余 11 个相同形状的子结构只要输入交界面结点的编号以及表明子结构方位的信息就可以了。此外，系统的总自由度数也大为减少，因此无论是计算的准备工作还是计算机的运行时间都可大量节省。

可以采用子结构方法的两种情况：

(1) 结构中可以划分出多块相同的部分，可取相同部分的结构作为子结构，例如上面所说的框架梁。相同的子结构块数越多，计算效率越高。

(2) 某些结构方案的变化只是在局部，而其余部分不变，则可将不变部分的结构划作若干个子结构，变化部分划成另外的子结构。当结构变化时只要改变其中某一、两个子结构就可以了。例如容器的主体是确定的，选择联结方案，可把主体容器编成一些子结构而联结部位编成另外的子结构。

子结构计算中需要讨论两方面问题：(1) 内部自由度的凝聚；(2) 坐标转换。

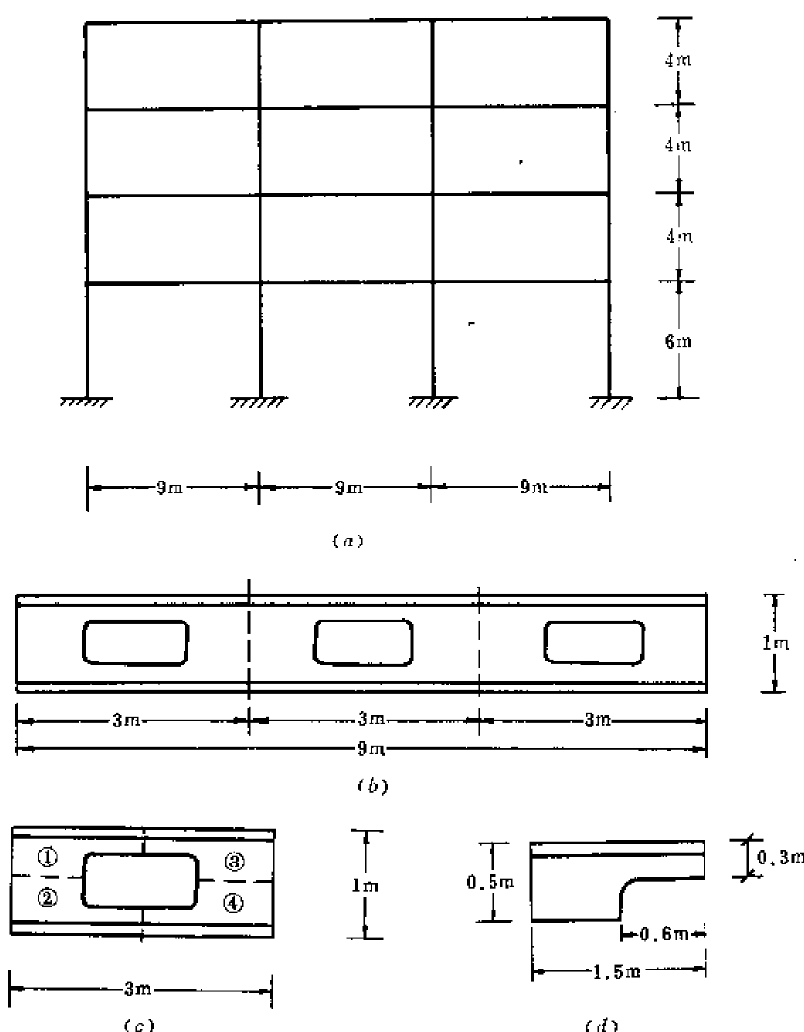


图 5.7　框架结构及其子结构分解

5.3.1　内部自由度的凝聚

在内部自由度没有凝聚之前，子结构实质上是一个具有相当多内部自由度的超级单元。为了减少系统的总自由度，在子结构与其他子结构或单元联结前，应在该层子结构内将内部自由度凝聚掉。为建立准备凝聚的子结构的系统方程，我们假定通过适当的结点编号，使子结构的刚度矩阵以及相应的结点位移和载荷列阵可以写成如下分块形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{bb} & \boldsymbol{K}_{bi} \\ \boldsymbol{K}_{ib} & \boldsymbol{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_b \\ \boldsymbol{a}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_b \\ \boldsymbol{P}_i \end{Bmatrix} \tag{5.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{a}_b$ 及 $\boldsymbol{a}_i$ 分别是交界面和内部结点的位移向量，刚度矩阵以及载荷列阵也分成与 $\boldsymbol{a}_b$ 和 $\boldsymbol{a}_i$ 相应的分块矩阵。

由(5.3.1)式的第二式可以得到

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{K}_{ii}^{-1}(\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{K}_{ib}\boldsymbol{a}_b) \tag{5.3.2}$$

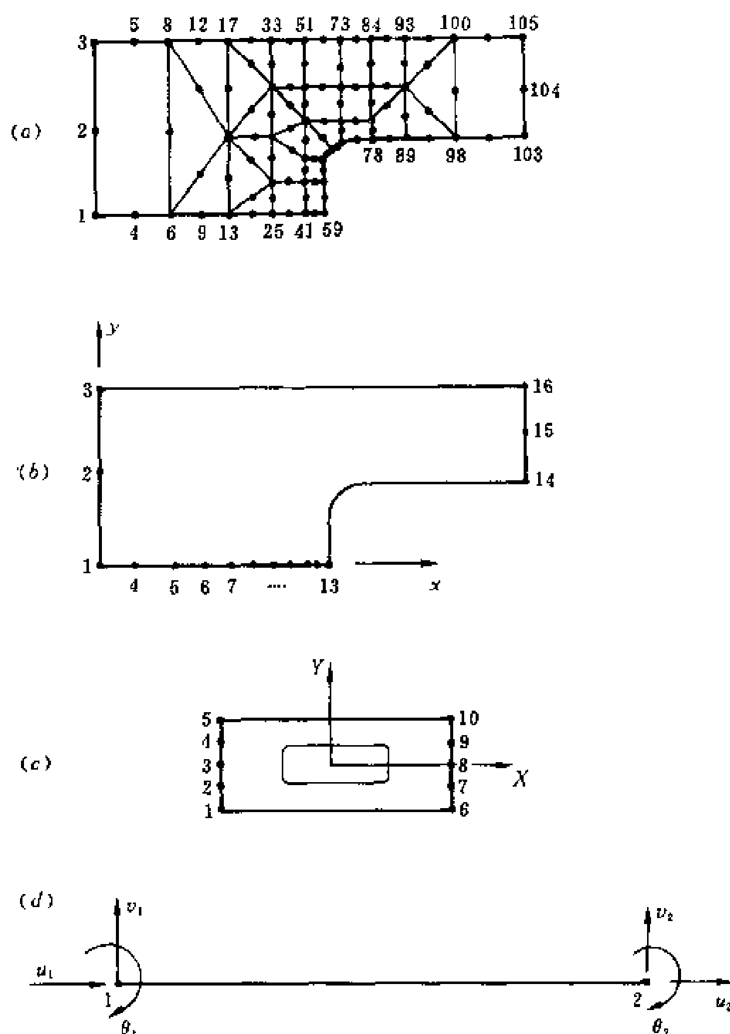


图 5.8 子结构的网格图

将上式代入(5.3.1)式的第一式，就得到凝聚后的方程：

$$(\boldsymbol{K}_{bb} - \boldsymbol{K}_{bi}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ib})\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{P}_b - \boldsymbol{K}_{bi}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{P}_i \tag{5.3.3}$$

可以简单地写成如下的形式

$$\boldsymbol{K}_{bb}^{*}\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{P}_b^{*} \tag{5.3.4}$$

其中：

$$\boldsymbol{K}_{bb}^{*} = \boldsymbol{K}_{bb} - \boldsymbol{K}_{bi}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ib} \tag{5.3.5}$$

$$\boldsymbol{P}_b^{*} = \boldsymbol{P}_b - \boldsymbol{K}_{bi}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{P}_i$$

需要指出的是从(5.3.1)式经凝聚得到(5.3.4)式并不是按(5.3.3)式所示的矩阵运算进行的，而是利用高斯-约当消去法进行消元运算，如果 $\boldsymbol{a}_i$ 是 k 阶向量，对方程(5.3.1)进行 k 次消去运算便可得到方程(5.3.4)式，每一次消元都有“正消”和“反消”两步(见第6章)。当然现在由于$\boldsymbol{a}_i$排列在$\boldsymbol{a}_b$的下面，消去应自下而上“逆序”进行。消去的结果得到

$$\begin{bmatrix} K_{bb}^* & 0 \\ K_{ib}^* & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_b \\ a_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_b^* \\ P_i^* \end{Bmatrix} \tag{5.3.6}$$

式中 K_{bb}^*，P_b^* 就是(5.3.4)式中经凝聚后的子结构的刚度矩阵和载荷列阵，它经过的消去修正就是(5.3.5)式的要求。K_{ib}^* 及 P_i^* 是由子结构交界面自由度转换到内部自由度的相关矩阵，它们由原来的相应矩阵经过的消去修正就是：

$$\begin{aligned} P_i^* &= K_{ii}^{-1} P_i \\ K_{ib}^* &= K_{ii}^{-1} K_{ib} \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

即(5.3.2)式中表示的关系。

上述计算过程形式上是清楚可行的，但它要求特定的结点编号，即每一子结构交界面结点要集中编号，这将不利于得到最小带宽，使得机器内存和计算量不合理地增加。因此必须加以改进。

我们在子结构内按最小半带宽的要求或其他合理的方式进行结点编号，这时结构的内部结点和交界面上的结点便不能全部集中在一起，一般来说可能集中成若干段。现以 a_i 和 a_b 各分成 2 段为例，子结构的系统方程为：

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(11)} & K_{ib}^{(11)} & K_{ii}^{(12)} & K_{ib}^{(12)} \\ K_{bi}^{(11)} & K_{bb}^{(11)} & K_{bi}^{(12)} & K_{bb}^{(12)} \\ K_{ii}^{(21)} & K_{ib}^{(21)} & K_{ii}^{(22)} & K_{ib}^{(22)} \\ K_{bi}^{(21)} & K_{bb}^{(21)} & K_{bi}^{(22)} & K_{bb}^{(22)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i^{(1)} \\ a_b^{(1)} \\ a_i^{(2)} \\ a_b^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i^{(1)} \\ P_b^{(1)} \\ P_i^{(2)} \\ P_b^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{5.3.8}$$

通过“顺序”和“逆序”的高斯-约当消去，将内部结点位移 a_i 的有关刚度矩阵转化为单位矩阵，方程(5.3.8)成为

$$\begin{bmatrix} I & K_{ib}^{*(11)} & 0 & K_{ib}^{*(12)} \\ 0 & K_{bb}^{*(11)} & 0 & K_{bb}^{*(12)} \\ 0 & K_{ib}^{*(21)} & I & K_{ib}^{*(22)} \\ 0 & K_{bb}^{*(21)} & 0 & K_{bb}^{*(22)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i^{(1)} \\ a_b^{(1)} \\ a_i^{(2)} \\ a_b^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i^{*(1)} \\ P_b^{*(1)} \\ P_i^{*(2)} \\ P_b^{*(2)} \end{Bmatrix} \tag{5.3.9}$$

由上式可得：对于交界面的结点位移

$$\begin{aligned} K_{bb}^{*(11)} a_b^{(1)} + K_{bb}^{*(12)} a_b^{(2)} &= P_b^{*(1)} \\ K_{bb}^{*(21)} a_b^{(1)} + K_{bb}^{*(22)} a_b^{(2)} &= P_b^{*(2)} \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

对于内部结点位移，它们可由外部结点位移求得：

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= P_i^{*(1)} - K_{ib}^{(11)} a_b^{*(1)} - K_{ib}^{*(12)} a_b^{(2)} \\ a_i^{(2)} &= P_i^{*(2)} - K_{ib}^{*(21)} a_b^{(1)} - K_{ib}^{*(22)} a_b^{(2)} \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

把子结构看作是一个超级“单元”时，(5.3.10)式可以按一般单元表示的形式为

$$K^e a^e = P^e$$

对于现在的“单元”有

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{bb}^{*(11)} & K_{bb}^{*(12)} \\ K_{bb}^{*(21)} & K_{bb}^{*(22)} \end{bmatrix}, \quad P^e = \begin{Bmatrix} P_b^{*(1)} \\ P_b^{*(2)} \end{Bmatrix}, \quad a^e = \begin{Bmatrix} a_b^{(1)} \\ a_b^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{5.3.12}$$

这时仅交界面上的结点自由度作为与其他单元联结的“单元”自由度，而全部内部自由度都已凝聚。在由系统求得交界面自由度后，回到子结构内部，利用(5.3.11)式分别求解各

子结构的内部结点自由度。

当 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_b$ 分段更多一些时，也按上述原则处理。但分段不宜过多，否则将导致凝聚的不方便。

5.3.2 坐标转换

在图 5.7(*c*)所示的结构中，子结构①，②，③，④虽然大小形状相同，但方位却各不相同。若每个子结构都取图 5.8(*b*)所示的局部坐标系 oxy，则它们对于局部坐标系的单元刚度矩阵是相同的，只需要计算一次。但是由于结构①～④构成的上一层子结构，如图 5.8(*c*)所示的第二层子结构的总体坐标 OXY 与子结构①～④的局部坐标 oxy 的方向是不同的，因此在集成第二层子结构前需进行必要的坐标转换。如在子结构交界面上的结点位移，在子结构局部坐标系 oxy 中为 $\boldsymbol{a}_b$，在上一层子结构(现在是第二层子结构)或结构的总体坐标系 OXY 中为 $\bar{\boldsymbol{a}}_b$，二者之间的转换关系为

$$\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{a}}_b \tag{5.3.13}$$

式中

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^s & & & \\ & \boldsymbol{\lambda}^s & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda}^s \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\lambda}^s$ 表示第 s 个子结构的一个结点坐标由局部坐标系转化为上一层子结构或结构的总体坐标系的转换矩阵，对角线上 $\boldsymbol{\lambda}^s$ 的个数就是 s 子结构交界面上的结点数(亦称外部结点数)。对于一般情况，我们假设局部坐标系的 x 轴与上一层子结构或总体坐标系的 X 轴夹角为 θ_x，局部坐标系的 y 轴与上一层子结构或总体坐标系的 Y 轴夹角为 θ_y，夹角以 X,Y 逆时针转到 x,y 的角度为正，见图 5.9，则转换子矩阵 $\boldsymbol{\lambda}^s$ 为

$$\boldsymbol{\lambda}^s = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} \\ l_{yX} & l_{yY} \end{bmatrix} \tag{5.3.14}$$

式中矩阵的各元素为二轴夹角的余弦。

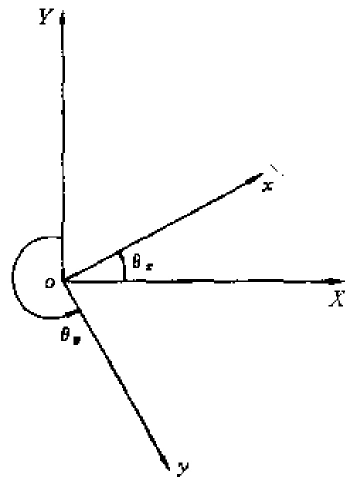


图 5.9 局部坐标和总体坐标之间的关系

图 5.7(*c*)中四个子结构的局部坐标系与上层子结构图 5.8(*c*)中的总体坐标的夹角分别为

对子结构① $(\theta_x)_1=(\theta_y)_1=0°$

对子结构② $(\theta_x)_2=0°;(\theta_y)_2=180°$

对子结构③ $(\theta_x)_3=180°;(\theta_y)_3=0°$

对子结构④ $(\theta_x)_4=(\theta_y)_4=180°$

因此它们的坐标转换矩阵分别为

$$\boldsymbol{\lambda}^{①} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\lambda}^{②} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^{③} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda^{④} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

引入坐标转换矩阵 $\boldsymbol{\lambda}$ 后，对子结构的 $\boldsymbol{K}_{bb}^{*}$ 和 $\boldsymbol{P}_{b}^{*}$ 应作如下变换

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{bb}^{*}\boldsymbol{\lambda} \qquad (5.3.15)$$
$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{b}^{*}$$

$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 就是子结构经内部自由度凝聚并转换到上一层子结构或结构的总体坐标中的刚度矩阵和结点载荷列阵。

变换后可作子结构的集成，这个集成过程和一般单元一样，每个子结构的作用和一个普通单元一样。若是多层子结构则每层都需自由度凝聚和坐标转换，然后集成，再自由度凝聚，直至最外一层子结构。

5.4 结构对称性和周期性的利用

工程实际中，很多结构具有对称性和周期性。如能确当地加以利用，可以使结构的有限元计算模型以及相应的计算规模得到缩减，从而使数据准备工作和计算工作量大幅度地降低。实际上前一节在建立图 5.7(*a*)所示框架结构的有限元模型时，就已利用了结构的对称性和周期性的特点，将结构分成不同层次的子结构，从而使建立结构总体刚度矩阵的工作量得到缩减，并使总体求解方程的自由度大量减少。本节讨论的是利用结构的对称性和周期性，使计算模型和求解规模得到缩减，而不再进一步形成总体刚度矩阵的情况。根据结构和载荷的特点，可以有以下三种情况。

5.4.1 具有对称面的结构

图 5.11(*a*)所示为一具有中心圆孔的矩形板。ox 轴和 oy 轴是结构的对称面。如果外加载荷对称或反对称于 ox 轴和 oy 轴，则可取结构的四分之一作为有限元计算模型，例如可以取第一象限的四分之一作为计算模型如图 5.10(*b*)所示。至于对称面 ox 和 oy 上的边界条件可以按以下规则确定：

1. 在不同的对称面上，将位移分量区分为对称分量和反对称分量。例如在 ox 面上，u 是对称分量，v 是反对称分量；而在 oy 面上，v 是对称分量，而 u 是反对称分量。

2. 将载荷也按不同的对称面，分别区分为对称分量和反对称分量。

3. 对于同一个对称面，如载荷是对称的，则位移的反对称分量为 0；如载荷是反对称的，则位移的对称分量为 0。

根据上述规则，我们可以建立板在不同载荷作用下的计算模型。图 5.11(*a*)是带孔矩形板上下两边(或/和左右两边)作用有均布拉(或压)力的有限元计算模型(略去板内的网格划分)，图 5.11(*b*)是该板四边作用均布剪力的有限元模型。拉(压)力对于 ox 面和 oy 面都是对称分量，而剪力则都是反对称分量。

图 5.12(*a*)所示为一柱形容器接管或管道三通，这是机械结构应力分析中典型的三维结构，它有两个对称面：oxy 和 oyz。通常利用此对称性，取结构的 $\frac{1}{4}$ (如图 5.12(*b*)所

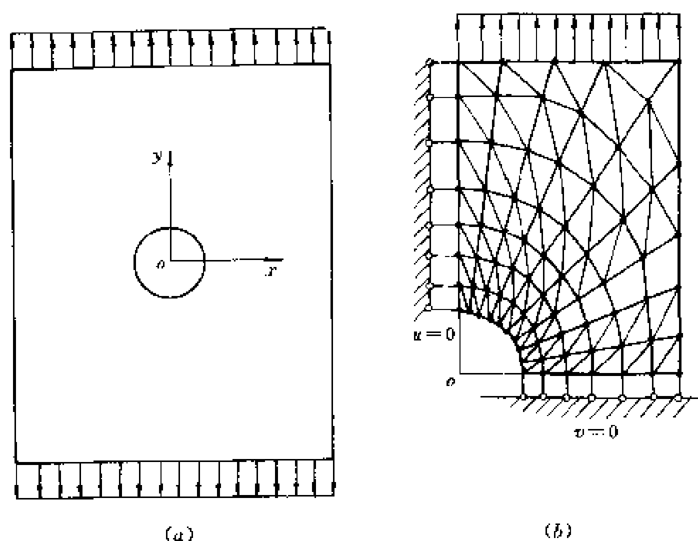


图 5.10 具有中心圆孔的矩形板受均匀拉伸

(a) 几何形状和载荷情况 (b) $\frac{1}{4}$的有限元模型

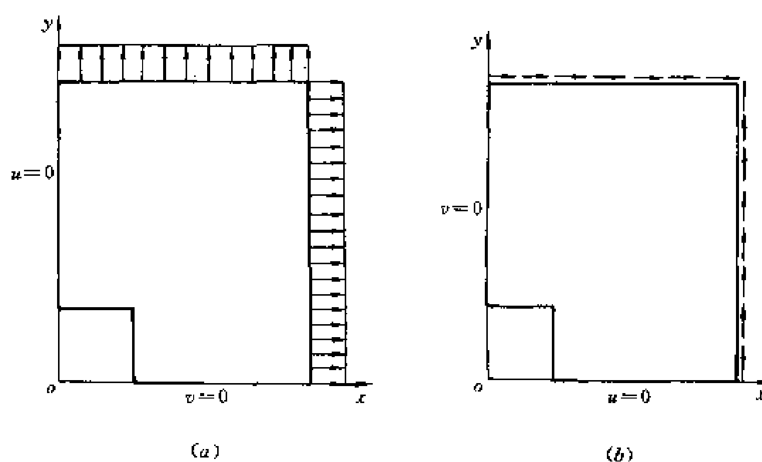


图 5.11 有限元计算模型

(a) 四边受均匀拉伸 (b) 四边受均匀剪切

示)建立有限元模型,进行各种载荷作用下的结构应力分析。例如对于内压载荷和左右两端受 x 方向轴向力情况,由于载荷对于两个对称面都是对称的,所以在两个对称面上、反对称位移分量应为 0, 即在 oxy 面上,$w=0$;在 oyz 面上、$u=0$。再如左右两端受相等相反的绕 x 轴的扭矩 M_x 情况。由于载荷反对称于结构的对称面,因此在结构的对称面上,对称的位移分量应为 0,即在 oxy 面上,$u=v=0$;在 oyz 面上,$v=w=0$。此结构最一般的载荷情况是右端和上端各有 6 个独立的载荷分量,即 P_x,P_y,P_z,M_x,M_y,M_z(左端的载荷由整个结构的平衡条件确定,是非独立的),都可以 1/4 的结构作为计算模型,分别利用对称和反对称于 oxy 面及 oyz 面的排列组合成四种位移边界条件中的一种或几种进行分析,

然后叠加得到最后的解答。例如图 5.12(*c*)左端所示，三通上端受 M_{y1}，左端 $-M_{y1}$ 是由平衡条件所确定。此载荷情况可以认为是右端两种载荷情况叠加而成。右端第 1 种载荷情况对于结构的两个对称面都是反对称的，而右端第 2 种载荷情况对于 *oxy* 面是反对称的，但对于 *oyz* 面则是对称的。有兴趣的读者，可参见文[1]。

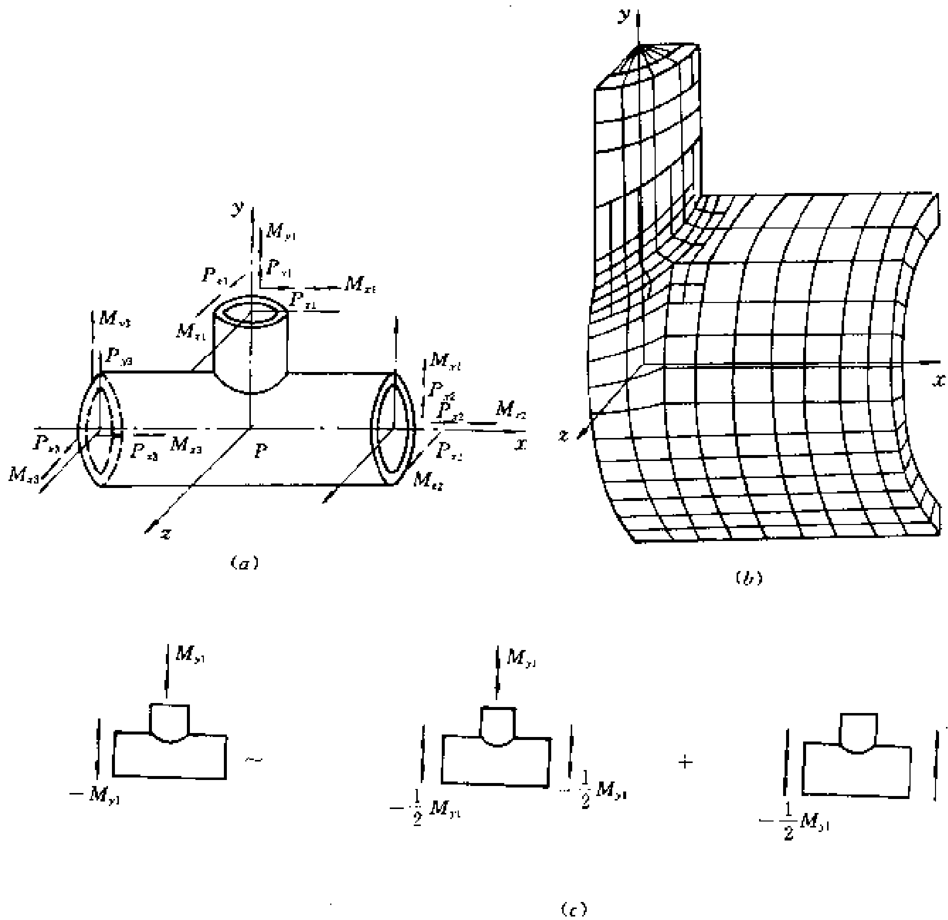


图 5.12　三通结构

(*a*) 三通结构的几何形状和载荷情况　(*b*) 四分之一的计算模型　(*c*) 典型载荷情况的分解

5.4.2　轴对称体受非轴对称载荷情况

当轴对称体受有非轴对称载荷时，将产生非轴对称的位移，应变和应力。因此，它是一个三维问题。众所周知，三维问题由于结点未知量数目的增加，计算时需占用大量计算机存储，耗费较多的机时，计算费用是昂贵的。现在可以采用部分离散的技术将三维问题化为若干个二维问题进行计算，这将大量地减少计算工作量，降低计算费用。

什么是部分离散?

在前面的章节中，选取近似函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Na}$ 时，已知的插值函数 $\boldsymbol{N}$ 是求解问题的全部独立坐标的函数，而 $\boldsymbol{a}$ 只是一系列的待定常数。在有些问题中插值函数作另外的选择可能会更方便些。例如，在本节中，由于物体的几何形状只是坐标 r、z 的函数，因此可以在 r,z 域

内进行离散，插值函数 N 只是 r,z 的函数，而待定参数 a 是 θ 的函数，即

$$u = Na, \quad N = N(r,z), \quad a = a(\theta)$$

显然，a 和 a 对于 θ 的导数将出现在最后的方程中。在全部离散中所得到的是一组用以确定待定常数的代数方程组，而在部分离散中得到的是一组以 θ 为独立变量的常微分方程组。这种在部分独立变量的 $\overline{\Omega}$ 域内选择已知函数的方法称为部分离散。

部分离散较多地应用在涉及时间变量的问题中。这时空间域 $\overline{\Omega}$ 是不随时间 t 而变的。有关时间域的问题我们将在第 13 章及第 14 章进行讨论。在本节中我们将载荷、位移等沿 θ 方向展成 Fourier 级数，而在 r,z 域内进行有限元的离散。由于系统在 θ 方向的解答可以用标准的解析方法得到，所以这种方法又称之为半解析法。

1. 载荷和位移沿 θ 方向的 Fourier 展开

轴对称体的坐标、位移分量见图 5.13(a)。将作用在轴对称体上的任意载荷 $P(r,z,\theta)$，沿坐标轴 r,z,θ 分解为三个分量 $R(r,z,\theta)$、$Z(r,z,\theta)$、以及 $T(r,z,\theta)$，并将它们沿 θ 方向展成 Fourier 级数。

$$\begin{aligned} R(r,z,\theta) &= R_0(r,z) + \sum_{l=1}^{L} R_l(r,z)\cos l\theta + \sum_{l=1}^{L} \overline{R}_l(r,z)\sin l\theta \\ Z(r,z,\theta) &= Z_0(r,z) + \sum_{l=1}^{L} Z_l(r,z)\cos l\theta + \sum_{l=1}^{L} \overline{Z}_l(r,z)\sin l\theta \\ T(r,z,\theta) &= T_0(r,z) + \sum_{l=1}^{L} T_l(r,z)\sin l\theta + \sum_{l=1}^{L} \overline{T}_l(r,z)\cos l\theta \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

三式中第一项是与 θ 无关的载荷部分，$R_0(r,z)$ 和 $Z_0(r,z)$ 就是通常的轴对称载荷；$T_0(r,z)$ 使物体产生 θ 方向的位移，即扭转变形，因此它是扭转载荷。三式中的第二项 $\sum_{l=1}^{L} R_l(r,z)\cos l\theta$，$\sum_{l=1}^{L} Z_l(r,z)\cos l\theta$ 以及 $\sum_{l=1}^{L} T_l(r,z)\sin l\theta$ 使物体产生对称于 $\theta = 0$ 平面的弯曲变形，我们简称这部分载荷为对称载荷。三式中的第三项 $\sum_{l=1}^{L} \overline{R}_l(r,z)\sin l\theta$ 等使物体产生反对称于 $\theta = 0$ 平面的弯曲变形，简称为反对称载荷，见图 5.13(b)。

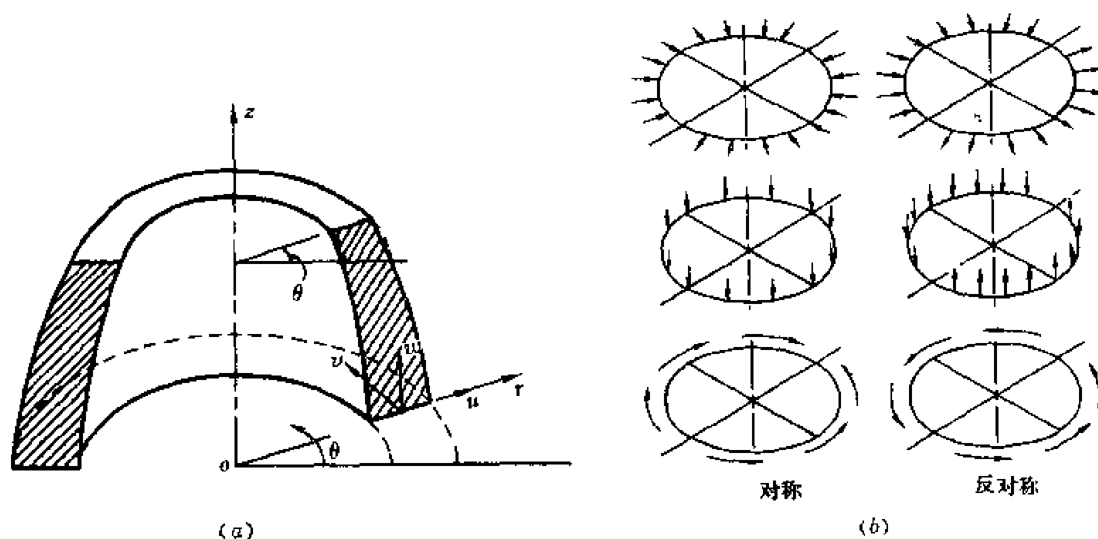
与载荷相类似，轴对称体上任一点的位移 u,v,w 也可以按 Fourier 级数进行展开：

$$\begin{aligned} r\text{ 向：}\quad u(r,z,\theta) &= u_0(r,z) + \sum_{l=1}^{L} u_l(r,z)\cos l\theta + \sum_{l=1}^{L} \overline{u}_l(r,z)\sin l\theta \\ z\text{ 向：}\quad w(r,z,\theta) &= w_0(r,z) + \sum_{l=1}^{L} w_l(r,z)\cos l\theta + \sum_{l=1}^{L} \overline{w}_l(r,z)\sin l\theta \\ \theta\text{ 向：}\quad v(r,z,\theta) &= v_0(r,z) + \sum_{l=1}^{L} v_l(r,z)\sin l\theta + \sum_{l=1}^{L} \overline{v}_l(r,z)\cos l\theta \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

其中 $u_0(r,z)$，$w_0(r,z)$ 是轴对称位移，$v_0(r,z)$ 是周向扭转位移。第二项是与对称载荷相应的与 $\theta=0$ 平面对称的变形；第三项是与反对称载荷相对应的反对称变形。

下面讨论在对称载荷下有限元格式的建立，反对称载荷情况完全与之类同。

2. 对称载荷下的有限元格式



(a) (b)

图 5.13 轴对称结构

(a) 坐标和位移表示 (b) 载荷和位移分量的分解

载荷为对称时

$$
\boldsymbol{P}(r,z,\theta)=\begin{Bmatrix} R(r,z,\theta) \\ Z(r,z,\theta) \\ T(r,z,\theta) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{l=1}^{L} R_l(r,z)\cos l\theta \\ \sum_{l=1}^{L} Z_l(r,z)\cos l\theta \\ \sum_{l=1}^{L} T_l(r,z)\sin l\theta \end{Bmatrix} \tag{5.4.3}
$$

与载荷相应的对称位移是

$$
\boldsymbol{u}(r,z,\theta)=\begin{Bmatrix} u(r,z,\theta) \\ w(r,z,\theta) \\ v(r,z,\theta) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{l=1}^{L} u_l(r,z)\cos l\theta \\ \sum_{l=1}^{L} w_l(r,z)\cos l\theta \\ \sum_{l=1}^{L} v_l(r,z)\sin l\theta \end{Bmatrix} \tag{5.4.4}
$$

作有限元分析时，场函数 $\boldsymbol{u}$ 仅作部分离散，即只在 r,z 域内离散。将(5.4.4)式中各 Fourier 展开项的系数 u_l,w_l,v_l 表示成单元内相应结点值的插值

$$
u_l(r,z)=\sum_{i=1}^{n} N_i u_i^l,\quad w_l(r,z)=\sum_{i=1}^{n} N_i w_i^l,\quad v_l(r,z)=\sum_{i=1}^{n} N_i v_i^l \tag{5.4.5}
$$

其中 N_i 是 r,z 域 Ω 内的插值函数；n 是单元结点数；u_i^l,w_i^l,v_i^l 是结点 i 的位移分量 u_i,w_i,v_i 的第 l 项富氏级数展开的幅值，此时它们就是待求的基本未知量。现在(5.4.4)式可以写作单元插值的形式

$$
\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{n} N_i u_i^l \cos l\theta \\ \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{n} N_i w_i^l \cos l\theta \\ \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{n} N_i v_i^l \sin l\theta \end{Bmatrix} \tag{5.4.6}
$$

引入以下向量符号来表示基本未知量

$$
\boldsymbol{a}_i^l = \begin{Bmatrix} u_i^l \\ w_i^l \\ v_i^l \end{Bmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)
$$

$$
\boldsymbol{a}_l^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1^l \\ \boldsymbol{a}_2^l \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^l \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1^e \\ \boldsymbol{a}_2^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_L^e \end{Bmatrix} \tag{5.4.7}
$$

式(5.4.6)式可以表示成

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \sum_{l=1}^{L} [N_1 \boldsymbol{A}^l \quad N_2 \boldsymbol{A}^l \quad \cdots \quad N_n \boldsymbol{A}^l] \boldsymbol{a}_l^e \\
&= \sum_{l=1}^{L} \boldsymbol{N}^l \boldsymbol{a}_l^e = \boldsymbol{N} \boldsymbol{a}^e
\end{aligned} \tag{5.4.8}
$$

其中

$$
\boldsymbol{A}^l = \begin{bmatrix} \cos l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos l\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin l\theta \end{bmatrix}, \boldsymbol{N} = [\boldsymbol{N}^1 \quad \boldsymbol{N}^2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{N}^L] \tag{5.4.9}
$$

在非轴对称情况下，弹性体在圆柱坐标下的几何方程是

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} \\ \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial w}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{5.4.10}
$$

将(5.4.8)式代入(5.4.10)式得到

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{l=1}^{L} [\boldsymbol{B}_1^l \quad \boldsymbol{B}_2^l \quad \cdots \quad \boldsymbol{B}_n^l] \boldsymbol{a}_l^e
$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \boldsymbol{B}^l \boldsymbol{a}_i^l = \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \tag{5.4.11}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_i^l = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r}\cos l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\cos l\theta & 0 \\ \frac{N_i}{r}\cos l\theta & 0 & \frac{l}{r}N_i\cos l\theta \\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\cos l\theta & \frac{\partial N_i}{\partial r}\cos l\theta & 0 \\ -\frac{l}{r}N_i\sin l\theta & 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r}\right)\sin l\theta \\ 0 & -\frac{l}{r}N_i\sin l\theta & \frac{\partial N_i}{\partial z}\sin l\theta \end{bmatrix} \tag{5.4.12}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

利用(5.4.3),(5.4.8),(5.4.11)式以及表1.2中三维问题的弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$,可以按照最小位能原理建立系统的有限元方程(2.3.10)式。由于三角级数的正交性,单元刚度矩阵呈块对角化的特点,各阶 Fourier 展开之间互不耦合,即

$$\boldsymbol{K}^{lm} = \int \boldsymbol{B}^{lT}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^m \mathrm{d}V = \begin{cases} \boldsymbol{K}^{ll} & (l = m) \\ 0 & (l \neq m) \end{cases} \tag{5.4.13}$$

因此

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{11} & & & & \\ & \boldsymbol{K}^{22} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \boldsymbol{K}^{ll} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{K}^{LL} \end{bmatrix} \tag{5.4.14}$$

其中任意一个子矩阵 $\boldsymbol{K}^{ll}$ 的展开形式是

$$(\boldsymbol{K}^{ll})^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{ll} & \boldsymbol{K}_{12}^{ll} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{K}_{1n}^{ll} \\ & \boldsymbol{K}_{22}^{ll} & \boldsymbol{K}_{23}^{ll} & \cdots & \boldsymbol{K}_{2n}^{ll} \\ & & \ddots & & \vdots \\ \text{对} & & & \ddots & \vdots \\ & & \text{称} & & \boldsymbol{K}_{nn}^{ll} \end{bmatrix} \tag{5.4.15}$$

(5.4.15)式中 $\boldsymbol{K}_{ij}^{ll}$ 是一个 3×3 的子矩阵,它由下式计算

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{ll} = \int_{V_e} \boldsymbol{B}_i^{lT}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_j^l \mathrm{d}V \tag{5.4.16}$$

因此 $\boldsymbol{K}^e$ 是一个 $3nL\times3nL$ 的对称方阵。式中 $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$。

单元的载荷向量可以表示成

$$
\boldsymbol{P}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_1^e \\ \boldsymbol{P}_2^e \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_L^e \end{Bmatrix} \quad 而\ \boldsymbol{P}_l^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_1^l \\ \boldsymbol{P}_2^l \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_n^l \end{Bmatrix} \tag{5.4.17}
$$

其中 $\boldsymbol{P}_l^e$ 是单元第 l 阶 Fourier 展开项的结点载荷向量，对于每个结点是 $\boldsymbol{P}_i^e$。

对于面积力

$$
\boldsymbol{P}_i^l = \iint N_i \boldsymbol{A}^{lT} \begin{Bmatrix} R_l(r,z)\cos l\theta \\ Z_l(r,z)\cos l\theta \\ T_l(r,z)\sin l\theta \end{Bmatrix} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s = \iint N_i \begin{Bmatrix} R_l(r,z)\cos^2 l\theta \\ Z_l(r,z)\cos^2 l\theta \\ T_l(r,z)\sin^2 l\theta \end{Bmatrix} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s \tag{5.4.18}
$$

$\mathrm{d}s$ 是 r,z 域 Ω 边界的弧长微元。由于

$$
\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} R_l(r,z)\cos^2 l\theta \\ Z_l(r,z)\cos^2 l\theta \\ T_l(r,z)\sin^2 l\theta \end{Bmatrix} \mathrm{d}\theta = \begin{cases} \pi \begin{Bmatrix} R_l(r,z) \\ Z_l(r,z) \\ T_l(r,z) \end{Bmatrix} & (当\ l = 1,2,\cdots) \\ 2\pi \begin{Bmatrix} R_l(r,z) \\ Z_l(r,z) \\ 0 \end{Bmatrix} & (当\ l = 0) \end{cases} \tag{5.4.19}
$$

因此，(5.4.18)式，当 $l=1,2,\cdots$

$$
\boldsymbol{P}_i^l = \pi \int r N_i \begin{Bmatrix} R_l(r,z) \\ Z_l(r,z) \\ T_l(r,z) \end{Bmatrix} \mathrm{d}s \tag{5.4.20}
$$

当 $l=0$（轴对称载荷情况）

$$
\boldsymbol{P}_0^i = 2\pi \int r N_i \begin{Bmatrix} R_0(r,z) \\ Z_0(r,z) \\ 0 \end{Bmatrix} \mathrm{d}s \tag{5.4.21}
$$

同理对于体积力可以得到

$$
\boldsymbol{P}_i^l = 2\pi \iint_\Omega r N_i \begin{Bmatrix} R_l(r,z) \\ Z_l(r,z) \\ T_l(r,z) \end{Bmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (l = 1,2,\cdots) \tag{5.4.22}
$$

$$
\boldsymbol{P}_i^0 = 2\pi \iint_\Omega r N_i \begin{Bmatrix} R_0(r,z) \\ Z_0(r,z) \\ 0 \end{Bmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (l = 0) \tag{5.4.23}
$$

由于三角函数的正交性，系统方程的各次 Fourier 展开项是互不耦合的，对于任意阶 l 可以单独求解下列方程

$$
\boldsymbol{K}^{ll}\boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{P}_l \tag{5.4.24}
$$

其中 $\boldsymbol{K}^{ll}$，$\boldsymbol{P}_l$，$\boldsymbol{a}_l$ 分别是系统第 l 阶的刚度矩阵、载荷列阵和结点位移列阵，它们分别由单元相应的矩阵集成，即

$$\boldsymbol{K}^{ll} = \sum_{e=1}^{M} (\boldsymbol{K}^{ll})^{e} \quad \boldsymbol{P}_{l} = \sum_{e=1}^{M} \boldsymbol{P}_{l}^{e} \quad \boldsymbol{a}_{l} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_{1}^{l} \\ \boldsymbol{a}_{2}^{l} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{N}^{l} \end{Bmatrix} \tag{5.4.25}$$

式中 M 是 Ω 域中的单元总数，N 是结点总数。

还应补充指出的是如利用类似于(5.4.19)式的结果，刚度矩阵的计算(5.4.16)式可以简化为只在 r,z 域 Ω 内积分。这时 $\boldsymbol{K}_{ij}^{ll}$ 可以表示成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_{ij}^{ll} &= \pi \iint_{\bar{\Omega}} \bar{\boldsymbol{B}}_{i}^{l\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{B}}_{j}^{l} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (l = 1,2,\cdots) \\ \boldsymbol{K}_{ij}^{00} &= 2\pi \iint_{\bar{\Omega}} \bar{\boldsymbol{B}}_{i}^{0\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{B}}_{j}^{0} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \quad (l = 0) \end{aligned} \tag{5.4.26}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{B}}_{i}^{l}$ 即是(5.4.12)式中去掉 $\cos l\theta$ 和 $\sin l\theta$ 因子。

在以上各式中 $l=0$ 时，就得到一般的轴对称载荷情况。式中的 $\cos l\theta$ 代之以 $\sin l\theta$，$\sin l\theta$ 代之以 $\cos l\theta$，就得到反对称载荷的情况，此时令 $l=0$ 就可以得到扭转载荷情况。当然，对于一般轴对称载荷情况，因为周向载荷 $T\equiv 0$，因此周向位移 $v\equiv 0$。全部结点位移和结点载荷向量都缩减为只有二个分量。应变和应力向量也分别只有四个分量。对于扭转载荷情况，由于载荷 $R\equiv Z\equiv 0$，因此位移 $u\equiv w\equiv 0$，于是位移和载荷向量进一步缩减为只有一个分量，应变和应力缩减为各有两个分量。这时方程的阶数都比一般弯曲载荷情况降低，因此计算量可大大缩减。

采用半解析法求解实际问题时，对于通常的载荷情况，只需取三角级数少数的几项就可以了。如果载荷很复杂，必须取很多项才能逼近实际问题时，就不一定用半解析法，而可以直接用三维有限元来求解。

例 图 5.14(a)所示是一个受非轴对称载荷的塔，塔身是轴对称体。利用四个三次单元求解。载荷展成三角级数，图 5.14(b)所示用 5 阶三角级数的展开来近似实际载荷。图 5.14(c)给出了基础上垂直应力 σ_z 的分布。图上分别表示了各阶三角级数引起的应力以及它们组合的最后结果。载荷的 $\cos 3\theta$ 项恒为零，见图 5.14(b)中 $n=3$ 的三角函数。实际计算表明计算前二项就可以得到足够精度的解答。

5.4.3 旋转周期结构

有一类结构如图 5.15(a)所示，它的几何形状沿周向呈周期性变化，如齿轮、汽轮机和水轮机的叶轮等都属于这类结构，在力学上称它们为旋转周期结构，或循环对称结构。它们不同于轴对称结构，但沿周向可以划分成若干个几何形状完全相同的子结构。如图 5.15(a)所示结构可以划分为 6 个这样的子结构。根据此结构特点，只要分析其中一个施加以适当边界条件的子结构，就可以直接(或经适当的综合)得到整个结构的解答，而不必进行子结构的集成和求解，从而使整个结构的分析和求解大大地简化。现按载荷是否也具有周期性分别进行讨论。

1. 沿周向周期性变化的载荷情况

对于如图 5.15(a)所示的旋转周期结构，如果载荷沿周向也呈周期性变化，则问题相

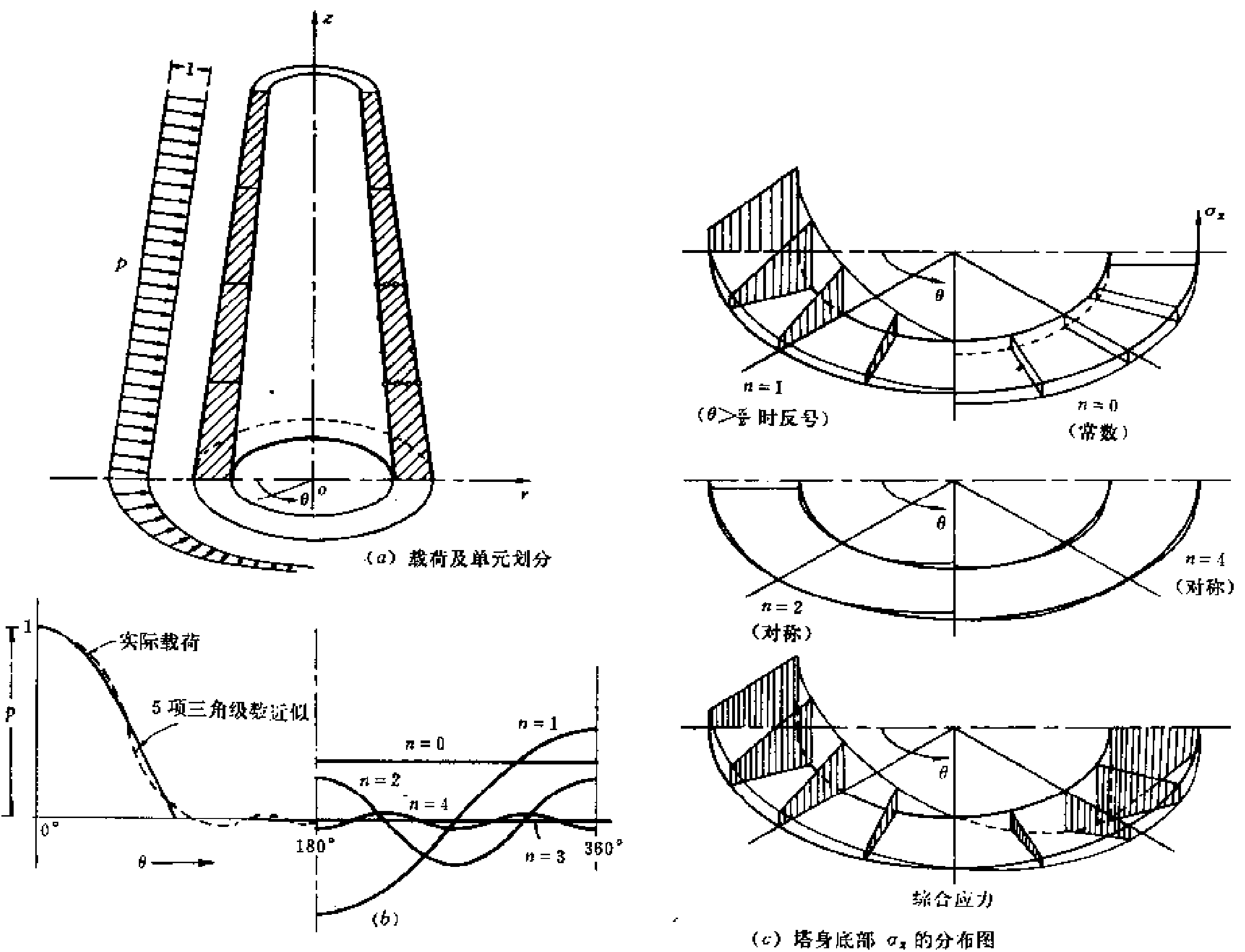


图 5.14 受风载的塔

(a) 载荷及单元划分 (b) 载荷的三角级数近似 (c) 塔身底部 σ_z 的分布图

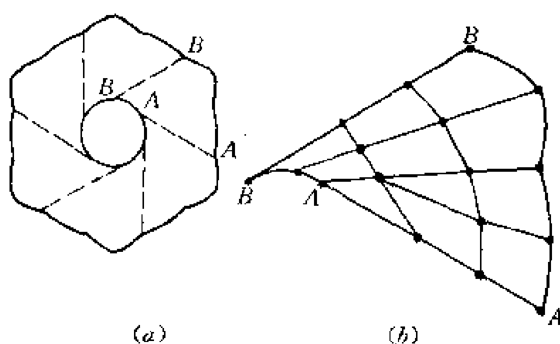


图 5.15 (a) 旋转周期结构,(b) 沿周向的一个子结构

对比较简单,只要分析其中的一个子结构,就可以直接得到整个结构的解答。例如对图5.15(b)所示的典型子结构,它的有限元求解方程 $\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$ 可以表示成以下分块形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{AA} & \boldsymbol{K}_{Ai} & \boldsymbol{K}_{AB} \\ \boldsymbol{K}_{Ai}^{T} & \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{iB} \\ \boldsymbol{K}_{AB}^{T} & \boldsymbol{K}_{iB}^{T} & \boldsymbol{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_A \\ \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_A \\ \boldsymbol{P}_i \\ \boldsymbol{P}_B \end{Bmatrix} \tag{5.4.27}$$

其中 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_A,\boldsymbol{a}_B$ 分别表示典型子结构的内部结点,AA 边界结点和 BB 边界结点的结点位移列阵,$\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{P}_A,\boldsymbol{P}_B$ 分别是对应的载荷列阵。刚度矩阵也作了相应的分块。

因为所有子结构形状完全相同,AA 边界和 BB 边界上结点分布也相同,因此,在载荷也呈周期性变化的情况下,如果在两条边界上各自建立相似的局部坐标(例如沿边界的切向和法向),则在相似的局部坐标系中边界结点位移 $\boldsymbol{a}_A^*$ 和 $\boldsymbol{a}_B^*$ 应相同,即

$$\boldsymbol{a}_A^* = \boldsymbol{a}_B^* \tag{5.4.28}$$

若取子结构的总体坐标和其中一条边界、例如 AA 的局部坐标系相同,即

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_A^*$$

则利用 BB 边界的局部坐标系和总体坐标系之间的转换关系可以得到

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{\lambda a}_B^* = \boldsymbol{\lambda a}_A^* = \boldsymbol{\lambda a}_A \tag{5.4.29}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 是坐标转换矩阵。在图 5.15(b)所示情况下,由于 AA 边界和 BB 边界之间的夹角为 $\psi\left(=\frac{\pi}{3}\right)$,所以 $\boldsymbol{\lambda}$ 可表示如下

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{5.4.30}$$

将上述转换关系代入(5.4.27)式,并用 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}$ 前乘其第 3 式两端,则可以得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{AA} & \boldsymbol{K}_{Ai} & \boldsymbol{K}_{AB}\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{K}_{Ai}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{iB}\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{AB}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{iB}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{BB}\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_A \\ \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_A \\ \boldsymbol{P}_i \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_B \end{Bmatrix} \tag{5.4.31}$$

现在独立的结点自由度只有 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}_A$,因此上式中和 $\boldsymbol{a}_A$ 相关的分块矩阵应予合并。这样一

来，最后得到的子结构求解方程应表示成如下形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{AA}+\boldsymbol{K}_{BB}^{*}+\boldsymbol{K}_{AB}^{*}+\boldsymbol{K}_{AB}^{*\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{Ai}+\boldsymbol{K}_{iB}^{*\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{K}_{Ai}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_{iB}^{*} & \boldsymbol{K}_{ii} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_{A} \\ \boldsymbol{a}_{i} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_{A}+\boldsymbol{P}_{B}^{*} \\ \boldsymbol{P}_{i} \end{Bmatrix} \tag{5.4.32}$$

其中上标“ * ”表示经过坐标变换的矩阵

$$\boldsymbol{K}_{AB}^{*}=\boldsymbol{K}_{AB}\boldsymbol{\lambda} \qquad \boldsymbol{K}_{AB}^{*\mathrm{T}}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{AB}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{K}_{BB}^{*}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{BB}\boldsymbol{\lambda} \qquad \boldsymbol{K}_{iB}^{*\mathrm{T}}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{iB}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{K}_{iB}^{*}=\boldsymbol{K}_{iB}\boldsymbol{\lambda} \qquad \boldsymbol{P}_{B}^{*}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{B}$$

方程(5.4.32)式实质上代表了整个旋转周期结构的求解方程，因为利用此式的解答和旋转周期性可以得到整个结构的全部解答。

关于以上各表达式的推导、特别是(5.4.32)式中刚度矩阵的形式还可补充指出：

(1) 如果在形成刚度矩阵和求解方程时，采用的是圆柱坐标系，则边界 AA 和边界 BB 已处于相似的局部坐标系，可以不用坐标转换、而直接将条件 $\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_B$ 代入方程(5.4.27)式，这样最后得到的求解方程(5.4.32)式中上标“ * ”将消失。

(2) 在通常的子结构的网格划分中、边界 AA 和边界 BB 之间是不直接相互耦合的(图 5.15(b)即是此种情况)，此时以上各式中 $\boldsymbol{K}_{AB}=0$，方程可以适当简化。特殊地、如果子结构内网格划分和结点编号成分块形式(如图 5.16 所示)，且假设边界 AA(现在子结构①的 1 边)和边界 BB(现在是子结构②的 1 边)已处于相似的局部坐标，则最后形成的求解方程将是如下形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & & & \boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{B}_{n-1} \\ \boldsymbol{B}_n & & & \boldsymbol{B}_{n-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n-1} \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}_{n-1} \\ \boldsymbol{P}_n \end{bmatrix} \tag{5.4.33}$$

其中：$\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{K}_{ii}$，$\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{K}_{i,i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

如果刚度矩阵像以前讨论的情况，是对于一个典型子结构(例如子结构①)形成的，则有

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{K}_{11}^{(1\sim2)}+\boldsymbol{K}_{11}^{(n\sim1)} \qquad \boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_1^{(1\sim2)}+\boldsymbol{P}_1^{(n\sim1)} \tag{5.4.34}$$

上标(1～2)和(n～1)分别表示从分块 1～2 和分块 n～1 计算得到的(相当于(5.4.32)式中的 $\boldsymbol{K}_{AA}$,$\boldsymbol{K}_{BB}$,$\boldsymbol{P}_A$,$\boldsymbol{P}_B$)。

由于子结构的网格划分和结点编号具有分块的特点，最后形成的刚度矩阵具有如(5.4.33)式所示的带状加边的特点，可以采用提高求解计算效率的算法[2]。

2. 沿周向任意变化的载荷情况

对于沿周向任意变化的载荷情况，可以采用和轴对称体承受非轴对称载荷情况相类似的方法，将载荷在周向作 Fourier 展开。如果旋转周期结构是由 N 个形状完全相同的子结构所组成，参考(5.4.1)式，Fourier 展开后，每一个子结构上的载荷可以表示成

$$R^{(j)}(r,z,\bar{\theta})=R_0(r,z,\bar{\theta})+\sum_{l=1}^{N-1}R_l(r,z,\bar{\theta})\cos\frac{(j-1)2\pi l}{N}$$

$$+\sum_{l=1}^{N-1}\overline{R}_l(r,z,\bar{\theta})\sin\frac{(j-1)2\pi l}{N}$$

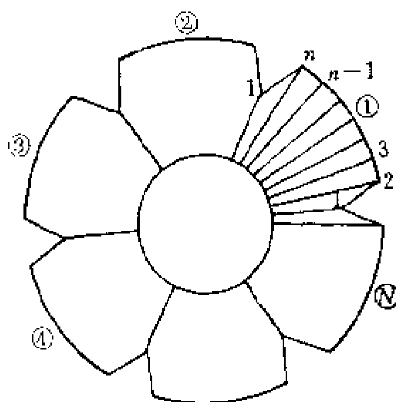


图 5.16 旋转周期结构

$$Z^{(j)}(r,z,\bar{\theta}) = Z_0(r,z,\theta) + \sum_{l=1}^{N-1} Z_l(r,z,\bar{\theta})\cos\frac{(j-1)2\pi l}{N} + \sum_{l=1}^{N-1} \bar{Z}_l(r,z,\bar{\theta})\sin\frac{(j-1)2\pi l}{N}$$

$$T^{(j)}(r,z,\bar{\theta}) = T_0(r,z,\bar{\theta}) + \sum_{l=1}^{N-1} T_l(r,z,\bar{\theta})\cos\frac{(j-1)2\pi l}{N} + \sum_{l=1}^{N-1} \bar{T}_l(r,z,\bar{\theta})\sin\frac{(j-1)2\pi l}{N}$$

$(j=1,2,\cdots,N$,子结构编号) (5.4.35)

其中 $\bar{\theta}$ 是从各个子结构起始边作为参考面定义的周向坐标。和轴对称结构只要分析一个通过对称轴的 rz 平面不同,现在需要分析一个在周向展开角为 $2\pi/N$ 的子结构。载荷在 Fourier 展开后,现在的各项系数不再只是 r、z 的函数,而是 r、z、$\bar{\theta}$ 的函数。但即使对于最一般的情况,展开后最多只包含 N 项(即 $l=0,1,2,\cdots,N-1$),因为 $l=N,N+1,\cdots$ 将重复 $l=0,1,\cdots$ 情况。

由于结构不是轴对称的,对于载荷分布的各个 Fourier 谐次 l,不能将载荷区分为对称情况和反对称情况单独进行分析,并为进一步表达和运算方便,以下将引入复数表达形式。首先将(5.4.35)式改写成

$$\boldsymbol{P}^{(j)} = \begin{bmatrix} R^{(j)} \\ Z^{(j)} \\ T^{(j)} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{N-1} \boldsymbol{F}_l e^{-i(j-1)\mu l} \tag{5.4.36}$$

$$(j=1,2,\cdots,N)$$

其中 $\boldsymbol{F}_l$ 是载荷的各阶 Fourier 系数

$$\boldsymbol{F}_l = \begin{bmatrix} R_l \\ Z_l \\ T_l \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \bar{R}_l \\ \bar{Z}_l \\ \bar{T}_l \end{bmatrix}$$

$$e^{-i(j-1)\mu l} = \cos(j-1)\mu l - i\sin(j-1)\mu l$$

$$i = \sqrt{-1} \qquad \mu = \frac{2\pi}{N}$$

并约定 $\boldsymbol{P}^{(j)}$ 取右端项 $\sum_{l=1}^{N} \boldsymbol{F}_l e^{-i(j-1)\mu l}$ 的实部。

整个结构上的载荷分布，从(5.4.36)式可以得到

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^{(1)} \\ \boldsymbol{P}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}^{(N)} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_l \\ \boldsymbol{F}_l e^{-i\mu l} \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_l e^{-i(N-1)\mu l} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{N-1} \boldsymbol{\phi}_l \boldsymbol{F}_l = \sum_{l=0}^{N-1} \boldsymbol{P}_l \tag{5.4.37}$$

其中 $\boldsymbol{P}_l$ 是载荷的各阶 Fourier 分量，$\boldsymbol{\phi}_l$ 是表示载荷各阶 Fourier 分量中各个子结构相位关系的向量。

$$\boldsymbol{P}_l = \boldsymbol{\phi}_l \boldsymbol{F}_l, \quad \boldsymbol{\phi}_l = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times 3} \\ \boldsymbol{I} e^{-i\mu l} \\ \vdots \\ \boldsymbol{I} e^{-i(N-1)\mu l} \end{bmatrix} \tag{5.4.38}$$

(5.4.37)式表示载荷 $\boldsymbol{P}$ 是由它的各阶 Fourier 分量 $\boldsymbol{P}_l$ 所组成，此式还可进一步表示成

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{F} \tag{5.4.39}$$

其中：

$$\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_0 \quad \boldsymbol{\phi}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_{N-1}], \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_0 \\ \boldsymbol{F}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{N-1} \end{bmatrix}$$

以下导出载荷的各阶 Fourier 系数 $\boldsymbol{F}_l$ 的计算表达式，为此(5.4.39)式两端前乘 $\boldsymbol{\phi}$ 的共轭矩阵 $\boldsymbol{\phi}^*$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{\phi}^{*T}$

$$\boldsymbol{\phi}^{*T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_0^{*T} \\ \boldsymbol{\phi}_1^{*T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_{N-1}^{*T} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_k^{*T} = [\boldsymbol{I}_{3\times 3} \quad \boldsymbol{I} e^{i\mu k} \quad \cdots \quad \boldsymbol{I} e^{i(N-1)\mu k}]$$

$$(k = 0, 1, \cdots, N-1) \tag{5.4.40}$$

由于

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(j-1)(k-l)\frac{2\pi}{N}} = \begin{cases} N & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \tag{5.4.41}$$

所以

$$\boldsymbol{\phi}^{*T} \boldsymbol{\phi} = N \boldsymbol{I}_{3N\times 3N} \tag{5.4.42}$$

于是得到计算 $\boldsymbol{F}$ 的表达式

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{N} \boldsymbol{\phi}^{*T} \boldsymbol{P} \tag{5.4.43}$$

或
$$F_l = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{P}^{(j)}e^{i(j-1)l\mu}$$

和载荷相类似，旋转周期结构上每一点的位移 u,w,v 在周向也作 Fourier 展开表示成

$$\boldsymbol{a}^{(j)} = \begin{bmatrix} u^{(j)} \\ w^{(j)} \\ v^{(j)} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{N-1}\boldsymbol{x}_l e^{-i(j-1)\mu l} \tag{5.4.44}$$

$$(j = 1,2,\cdots,N)$$

其中 $\boldsymbol{x}_l$ 是位移的各阶 Fourier 系数

$$\boldsymbol{x}_l = \begin{bmatrix} u_l \\ w_l \\ v_l \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \bar{u}_l \\ \bar{w}_l \\ \bar{v}_l \end{bmatrix}$$

整个结构上的位移参数 $\boldsymbol{a}$ 也可类似地表示成

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)} \\ \boldsymbol{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{(N)} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{N-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_l \\ \boldsymbol{x}_l e^{-i\mu l} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_l e^{-i(N-1)\mu l} \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{N-1}\boldsymbol{\phi}_l\boldsymbol{x}_l = \sum_{l=0}^{N-1}\boldsymbol{a}_l \tag{5.4.45}$$

或
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} \tag{5.4.46}$$

上式表示位移 $\boldsymbol{a}$ 也是由它的各阶 Fourier 分量 $\boldsymbol{a}_l$ 所组成。

类似轴对称体受非轴对称载荷情况，现在可以先求解对应载荷各阶的 Fourier 系数 $\boldsymbol{F}_l$ 的位移的 Fourier 系数 $\boldsymbol{x}_l$。进一步类似于受沿周向周期性载荷的情况，只要对一个典型子结构(例如子结构①)就可以建立起求解 $\boldsymbol{x}_l$ 的方程。区别在于子结构①的 1 边和子结构②的 1 边在相似的局部坐标中不再相等，而是相差 $e^{-i\mu l}$，即

$$\boldsymbol{a}_{l1}^{①} = \boldsymbol{a}_{l1}^{②}e^{-i\mu l} \tag{5.4.47}$$

其中下标"1"表示边界 1，上标①和②表示分属子结构①和②。遵循和导出(5.4.33)式相同的步骤，最后得到的求解方程可表示如下[2]：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & & & \boldsymbol{B}_n^{\mathrm{T}}e^{-i\mu l} \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{B}_{n-1} \\ \boldsymbol{B}_n e^{i\mu l} & & & \boldsymbol{B}_{n-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{l1} \\ \boldsymbol{x}_{l2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{ln-1} \\ \boldsymbol{x}_{ln} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{n-1} \\ \boldsymbol{F}_n \end{bmatrix} \tag{5.4.48}$$

$$(l = 0,1,\cdots,N-1)$$

应当指出此求解方程是复数方程，文[3]中给出了一种比较有效的解法，有兴趣读者可参考该文。当各阶 $\boldsymbol{x}_l$ 求得以后，可以按(5.4.45)式叠加得到结构的全部位移解答。

还应指出，实际上(5.4.48)式并不需要对于全部($l=0,2,\cdots,N-1$)的 Fourier 系数 $\boldsymbol{F}_l$ 求解。这是由于利用(5.4.43)式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{N-l}&=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{P}^{(j)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)\mu(N-l)}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{P}^{(j)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j-1)\mu l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)\mu N}\\&=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{P}^{(j)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j-1)\mu l}=\boldsymbol{F}_l^*\end{aligned}\tag{5.4.49}$$

因此只要对于部分的 l 求解。l 的取值如下：

$$\begin{aligned}&\text{当 } N=\text{奇数} \qquad l=0,1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}\\&\text{当 } N=\text{偶数} \qquad l=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}\end{aligned}\tag{5.4.50}$$

当求得 $\boldsymbol{x}_l$ 的解答以后，各个子结构的位移解答利用(5.4.44)，(5.4.45)和(5.4.49)等式可以具体表达如下：

当 N 是奇数时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{(j)}&=\begin{Bmatrix}u^{(j)}\\w^{(j)}\\v^{(j)}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{X}_0+\sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(N-1)}\left[\boldsymbol{X}_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j-1)\mu l}+\boldsymbol{X}_l^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)\mu l}\right]\\&=\boldsymbol{X}_0+2\sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(N-1)}\left[\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_l)\cos(j-1)\mu l+\mathrm{Im}(\boldsymbol{X}_l)\sin(j-1)\mu l\right]\\&=\begin{Bmatrix}u_0\\w_0\\v_0\end{Bmatrix}+2\sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(N-1)}\left[\begin{Bmatrix}u_l\\w_l\\v_l\end{Bmatrix}\cos(j-1)\mu l+\begin{Bmatrix}\bar{u}_l\\\bar{w}_l\\\bar{v}_l\end{Bmatrix}\sin(j-1)\mu l\right]\\&\qquad(j=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\tag{5.4.51}$$

当 N 为偶数时，经类似步骤可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{(j)}&=\begin{Bmatrix}u^{(j)}\\w^{(j)}\\v^{(j)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_0\\w_0\\v_0\end{Bmatrix}+(-1)^{j+1}\begin{Bmatrix}u_{N/2}\\w_{N/2}\\v_{N/2}\end{Bmatrix}\\&\quad+2\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[\begin{Bmatrix}u_l\\w_l\\v_l\end{Bmatrix}\cos(j-1)\mu l+\begin{Bmatrix}\bar{u}_l\\\bar{w}_l\\\bar{v}_l\end{Bmatrix}\sin(j-1)\mu l\right]\\&\qquad(j=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\tag{5.4.52}$$

由于 $\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_{N/2}$(当 N=偶数)只有实部，所以相应的 $\boldsymbol{X}_0$ 和 $\boldsymbol{X}_{N/2}$(当 N=偶数)也只有实部，而且 $l=0$ 就是前面讨论的载荷沿周向呈周期性变化的情况。

5.5 非协调元和分片试验

等参元有良好的适应性和表达格式的简明性，因而得到广泛的应用，但是从严格的意义上说，它的精度和效率仍是不够高的。以二维单元为例：双线性单元有 4 个结点，对应的

插值函数中包含下列 4 项：$1,\xi,\eta,\xi\eta$；二次单元有 8 个结点，对应的插值函数中包含下列 8 项：$1,\xi,\eta,\xi^2,\xi\eta,\eta^2,\xi^2\eta,\xi\eta^2$。这些插值函数中所包含的完全多项式分别只是一次的和二次的，它们所要求的自由度分别是 3 和 6，即只需要单元的结点数是 3 和 6。就构成决定单元精度的完全多项式而言，其有效的结点数分别只是 3 个和 6 个。从这个意义上说，二维等参元中有四分之一的结点自由度对计算精度是不起作用的。另一方面，插值函数中非完全的高次项一般说来非但对改善精度不起作用，而且还可能起相反的作用。所以从这个意义上来讲，等参元的精度在给定自由度的条件下是不够理想的。上述缺点对三维等参元来说将更突出。因为在三维坐标中，一次完全多项式是 4 项：$1,\xi,\eta,\zeta$；二次完全多项式是 10 项：$1,\xi,\eta,\zeta,\xi^2,\eta^2,\zeta^2,\xi\eta,\xi\zeta,\eta\zeta$，而三维线性单元和二次单元却分别具有 8 个和 20 个结点，也即三维等参元中有二分之一的结点自由度对计算精度是无贡献的。因此，E. Wilson 提出的二维和三维的非协调等参元，对改进等参元的计算精度和提高计算效率是很有意义的，特别是对于三维问题的有限元分析。

现在我们来讨论二维双线性单元在表示纯弯应力状态时出现的问题。由于二维双线性单元它的插值函数中包含有非完全的二次项 $\xi\eta$，因此用它表示纯弯曲应力时，出现明显的误差。图 5.17(a)表示受纯弯作用的矩形单元，其精确位移解答如图 5.17(b)所示，并可表达如下

$$u=\alpha_1 xy$$
$$v=\frac{1}{2}\alpha_1(a^2-x^2)+\frac{1}{2}\alpha_1\nu(b^2-y^2) \tag{5.5.1}$$

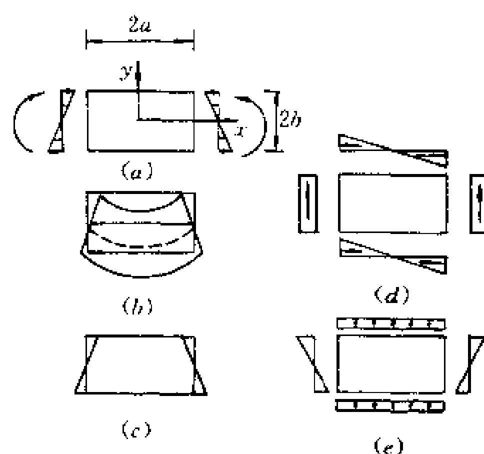


图 5.17 受纯弯作用的矩形单元

(a) 弯曲应力 σ_x (b) 实际位移 (c) 4 结点矩形元的近似位移

(d) (e) 有限元解的剪应力 τ 及 σ_y

利用平面问题的几何关系和物理关系可以得到

$$\sigma_x=\alpha_1 Ey,\quad \sigma_y=\tau_{xy}=0 \tag{5.5.2}$$

这表示单元处于纯弯应力状态，从而证明了(5.5.1)式的位移模式是精确满足纯弯应力状态的。

如果我们用一个线性矩形单元去模拟上述受力状态，得到的位移将如图 5.17(c)所

示，即

$$u = \alpha_1 xy, \quad v = 0 \tag{5.5.3}$$

所以(5.5.1)式的第二式位移 v 的表达式实际上表示了利用一个双线性单元模拟纯弯应力状态时所出现的误差。由(5.5.3)式表示的位移模式计算得到的剪应力 τ_{xy} 以及正应力 σ_y 表示在图 5.17(d)和(e)。导致误差的原因是缺少完全的二次多项式，即缺少 x^2 项和 y^2 项。

5.5.1 Wilson 非协调元

为了改善二维线性单元的性质，提高其精度，Wilson 提出在单元的位移插值函数中附加内部无结点的位移项[4]。当单元是等参元，采用自然坐标时，此附加项为 $\alpha_1(1-\xi^2)$和 $\alpha_2(1-\eta^2)$。从形式上看，这两项和(5.5.1)式第二式所包含的项次相同。而它们正是利用二维双线性单元模拟纯弯应力状态造成误差的原因所在。增加附加项后就有可能通过适当调整系数 α_1 和 α_2 使误差降到最小。从数学上看，是通过引入 ξ^2 及 η^2 项，使插值函数中的二次式趋于完全，从而达到提高计算精度的目的。

可以看到附加项 $\alpha_1(1-\xi^2)$和 $\alpha_2(1-\eta^2)$的位移，在二维线性单元的四个结点上都取零值，即它对结点位移没有影响，而只对单元内部的位移起了调整作用。确定附加项前的待定系数 α_1 和 α_2 与单元边界上的结点无关，这种仅在单元内部定义的待定参数称为内部自由度。

包含附加的无结点位移项的单元位移插值表示如下：

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{4} N_i u_i + \alpha_1(1-\xi^2) + \alpha_2(1-\eta^2) \\ v &= \sum_{i=1}^{4} N_i v_i + \alpha_3(1-\xi^2) + \alpha_4(1-\eta^2) \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

其中：
$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta_i) \quad (i = 1,2,3,4)$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为内部自由度。

将(5.5.4)式表示成矩阵形式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e + \bar{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\alpha}^e \tag{5.5.5}$$

其中：

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}^e = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{I}N_1 \quad \boldsymbol{I}N_2 \quad \boldsymbol{I}N_3 \quad \boldsymbol{I}N_4], \quad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 & 1-\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi^2 & 1-\eta^2 \end{bmatrix}$$

代入几何关系可以得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e + \bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\alpha}^e \tag{5.5.6}$$

将 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{\varepsilon}$ 等代入位能泛函 Π_p 并按照通常的步骤,泛函变分为零可以得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu}^e & \boldsymbol{K}_{u\alpha}^e \\ \boldsymbol{K}_{\alpha u}^e & \boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}^e \\ \boldsymbol{\alpha}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_u^e \\ \boldsymbol{P}_\alpha^e \end{Bmatrix} \tag{5.5.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{K}_{uu}^e = \int_{V^e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V \\ &\text{(是原 4 结点线性单元的刚度矩阵)} \\ &\boldsymbol{K}_{u\alpha}^e = (\boldsymbol{K}_{\alpha u}^e)^{\mathrm{T}} = \int_{V^e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{B}}\mathrm{d}V \\ &\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e = \int_{V^e} \bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{B}}\mathrm{d}V \\ &\boldsymbol{P}_u^e = \int_{V^e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma^e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S \\ &\boldsymbol{P}_\alpha^e = \int_{V^e} \bar{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma^e} \bar{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\mathrm{d}S \end{aligned}\right\} \tag{5.5.8}$$

从(5.5.7)式的第 2 式可以解出

$$\boldsymbol{\alpha}^e = (\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1}[\boldsymbol{P}_\alpha^e - \boldsymbol{K}_{\alpha u}^e\boldsymbol{a}^e] \tag{5.5.9}$$

利用上式消去(5.5.7)式第 1 式中的内部自由度 α,则得到凝聚后的单元求解方程

$$\boldsymbol{K}^e\boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{P}^e \tag{5.5.10}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^e = \boldsymbol{K}_{uu}^e - \boldsymbol{K}_{u\alpha}^e(\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1}\boldsymbol{K}_{\alpha u}^e$$

$$\boldsymbol{P}^e = \boldsymbol{P}_u^e - \boldsymbol{K}_{u\alpha}(\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1}\boldsymbol{P}_\alpha^e$$

此即包含附加内部位移项的单元刚度矩阵和载荷列阵。它是在原单元刚度矩阵和载荷列阵内增加了修正项而得到。消去内部自由度以及修正单元刚度矩阵和载荷列阵都是在单元分析过程中进行的,此过程称为内部自由度的凝聚。经凝聚后,单元的自由度仍是原四边形单元的自由度,以后的分析和计算步骤也和标准的解题步骤相同。顺带指出:在通常不存在体积力(即 $\boldsymbol{f}=0$)的情况下,$\boldsymbol{P}_\alpha^e$ 中的第 2 项也一并略去,可减少计算工作量,而计算结果表明,对精度没有什么影响。

现以图 5.18 所示悬臂梁为例,说明 4 结点单元增加内部自由度后对精度的改进。对于两种不同载荷和网格划分,采用两种单元的计算结果列于表 5.1。在现在的载荷和网格划分情况下,原线性单元,即无内部自由度单元的计算精度是相当差的。将改进后的,即具有内部自由度的单元和精确解比较,可以看到计算精度有显著的提高。

表 5.1 悬臂梁计算结果

	j 点位移		i 点弯曲应力	
	载荷 A	载荷 B	载荷 A	载荷 B
理论解	10.00	103.0	300.0	4050
协调元网格 1	6.81	70.1	218.2	2945
协调元网格 2	7.06	72.3	218.8	2954
非协调元网格 1	10.00	101.5	300.0	4050
非协调元网格 2	10.00	101.3	300.0	4050

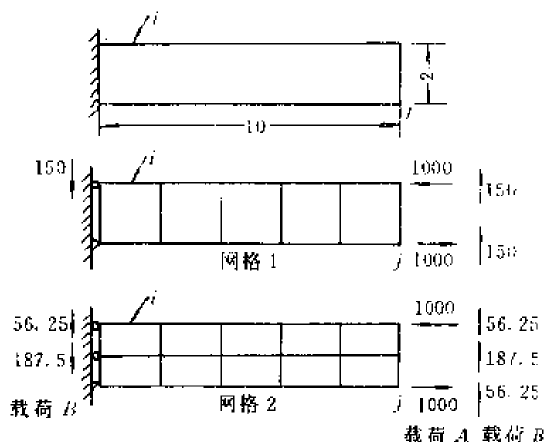


图 5.18　悬臂梁网格划分及载荷情况

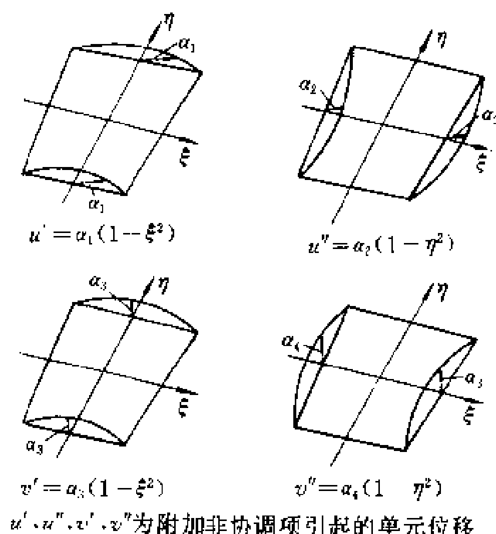


图 5.19　二次非协调位移模式

和内部自由度相关的附加位移项在单元中引起的位移表示在图 5.19 中。$\alpha_1(1-\xi^2)$ 和 $\alpha_3(1-\xi^2)$项在单元 $\eta=\pm1$ 的边界上呈二次抛物线变化。$\alpha_2(1-\eta^2)$和 $\alpha_4(1-\eta^2)$项则在单元 $\xi=\pm1$ 的边界上呈二次抛物线变化。$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是在单元内部定义的内部自由度，所以这些附加位移项在单元与单元的交界面上是不保证协调的，也就是说由于单元内增加了附加位移项而致使单元之间不能保证在交界面上位移的连续性。这些附加位移项称之为非协调项。引入非协调位移项的单元称为非协调元。显然非协调元是违反 2.4 节中讨论过的有限元解的收敛准则的。

然而，可以证明，对于 C_0 型问题，如果在单元尺寸不断缩小的极限情况(应变趋于常应变)下，位移的连续性能得到恢复，则非协调元的解仍然趋于正确解。因此问题转换为检验非协调元是否能描述常应变，以及在常应变条件下能否自动地保证位移的连续性。

为了检验采用非协调元的任意网格划分时能否达到上述连续性的要求，可以进行分片试验。若能通过分片试验，则解的收敛性就能得到保证。

5.5.2　分片试验

考虑一任意的单元片如图 5.20 所示，其中至少有一个结点是完全被单元所包围的，如图中的结点 i，结点 i 的平衡方程为

$$\sum_{e=1}^{m}(\boldsymbol{K}_{ij}^{e}\boldsymbol{a}_j-\boldsymbol{P}_i^{e})=0 \qquad (5.5.11)$$

其中 m 是单元片包含的单元数，结点 j 代表单元片内除 i 结点外的所有结点。

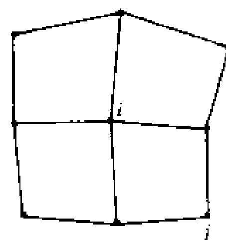


图 5.20　单元片

分片试验是指：当赋予单元片各个结点以与常应变状态相应的位移值和载荷值时，校验(5.5.11)式是否满足。如能满足，则认为通过分片试验，也就是单元能满足常应变要

求，因此当单元尺寸不断缩小时，有限元解能够收敛于真正解。

例如在平面问题中，与常应变相应的位移是线性位移。

$$u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y, \quad v = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \tag{5.5.12}$$

赋予各结点以与常应变状态相应的位移，即令结点位移为

$$u_j = \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j, \quad v_j = \beta_4 + \beta_5 x_j + \beta_6 y_j \tag{5.5.13}$$

由平面问题的方程可知，与常应变（也相当于常应力）状态相应的载荷条件应有体积力为零，同时在 i 结点上也不能作用集中力（包括面积力的等效力），因此 $\boldsymbol{P}_i$ 也必须为零。所以此时，通过分片试验的要求是：当赋予各结点以(5.5.13)式所示位移时，下式仍成立。

$$\sum_{e=1}^{m} \boldsymbol{K}_{ij}^e \boldsymbol{a}_j = 0 \tag{5.5.14}$$

如果上式不成立，说明当单元片各结点具有与常应变状态相应的位移时，结点 i 不能保持平衡。必须在结点 i 施加相应的外载荷，即给 i 结点以某种约束，平衡才能维持。这就说明这种非协调元不能满足常应变的要求。为满足常应变的要求就必须施加必要的约束力，该约束力所作的功等于单元交界面上位移不协调而引起的附加应变能。

分片试验的另一提法是：当分片的边界结点赋予和常应变相应的位移值时，求解方程(5.5.14)式，得到分片的内部结点 i 的位移值 $\boldsymbol{a}_i$，如 $\boldsymbol{a}_i$ 和常应变状态相一致，则认为通过分片试验。如 $\boldsymbol{a}_i$ 与常应变状态不一致，则认为通不过分片试验。通常认为前一种提法应用更方便些，因为后一种提法要涉及矩阵求逆的计算。

现在来研究 Wilson 的 4 结点平面非协调元通过分片试验的条件。这种非协调元的位移插值表示式是(5.5.4)式。我们知道，当单元的位移插值不包含非协调项时（即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$），是满足收敛条件的，当然也必定通得过分片试验。因此，当单元片各结点赋予与常应变相应的(5.5.13)式的位移值时，应有 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$。另一方面(5.5.9)式及(5.5.8)式可知

$$\boldsymbol{\alpha}^e = -(\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1} \boldsymbol{K}_{\alpha u}^e \boldsymbol{a}^e = -(\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1} \int_{V^e} \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d}V \boldsymbol{a}^e \tag{5.5.15}$$

将与常应变状态相应的结点位移记为 $(\boldsymbol{a}^e)_l$，则有

$$\boldsymbol{a}^e = (\boldsymbol{a}^e)_l \tag{5.5.16}$$

因此，通过分片试验的要求是

$$\boldsymbol{\alpha}^e = -(\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1} \int_{V^e} \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d}V (\boldsymbol{a}^e)_l = 0 \tag{5.5.17}$$

又因为 $\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e$ 是非奇异的（因为附加位移不存在刚体移动），其逆 $(\boldsymbol{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1}$ 存在。同时还因为和常应变相应的应力是常应力，即

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}^e)_l = \boldsymbol{\sigma}_l \tag{5.5.18}$$

是常应力状态。所以，通过分片试验的要求可以由(5.5.17)式简化为

$$\int_{V^e} \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}V \equiv \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} |\boldsymbol{J}| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0 \tag{5.5.19}$$

其中 $|\boldsymbol{J}|$ 是单元相应等参变换的 Jacobi 矩阵的行列式。

如将上式的被积函数按显式展开，它将包含下列各项：$\xi(\partial x/\partial \xi)$，$\xi(\partial x/\partial \eta)$，$\xi(\partial y/\partial \xi)$，$\xi(\partial y/\partial \eta)$，$\eta(\partial x/\partial \xi)$，$\eta(\partial x/\partial \eta)$，$\eta(\partial y/\partial \xi)$，$\eta(\partial y/\partial \eta)$。其中

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i$$

插值函数是

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

可以验证，当单元是平行四边形（包括矩形）时，$\partial x/\partial \xi, \partial x/\partial \eta, \partial y/\partial \xi, \partial y/\partial \eta$ 都是常数，因此 $|\boldsymbol{J}|$ 也是常数。这样一来，(5.5.19)式将得到满足。也就是说当网格划分是矩形或平行四边形单元时，非协调元能通过分片试验。当单元尺寸不断减小，非协调元的解答将收敛于真正解。

当然，在实际应用中如果限制单元的形状只能是平行四边形或矩形，那是很不方便而且也是不现实的。为了使非协调元在任意四边形的单元中也能通过分片试验，Wilson 建议在计算 $\boldsymbol{K}_{\alpha u}^{e}$ 时，$\partial x/\partial \xi, \partial x/\partial \eta, \partial y/\partial \xi, \partial y/\partial \eta$ 取单元中心($\xi=\eta=0$)处的数值来代替单元中各点不同的各个偏导数值，因此单元中 $|\boldsymbol{J}|$ 仍是常数。这样(5.5.19)式将恒被满足，也就达到了通过分片试验的要求。实践证明效果良好。

Wilson 还将上述 4 结点平面非协调元的想法推广到 8 结点和 20 结点的三维元以及 16 结点的厚壳元上。例如 8 结点三维非协调元的位移插值表示式是

$$\left.\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{8} N_i u_i + \alpha_1 \overline{N}_1 + \alpha_2 \overline{N}_2 + \alpha_3 \overline{N}_3 \\
v &= \sum_{i=1}^{8} N_i v_i + \alpha_4 \overline{N}_1 + \alpha_5 \overline{N}_2 + \alpha_6 \overline{N}_3 \\
w &= \sum_{i=1}^{8} N_i w_i + \alpha_7 \overline{N}_1 + \alpha_8 \overline{N}_2 + \alpha_9 \overline{N}_3
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.20}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \\
\overline{N}_1 &= (1 - \xi^2), \quad \overline{N}_2 = (1 - \eta^2), \quad \overline{N}_3 = (1 - \zeta^2)
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.21}$$

由于引入了非协调项，使三维 8 结点单元中插值函数的二次项完全了，从而提高了单元精度。这种三维 8 结点的非协调元在计算中可以达到与三维 20 结点协调元同级的计算精度，但是前者的结点数只是后者的 2/5。众所周知，在有限元分析中，计算量最大的运算是求解系统的平衡方程，而解方程的运算量是与结点数的三次方成正比的。所以采用三维非协调元的效果是非常显著的。在许多实际结构的三维有限元分析中已经广泛地采用这种单元。与二维非协调元类似，这种单元通过分片试验的条件是单元形状应是平行六面体。对于一般形状的单元亦和二维单元类同，计算 $\boldsymbol{K}_{\alpha u}^{e}$ 时，$\partial x/\partial \xi, \partial x/\partial \eta, \partial y/\partial \zeta, \cdots$ 等采用单元中心($\xi=\eta=\zeta=0$)处的数值来近似，强迫单元通过分片试验。

5.6 小　结

本章讨论了与有限元法实际应用有关的几个问题。首先在 5.2 节，从为得到更好的应力结果出发，在分析和认识基于位能原理的位移元应力结果的性质和特点的基础上，推荐

了几种常用的处理和改善应力结果的方法。对应力结果性质的认识和应力结果改善的方法是当前有限元方法发展的重要课题之一，即自适应分析中也起着基础性的作用。所谓自适应分析方法就是在第1次有限元分析以后，对应力结果的误差作出估计，如未达到所要求的精度，则通过自动的加密网格或提高单元的阶次(即采用3.5节的阶谱单元)，进行第2次分析，如此继续直到满足所要求的精度为止。为对应力结果的精度作出估计，对它性质的认识，并通过处理得到本次分析后相对比较精确的数值无疑是必要的前提。

在5.3节所讨论的子结构方法中，两个重要的问题是：子结构的合理选择和划分，以及内部自由度的凝聚方法和坐标转换的方法。将子结构方法推广用于动力分析形成动力子结构法(又称模态综合法)，可以大幅度地缩减系统分析的自由度、提高计算效率，是复杂系统动力分析最基本的有效方案之一。

5.4节讨论了在建立计算模型的过程中如何利用结构的对称性和周期性的方法。结构面对称性的利用中重要的是要分清位移对于该对称面的对称分量和反对称分量。结构轴对称性的利用中重要的是要掌握对各载荷分量和各位移分量进行Fourier展开和合成的方法，从而使三维问题简化为通过对称轴的平面上的二维问题。结构旋转周期性的利用可以看成是轴对称性的推广，不同的是最后只能将问题缩减为一个典型子结构的三维问题。重要的是要正确描述此子结构和其前后相邻子结构交界面上的位移约束条件。在载荷不具有相同周期性的条件下，此约束条件是复数形式，导致最后的求解方程也是复数形式的。旋转周期子结构方法对于这类结构的动力分析具有更广泛的实际意义。

5.5节讨论的非协调元本是单元的一种形式，从提高计算效率的实际目的出发故放在本章进行讨论。它在应用中的重要问题是内部自由度凝聚和计算的方法，以及单元收敛性条件的保证。5.5节所引入的分片试验不仅对Wilson非调元、而且对其它各种非协调元收敛性条件的检查和建立具有普遍意义。此外，从实际应用出发，在有限元分析中，还常引用一些其它形式的特殊单元，例如断裂力学分析中的奇异元，结构与基础或与流体相互作用分析中的无穷元等，限于篇幅，本书不能一一列举和讨论。

除以上几个问题而外，有限元分析中方程组的求解方法对整个计算的精度和效率有重要影响，这将在下一章专门讨论。关于有限元分析程序的组成和前后处理的有关技术将在第7章专门讨论，并给出一个教学性的二维问题程序作为范例。

习　题

5.1　单元具有p次多项式的位移函数，泛函中的微分阶数是m，形成单元刚度矩阵时采用$n+1$阶Gauss积分(其中$n=p-m$)。为什么说，对于结点等间距分布的一维杆单元其应力的近似解在Gauss积分点上能够具有比自身高一次的精度，而对于其他情况，特别是二维、三维单元情况，上述结论只能是近似的？

5.2　垂直悬挂的等截面直杆受自重作用，截面积为A，长度为l。质量密度为ρ(如图5.21所示)。如用一维杆单元求解杆内的应力分布，问应采用多少结点的单元？在什么位置有限元结果可以达到解析解的精度？并给出它们的数值。

5.3　证明：对于8结点二维平面单元的各个应力分量分别采用4结点应力插值函数

进行单元应力磨平(参见 5.2.21 式)和利用(5.2.24)式用 4 个高斯点的应力近似值 σ^* 外推得到结点应力值是相同的。

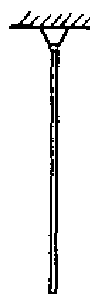


图 5.21

5.4 证明:在利用位移元求解以后的应力磨平,如果假设的应力改进解已事先满足平衡条件和力的边界条件,则 $A(\sigma^*,\sigma)$(5.2.13 式)和$A_e(\sigma^*,\sigma)$(5.2.16 式)的变分分别和在给定位移边界上和单元交界面上的位移条件下的最小余能原理相等价。

5.5 有中心椭球孔的矩形板,两个侧边受线性分布的侧压 p,如图5.22所示。如何利用对称面条件减少求解的工作量,并画出计算模型,列出计算步骤。

5.6 高度为 h、宽度为 $9a$ 的矩形板,$h/2$ 高度上有 3 个尺寸相同的矩形孔(如图5.23 所示),侧面受线性分布侧压。如何利用其自身的几何特点减少计算工作量,并画出计算模型、列出计算步骤。

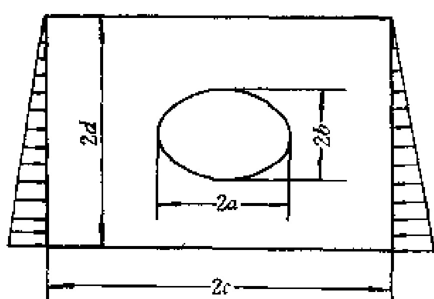


图 5.22

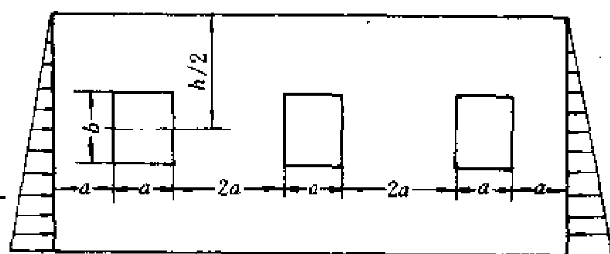


图 5.23

5.7 图 5.11 所示三通结构,如在其右端受有剪力 P_{y2},如何利用其 1/4 计算模型求解?

5.8 利用旋转周期结构的原理和方法求解图 5.14 所示的受风载的塔,风载在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 区域呈余弦分布,即 $p=p_0\cos\theta$,在$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}$区域内为 0。假定取塔的 1/8 作为计算模型,列出计算步骤,并具体计算出载荷的各阶 Fourier 系数 $\boldsymbol{F}_i$。

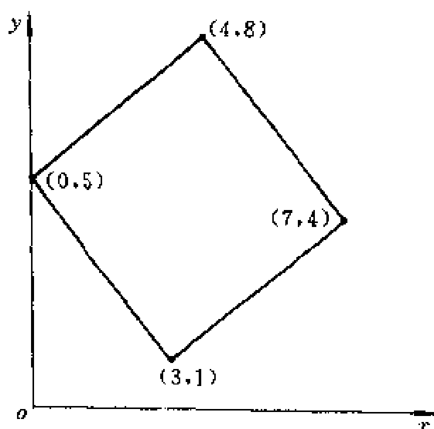


图 5.24

5.9 图 5.24 所示是一平行四边形形状的 4 结点 Wilson 非协调元，验证它是通过分片试验的。

参考文献

1 郁吉仁，岑章志，王勖成. 三通有限元自动分析. 核动力工程，1982 年第 2 期，92～98

2 Ramamurti V and Balasubramanian P. Steady State Stress Analysis of centrifugal For Impellers. Computers & Structures, 1987, 25(1), 129～135

3 Balasubramanian P and Ramamurti V. An Equation Solver for Eigenvalue Problems of Cyclic Symmetric Structures. Computers & Structures, 1987, 26, 667～672

4 Wilson E L, Taylor R L, Doherty W P and Ghaboussi J. Incampatible Displacement Modols, In: Fenves S J, et al. Numerical and computer Methods in Structural Mechanics. Academic Press, 1973

第 6 章　线性代数方程组的解法

6.1 引　　言

迄今为止，我们主要讨论了静力平衡问题的有限元格式。在确定了离散所需要的单元形式后，需要进行单元特性矩阵的计算，最后由单元特性矩阵集合而成的有限元求解方程 $\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$ 是一组联立的线性代数方程组。这组方程在静力平衡问题中就是以结点位移为基本未知量的系统结点平衡方程；在求解稳定温度场的问题中（见第 13 章）就是以结点温度为基本未知量的系统结点热平衡方程。有限元求解的效率很大程度上取决于这组线性代数方程组的解法。在第 2 章中曾指出，有限元分析可以通过细分单元的网格来提高解的精度。因此，当有限元分析采用越来越多的单元离散模型来近似实际的结构时，线性联立方程组的阶数越来越高。曾经有相当一部分的研究工作是围绕如何有效地求解这组庞大的线性代数方程组的。

在线性静力分析中，解代数方程组的时间在整个解题时间中占有很大的比重。而在动力分析和非线性分析中这部分比重也是相当大的。若采用不适当的求解技术，不仅计算费用大量增加。更严重的是有可能导致求解过程的不稳定和求解的失败。

在本章中，我们只讨论线性代数方程组

$$\boldsymbol{Ka} = \boldsymbol{P} \tag{6.1.1}$$

的解法。由以后的章节可以看到，这章讨论的内容也是特征解和直接逐步积分的基础，因此有必要作较为详尽的讨论。

在有限单元法中，需求解的线性代数方程组(6.1.1)的系数矩阵 $\boldsymbol{K}$，即刚度矩阵，如同第 2 章 2.2.6 节中所述，具有大型、对称、稀疏、带状分布以及正定、主元占优势的特点。在求解方程组时必须利用上述特点，以提高方程求解的效率，否则将无谓地提高计算费用。

线性联立方程组的解法可以分作两大类：直接解法和迭代解法。

直接解法以高斯消去法为基础，求解效率高。在方程组的阶数不是特别高时（例如不超过 10000 阶），通常采用直接解法。当方程组的阶数过高时，由于计算机有效位数的限制，直接解法中的舍入误差，消元中有效位数的损失等将会影响方程求解的精度，此时可用迭代解法。

本章主要讨论几种常用的比较有效的直接解法，如等带宽高斯消去法、三角分解法以及以上述两法为基础，适用于更大型方程组求解的分块解法和波前法等。对于迭代解法，本章讨论了高斯-赛德尔迭代和超松弛迭代这两种基本算法。

6.2 系数矩阵在计算机中的存储方法

有限元法中，线性代数方程组的系数矩阵是对称的，因此可只存储一个上三角（或下

三角)矩阵。但是由于矩阵的稀疏性,仍然会发生零元素占绝大多数的情况。考虑到非零元素的分布呈带状特点,在计算机中系数矩阵的存储一般采用二维等带宽存储或一维变带宽存储。

6.2.1 二维等带宽存储

对于 n 阶的系数矩阵,若取最大的半带宽 D 为带宽,则上三角阵中的全部非零元素都将包括在这条以主对角元素为一边的一条等宽带中,如图 6.1(a)所示。二维等带宽存

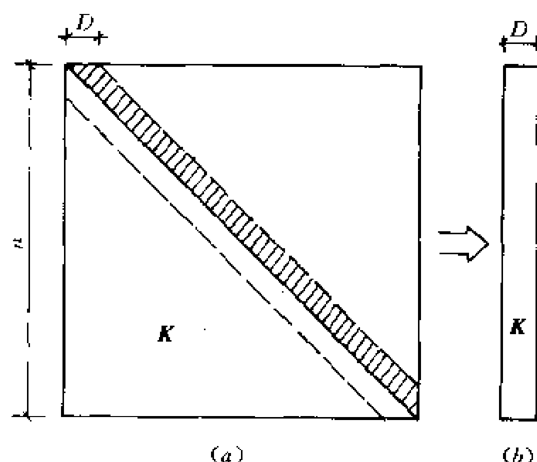


图 6.1 二维等带宽存储

储就是将这样一条带中的元素,以二维数组,如图 6.1(b)的形式存储在计算机中,二维数组的界是 $n\times D$。我们以具体例子来说明这种存储是如何进行的。图 6.2(a)为一个假定的 8×8 刚度矩阵,它的最大带宽 $D=4$。将每行在带宽内的元素按行置于二维数组中,图 6.2(b)表示的是原刚度系数在二维数组中的实际位置。图 6.2(c)表示的是元素在二维数组中的编号。可以看到,由于对角元素都排在二维数组的第一列,因此二维数组中元素的列数都较原来的列数有一错动,而行则保持不变。若把元素原来的行、列码记为 i、j,它在二维数组中新的行、列码记为 i^*、j^*,则有

$$
\begin{aligned}
i^* &= i \\
j^* &= j - i + 1
\end{aligned}
\tag{6.2.1}
$$

如原刚度元素 K_{67} 在二维等带宽存储中应是 K_{62}。

采用二维等带宽存储,消除了最大带宽以外的全部零元素,较之于存全部上三角阵大大节省了内存。但是由于取最大带宽为存储范围,因此它不能排除在带宽范围内的零元素。当系数矩阵的带宽变化不大时,采用二维等带宽存储是合适的,求解也是方便的。但当出现局部带宽特别大的情况时,采用二维等带宽存储时将由于局部带宽过大而使整体系数矩阵的存储大大增加,此时可采用一维变带宽存储。

6.2.2 一维变带宽存储

一维变带宽存储就是把变化的带宽内的元素按一定的顺序存储在一维数组中。由于

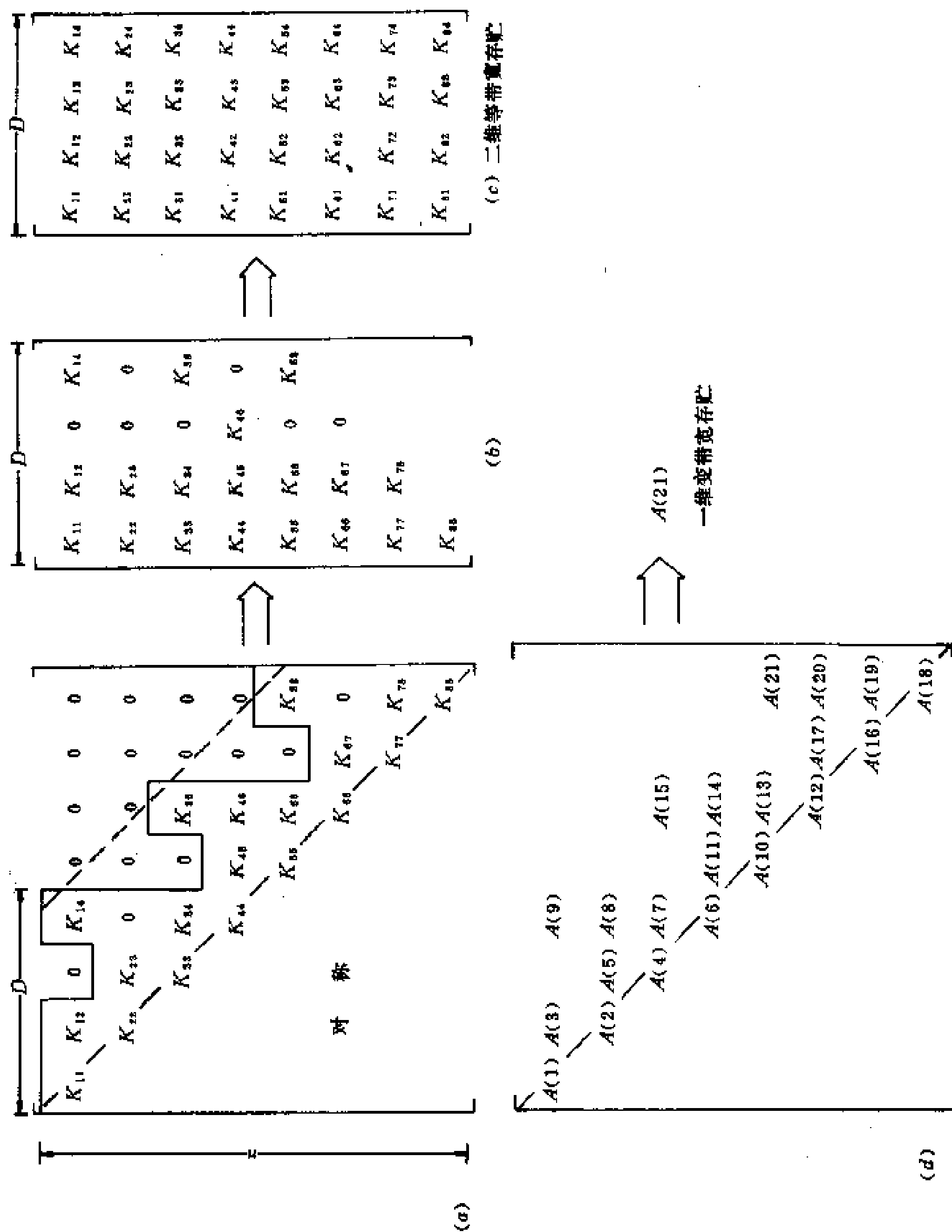


图 6.2 二维等带宽及一维变带宽存储元素对应关系

它不按最大带宽存储，因此较二维等带宽存储更能节省内存。按照解法可分为按行一维变带宽存储及按列一维变带宽存储。现在我们仍旧利用图 6.2(a)中的系数矩阵，进行按列的一维变带宽存储。

按列一维变带宽存储是按列依次存储元素，每列应从主对角元素直至最高的非零元素，即该列中行号最小的非零元素为止，即图 6.2(a)中实线所包括的元素。由图可以看出这种存储较二维等带宽存储(图中虚线表示)少存了一些零元素，但是对夹在非零元素内的零元素，如 K_{24}，K_{68}等则必须存储。图 6.2(d)中表示的是这些元素按列在一维数组中的排列。

把系数矩阵中的元素紧凑存储在一维数组中，必须有辅助的数组帮助记录原系数矩阵的性状，例如对角元素的位置、每列元数的个数等。辅助数组 $M(n+1)$，用以记录主对角元素在一维数组中的位置。对于图 6.2(d)的一维数组，它的 $M(8+1)$数组是

$$M:[1,2,4,6,10,12,16,18,22]$$

前 n 个数记录的是主对角元素的位置，最后一个数是一维数组长度加 1。

利用辅助数组 M，除了知道各主元在一维数组中的位置以外，还可以用以计算每列元素的列高 N_i，即每列元素的个数，以及每列元素的起始行号 m_i。

$$\begin{aligned} N_i &= M(i+1) - M(i) \\ m_i &= i - N_i + 1 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

例如求第四列元素个数 N_4

$$N_4 = M(5) - M(4) = 10 - 6 = 4$$

求第六列元素的个数及非零元素的起始行号 N_6 及 m_6

$$N_6 = M(7) - M(6) = 16 - 12 = 4$$

$$m_6 = 6 - 4 + 1 = 3$$

有了辅助数组 M 后，可以找到一维数组中相应的元素进行方程组的求解。

一维变带宽存储是最节省内存的一种存储方法，但由于寻找元素较二维等带宽存储复杂，由此程序的编制亦较复杂且计算时耗用的机时较二维等带宽存储要多。因此在选用存储方式上要权衡二者的利弊，统盘考虑。通常，当带宽变化不大，计算机内存允许时，采用二维等带宽存储还是合适的。

6.3 高斯消去法

在本节中，我们将首先讨论通常的高斯消去法，它是直接解法的基础，而高斯-约当消去法则是它的变形。

6.3.1 高斯消去法

高斯循序消去法的一般公式：

对于 n 阶线性代数方程 $\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$，需进行 $n-1$ 次消元。采用循序消去时，第 m 次消元以 $m-1$ 次消元后的第 m 行元素作为主元行，$K_{mm}^{(m-1)}$为主元，对第 i 行元素($i>m$)的消元公式为

$$K_{ij}^{(m)} = K_{ij}^{(m-1)} - \frac{K_{im}^{(m-1)}}{K_{mm}^{(m-1)}} K_{mj}^{(m-1)} \tag{6.3.1}$$

$$P_i^{(m)} = P_i^{(m-1)} - \frac{K_{im}^{(m-1)}}{K_{mm}^{(m-1)}} P_m^{(m-1)}$$

$$(m = 1, 2, \cdots, n-1), (i, j = m+1, m+2, \cdots, n)$$

式中 $K_{ij}^{(m)}$，$P_i^{(m)}$，…等的上角码(m)，…表示该元素是经过 m 次消元后得到的结果。同样，可以把经过 m 次消元后的系数矩阵和载荷阵分别记为 $\boldsymbol{K}^{(m)}$ 及 $\boldsymbol{P}^{(m)}$。(6.3.1)式表明第 m 次消元是在第 $m-1$ 次消元的基础上进行的。

消元过程中，主元及被消元素的位置可见图 6.3(a)。图中阴影部分为已完成消元过程的元素，主元行以下的矩阵是待消部分。在进行第 m 次消元时，1～m 行元素的消元过程已经完成，其中的元素就是消元最后得到的上三角阵中的元素。m 行以下的元素消元过程尚未结束，连同 m 行元素在内构成一个待消的方阵。消元共需进行 $n-1$ 次。

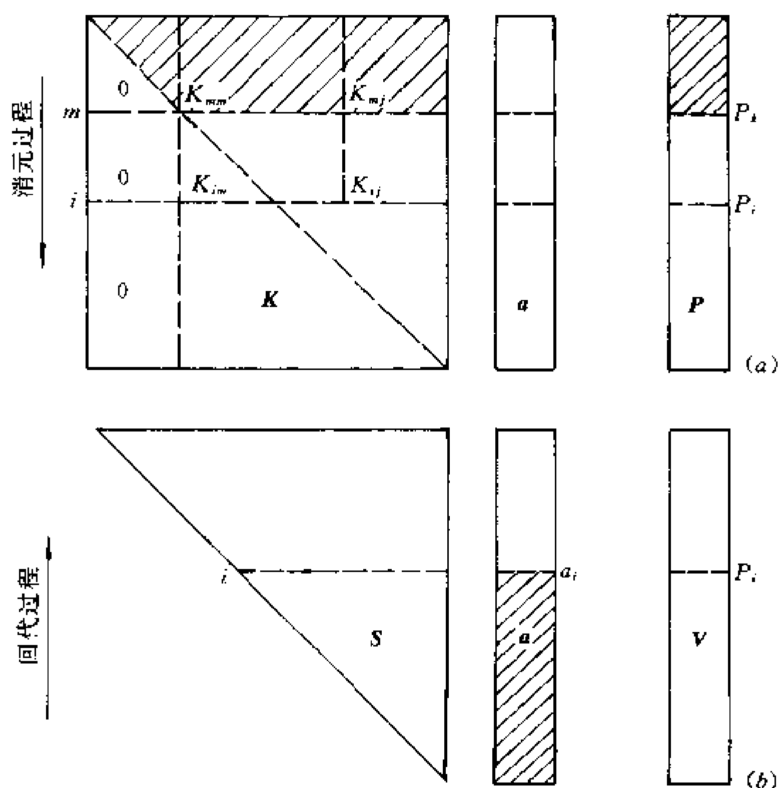


图 6.3　高斯消去法

消元完成后，即可回代求解。我们把消元最后结果记为 $\boldsymbol{K}^{(n-1)}=\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{P}^{(n-1)}=\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{S}$ 为上三角阵，回代公式可写作

$$a_n = \frac{P_n^{(n-1)}}{K_{nn}^{(n-1)}} = \frac{V_n}{S_{nn}}$$

$$a_i = \left(P_i^{(n-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} K_{ij}^{(n-1)} a_j \right) \Big/ K_{ii}^{(n-1)} \tag{6.3.2}$$

$$=\left(V_i-\sum_{j=i+1}^{n}S_{ij}a_j\right)\Big/S_{ii}$$

$$(i=n-1,n-2,\cdots,3,2,1)$$

回代过程自后向前进行。当回代求解 a_i 时，$a_{i+1}\sim a_n$ 已经解得。回代示意图见图 6.3(*b*)，阴影部分为已求得解答的部分。

在计算机上求解时，为节省内存，通常将求得的解答 $\boldsymbol{a}$ 放在 $\boldsymbol{P}$ 中，此时回代公式可改写为

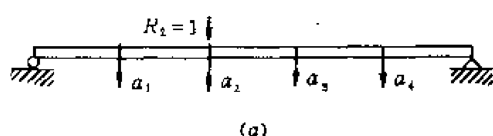
$$P_n=\frac{P_n}{K_{nn}}$$

$$P_i=\left(P_i-\sum_{j=i+1}^{n}K_{ij}P_j\right)\Big/K_{ii} \tag{6.3.3}$$

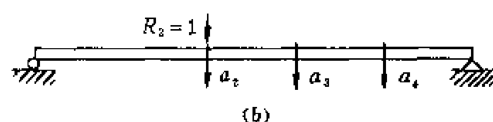
$$(i=n-1,n-2,\cdots,3,2,1)$$

下面用一个例题来说明高斯消去法的进行过程，并讨论这个过程在求解结构静力学问题时的物理意义。

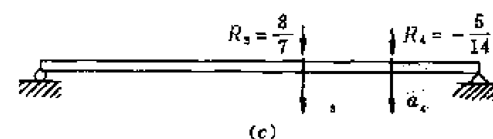
例 1 图 6.4 中所示的简支梁，$L=5$，$EI=1$，用差分格式求解时，得到的求解方程是



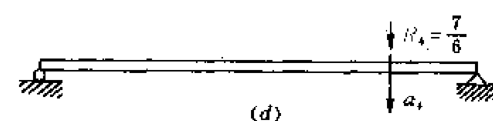
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

图 6.4 梁消元过程中的物理模型

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.3.4}$$

其中 $a_1 \sim a_4$ 是简支梁五等分点的挠度。式中的系数矩阵，即刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$，与有限单元法分析中的刚度矩阵具有相同的性质。因此(6.3.4)式就可看作是(6.1.1)式的一个具体例子。

用高斯消去法求解方程(6.3.4)，首先把方程①作为主元行，按照(6.3.1)式，对于被消方程②有　　②$+\frac{4}{5}\cdot$①

方程③有　③$-\frac{1}{5}\cdot$①

方程④有　④$-0\cdot$①

第一次消元后得到

$$\boldsymbol{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 \\ 0 & -\frac{16}{5} & \frac{29}{5} & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{K}^{(1)}$，$\boldsymbol{P}^{(1)}$ 的角码(1)表示该矩阵是经过1次消元后得到的结果。以后将以 $\boldsymbol{K}^{(m)}$，$\boldsymbol{P}^{(m)}$ 表示经过 m 次消元后的矩阵。$\boldsymbol{K}^{(1)}$ 及 $\boldsymbol{P}^{(1)}$ 中虚线所包含的方程为下一次消元的方程组，称为待消方程组。

把未进行消元的初始矩阵记为 $\boldsymbol{K}^{(0)}$，$\boldsymbol{P}^{(0)}$，上述消元过程可看作是初始矩阵作了一次线性变换，即前乘了一个下三角矩阵 $\boldsymbol{L}_1^{-1}$

$$\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{K}^{(0)} = \boldsymbol{K}^{(1)}, \quad \boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{P}^{(0)} = \boldsymbol{P}^{(1)}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{4}{5} & 1 & & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

较原来方程组阶数低一阶的待消方程组可以看作是另外一根具有不同几何特征的简支梁，它的刚度矩阵是 $\boldsymbol{K}^{(1)}$ 中虚线包含的部分，作用有 $\boldsymbol{P}^{(1)}$ 中虚线部分的集中载荷。结点位移有 $a_2 \sim a_4$，如图6.4(*b*)所示。这根梁与原命题的梁具有相同的 a_2，a_3，a_4 值。由于待消方程组可以看作是另一等效结构的求解方程组，因此待消方程组的系数矩阵亦具有对称、稀疏、带状分布以及正定、主元占优势的特点。正因为如此，在消去过程中不必选择主元，只需依次循序消去即可。

继续消元有

$$L_2^{-1}K^{(1)} = K^{(2)}, \qquad L_2^{-1}P^{(1)} = P^{(2)}$$

$$L_3^{-1}K^{(2)} = K^{(3)} = S, \qquad L_3^{-1}P^{(2)} = P^{(3)} = V$$

上式中各矩阵是

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{7} & \frac{65}{14} \end{bmatrix}, \quad P^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{7} \\ -\frac{5}{14} \end{Bmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & \frac{8}{7} & 1 & \\ 0 & -\frac{5}{14} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{(3)} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad P^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{7} \\ \frac{7}{6} \end{Bmatrix}, \quad L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

第二次消元后的待消方程可以看作是图 6.4(c)中所示等效梁的求解方程，它具有与原命题梁相等的位移 a_3 和 a_4。第三次消元后的最后一个方程，只含有一个未知量 a_4 的待解方程可以看作是图 6.4(d)中的等效梁。

整个求解过程可写作

$$L_3^{-1}L_2^{-1}L_1^{-1}K^{(0)} = K^{(3)} = S$$

$$L_3^{-1}L_2^{-1}L_1^{-1}P^{(0)} = P^{(3)} = V$$

得到最后求解方程

$$K^{(3)}a = P^{(3)}$$

由上式最后一个方程开始，按(6.3.2)式自后向前求得未知量 a_4, a_3, a_2 和 a_1

$$a_4 = \frac{7/6}{5/6} = \frac{7}{5}, \qquad a_3 = \frac{8/7 - (-20/7)a_4}{15/7} = \frac{12}{5}$$

$$a_2 = \frac{1 - (-16/5)a_3 - (1)a_4}{14/5} = \frac{13}{5}, \quad a_1 = \frac{0 - (-4)a_2 - (1)a_3 - (0)a_4}{5} = \frac{8}{5}$$

对于通常的 n 阶线性方程组(6.1.1)式，经过 $n-1$ 次消元后得到

$$Sa = V \tag{6.3.5}$$

S 为上三角矩阵。消元过程可综合为

$$\begin{aligned} L_{n-1}^{-1}L_{n-2}^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1}K &= S \\ L_{n-1}^{-1}L_{n-2}^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1}P &= V \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

其中

$$L_m^{-1} = m\begin{bmatrix} 1 & & \text{未注明的元} & & & \\ & 1 & \text{素为零元素} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & \cdots\cdots & 1 & & \\ & & & -l_{m+1,m} & \ddots & \\ & & & -l_{m+2,m} & & \ddots \\ & & & \vdots & & & \ddots \\ & & & -l_{n,m} & & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad l_{m+j,m} = \frac{K_{m+j,m}^{(m-1)}}{K_{mm}^{(m-1)}} \tag{6.3.7}$$

元素 $l_{m+j,m}$ 就是高斯消去因子，第二个下标 m 表示第 m 次消元时前乘的下三角矩阵 L_m^{-1} 中的元素。$K_{m+j,m}^{(m-1)}$ 及 $K_{mm}^{(m-1)}$ 是系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 经过 $m-1$ 次消元后的相应元素。

(6.3.6)式可以简写为

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{S} \tag{6.3.8}$$

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V} \tag{6.3.9}$$

其中：

$$\boldsymbol{L}^{-1} = \boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{L}_{n-2}^{-1}\cdots\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{L}_1^{-1} \tag{6.3.10}$$

$\boldsymbol{L}^{-1}$ 仍是一个下三角矩阵。

(6.3.8)式可以写作

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{S} \tag{6.3.11}$$

$\boldsymbol{L}$ 可由(6.3.10)式求逆得到

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_{n-2}\boldsymbol{L}_{n-1} \tag{6.3.12}$$

其中 $\boldsymbol{L}_m$ 只需简单地改变 $\boldsymbol{L}_m^{-1}$ 中非对角元素的符号就可以得到

$$\boldsymbol{L}_m = m\begin{bmatrix} 1 & & \text{未注明的元素} & & & \\ & 1 & \text{为零元素} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & \cdots\cdots & 1 & & \\ & & & l_{m+1,m} & \ddots & \\ & & & l_{m+2,m} & & \ddots \\ & & & \vdots & & & \ddots \\ & & & l_{n,m} & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{6.3.13}$$

(6.3.12)式表示的 $\boldsymbol{L}$ 矩阵是

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{6.3.14}$$

$\boldsymbol{L}$ 是一个下三角矩阵。

由(6.3.11)式可以看到，一个任意阶的方阵 $\boldsymbol{K}$ 可以分解为一个下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和一个

上三角矩阵 S 的乘积。由于有限单元法中系数矩阵 K 是对称矩阵，在这种情况下分解得到的上三角矩阵 S 和下三角矩阵 L 存在什么关系呢？我们可以把上三角矩阵 S 写作 $S=D\tilde{S}$。D 是对角矩阵，它的对角元素就是 S 矩阵的对角元素，即 $d_{ii}=S_{ii}$。$\tilde{S}$ 是单位上三角阵，它的对角元素为 1。将此关系代入(6.3.11)式得到

$$K = LD\tilde{S}$$

由于 K 是对称矩阵，$K=K^{T}$，可以得到 $\tilde{S}=L^{T}$，因此 K 矩阵的分解可以写为

$$K = LDL^{T} \tag{6.3.15}$$

例 2 对于例 1 中的方程组求出 S, L, D, V 矩阵。

根据例 1 的消元过程和结果，我们可以直接写出下列矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 \\ & & \frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & & & \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & & \\ \frac{1}{5} & -\frac{8}{7} & 1 & \\ 0 & \frac{5}{14} & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & \frac{14}{5} & & 0 \\ 0 & & \frac{15}{7} & \\ & & & \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{7} \\ \frac{7}{6} \end{Bmatrix}$$

可以验证 $S=DL^{T}$。

分析上述求解过程，可以得到高斯消去过程的一般规律：

(1) 若原系数矩阵是对称矩阵，则可以证明消元过程中的待消矩阵仍保持对称。由于

$$K_{ij}^{(m)} = K_{ij}^{(m-1)} - \frac{K_{im}^{(m-1)}}{K_{mm}^{(m-1)}} K_{mj}^{(m-1)}$$

$$K_{ji}^{(m)} = K_{ji}^{(m-1)} - \frac{K_{jm}^{(m-1)}}{K_{mm}^{(m-1)}} K_{mi}^{(m-1)}$$

若未消元时系数矩阵是对称的，即 $K_{ij}^{(0)}=K_{ji}^{(0)}$，则可由上面的关系得到 $K_{ij}^{(m)}=K_{ji}^{(m)}$。因此，对称矩阵消元时有可能只在计算机中存储系数矩阵的上三角(或下三角)部分的元素而不必存储全部系数矩阵。

(2) 消元最后得到的第 i 行元素是第$(i-1)$次消元的结果，即

$$K_{ij}^{(n-1)} = K_{ij}^{(i-1)} = S_{ij}, \quad P_{i}^{(n-1)} = P_{i}^{(i-1)} = V_{i}$$

(3) 自由项列阵 P 消元时所用到的元素都是系数矩阵消元最后的结果，因此 P 的消元可以与系数矩阵 K 同时进行，也可以在 K 消元完成后再对 P 进行消元。

在用有限单元法解题时，若有多组载荷，即多组 P，则刚度矩阵 K 只需进行一遍消元。多组载荷可分别利用消元后 K 的结果进行消元和求解，这样可以大大节省求解所需的机时。

6.3.2 高斯-约当消去法

一般的高斯消去法是将方程的系数矩阵消成一个上三角阵，而后进行回代求解。高斯-约当消去法是将方程的系数矩阵消成一个单位对角阵，这样经消元后的自由项列阵就是代数方程的解，因此高斯-约当消去法没有回代过程。下面我们仍用例 1 中的方程进行高斯-约当消去。

例 3 用高斯-约当消去法求解例 1 中的代数方程。为了方便，我们将系数矩阵和自由项列阵合并为一个增广矩阵，自由项列阵作为最后一列元素。增广矩阵如下

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

高斯-约当消去的过程如下：

(1) 修正第 1 行元素，使主元为 1。做法是将第 1 行元素都乘以 1/5，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

(2) 对第 2 行元素进行消元。由②+4·①得到

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

将第 2 行元素乘以 5/14，使主元等于 1

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

反消第 1 行元素，使 1 行 2 列的元素为零，由①+(4/5)·②得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

(3) 顺序对第 3 行元素进行消元，将第 3 行中第 1、2 两个元素都消去，故消元需进行

两次。由③+(−1)・①得到

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & -4 & \frac{47}{7} & -\frac{30}{7} & -\frac{2}{7} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

再进行第二次消元，由③+4・②得到

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{20}{7} & \frac{8}{7} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

消元结束后将第3行元素主元修正为1，只需乘以7/15，得到

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{15} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

利用第3行元素反消第1、2行元素，使该两行第3列的元素为零。首先反消第1行，由①+(5/7)・③得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

反消第2行元素用②+(8/7)・③。结果得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{29}{30} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{15} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

(4) 对第4行元素也进行与上述类同的工作。首先是消元，一般需要进行三次：④+0・①(由于第1列元素原来就是零，因此这次消元实际不做)；④+(−1)・②以及④+4・③得到

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

第 4 行元素乘以 6/5 得到

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

对 1～3 行进行反消：①＋(2/3)・④；　②＋(7/6)・④以及③＋(4/3)・④，最后得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

最后得到的增广矩阵，它的最后一列就是线性代数方程组的解答，右边是原系数矩阵经过高斯-约当消去后得到的单位矩阵。

由例题可见，对于一个 n 阶的线性代数方程组，循序的高斯-约当消去法的执行步骤如下：

将 n 阶线性代数方程组的系数矩阵和自由项列阵构成$[n\times(n+1)]$阶的增广矩阵 $\tilde{K}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} & K_{1,n+1} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} & K_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} & K_{n,n+1} \end{array}\right]$$

原系数矩阵　　　　　　原自由项列阵

首先将第 1 行元素的主元 K_{11}除第 1 行所有的元素，使 $K_{11}^{(1)}=1$

$$K_{1j}^{(1)} = K_{1j}/K_{11} \quad (j = 1,2,\cdots,n,n+1) \tag{6.3.16}$$

以后的第 2～n 行按下列步骤进行：对于第 i 行元素($i=2,3,\cdots,n$)：

(1) 正消过程　将第 i 行元素中的前 $i-1$ 个元素消为零元素，即要使 $K_{i1},K_{i2},\cdots,K_{i,i-1}$消为零元素。消元需进行 $i-1$ 次。正消计算公式如下：

$$K_{ij}^{(i-1)} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,i-1)$$

$$K_{ij}^{(i-1)} = K_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} K_{im}K_{mj} \quad (j = i,i+1,\cdots,n,n+1) \tag{6.3.17}$$

(2) 使第 i 行主元 $K_{ii}=1$

$$K_{ij} = K_{ij}/K_{ii} \quad (j = i,i+1,\cdots,n_1,n+1) \tag{6.3.18}$$

(3) 反消过程　将前 $i-1$ 行元素中的第 i 列元素反消为零，即要使 $K_{1i}=K_{2i}=\cdots=K_{i-1,i}=0$。反消亦需进行 $i-1$ 次，计算公式如下.

$$K_{mj} = K_{mj} - K_{mi}K_{ij} \quad (m = 1,2,\cdots,i-1) \quad (j = 1,2,\cdots,n,n+1) \tag{6.3.19}$$

自 $i=2$ 开始，重复(1)～(3)步骤直至 $i=n$，这样得到的增广矩阵最后一列的元素就是线性代数方程组的解。

值得指出的是：

(1) 高斯-约当消去法在形式上没有回代过程，实质上反消过程就相当于高斯消去法中的回代。

(2) 高斯-约当消去法最后得到系数矩阵是单位阵，不能像高斯消去法那样利用消元后的系数矩阵求解多组载荷。在高斯-约当消去法中多组载荷，即有多组自由项列阵，可以一并放在增广矩阵中，一次求得多组载荷的解。例如有 r 组载荷，增广矩阵为$[n\times(n+r)]$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} & K_{1,n+1} & \cdots & K_{1,n+r} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} & K_{2,n+1} & \cdots & K_{2,n+r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} & K_{n,n+1} & \cdots & K_{n,n+r} \end{bmatrix}$$

第1组 … 第 r 组

系数矩阵　　　　自由项

有关公式(6.3.17)～(6.3.19)只需将循环下标由 $n+1$ 改为 $n+r$ 即可。

6.3.3 二维等带宽存储的高斯消去法

1. 工作三角形

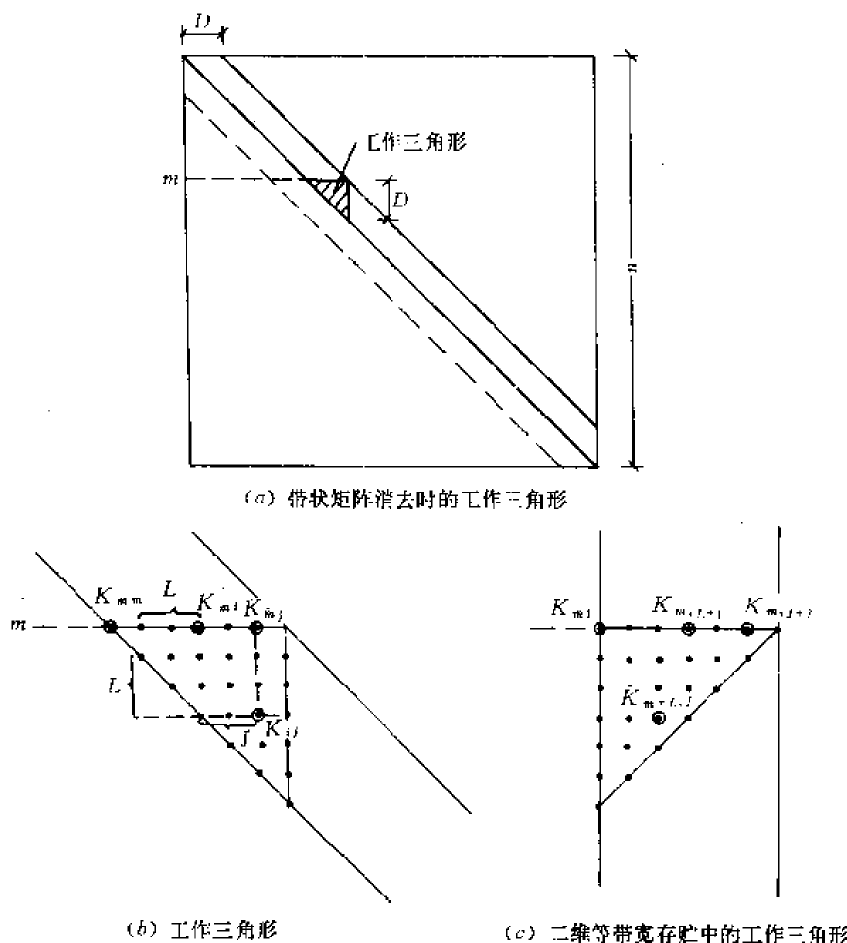
对于 n 阶方程组，通常高斯循序消去法的第 m 次消元是以第 m 个方程为主元行，对它以下的第 $m+1$ 直至第 n 个方程进行一次消元修正。对于带状分布的稀疏矩阵，每次消元修正有什么特点呢？我们仍把最大带宽取为 D①。图 6.5 中表示的是一个 n 阶方程的系数矩阵，非零元素集中分布在带宽 D 的狭长区域内。对于第 m 次消元来说，第 1 至 m 个方程的消元已经结束。即 $1\sim m$ 行对角元素前的元素都已消去，m 行以后行上第 m 列以前的相应元素也都已消为零。第 m 次消元的作用是以 m 行为主元素行，消去以 $m+1$ 行开始的后面方程中的第 m 列元素。由于非零元素的带状分布，因此第 m 列存在非零元素的方程最多只可能是包括第 m 个方程在内的共计 D 个方程，以后的方程第 m 列元素本来就是零元素，不需消元，因此每次消元涉及修正的方程只是第 m 个方程后的 $D-1$ 个方程(第 m 个方程本身除外)。对这 $D-1$ 个方程需修正的元素是哪些呢？如对 m 个方程以下的第 L 个方程消元修正，所需修正的元素仅是图示的 J^* 个元素，$J^*+L=D$。J^* 个元素以后的元素由于主元行相应的元素为零而不需修正。由(6.3.1a)式说明：

$$K_{ij}^{(m)} = K_{ij}^{(m-1)} - \frac{K_{im}^{(m-1)}}{K_{mm}^{(m-1)}} K_{mj}^{(m-1)} \tag{6.3.1a}$$

当 $i>m+D-1$ 时，由于 $K_{im}^{(m-1)}=0$，因此修正项为零；当 $j>D+m-1$ 时，由于 $K_{mj}^{(m-1)}=0$ 而修正项为零。

由以上分析可见，每一次消元所需修正的元素只是包括在 m 行元素下面的一个三角

① 带宽 D_i＝(结点 i 的最大相关结点码差＋1)×结点自由度数
最大带宽 $D=(D_i)_{max}$　$i=1,2,\cdots,n$(n 为结点数)



(a) 带状矩阵消去时的工作三角形

(b) 工作三角形

(c) 二维等带宽存贮中的工作三角形

图 6.5　工作三角形

形内,我们把这个三角形(包括第 m 行元素)称为工作三角形。工作三角形内的需修正的元素个数是$\frac{1}{2}D(D-1)$个。由于考虑了元素带状分布的特点,高斯消去法所需修正的元素大大减少,提高了计算效率。

2. 二维等带宽存储的高斯消去法

带状稀疏矩阵采用二维等带宽存储时,对通常满阵时的高斯消去公式(6.3.1)式以及回代公式(6.3.2)应作两方面的修正。

(1) 按照二维等带宽存储中元素的行列码代替该元素在原系数矩阵中的行列码。

(2) 按照工作三角形修正消元和回代公式中行列码变化的界。

第 m 次消元,主元行是第 m 行,被消元的行记作 $i=m+L$ 行。二维等带宽存储时,元素行列码由原系数矩阵的 $K_{ij} \Rightarrow K_{ij}^{*}$,行、列码转换关系见(6.2.1)式。对消去和回代公式中相应元素行列码的转换见图 6.5(b)和(c)。

按上述原则改写后的消去公式是

$$
\left.\begin{aligned}
K_{m+L,J}^{(m)} &= K_{m+L,J}^{(m-1)} - \frac{K_{m,L+1}^{(m-1)} \cdot K_{m,J+L}^{(m-1)}}{K_{m1}^{(m-1)}} \\
P_{m+L}^{(m)} &= P_{m+L}^{(m-1)} - \frac{K_{m,L+1}^{(m-1)}}{K_{m1}^{(m-1)}} P_{m}^{(m-1)}
\end{aligned}\right\} \tag{6.3.20}
$$

$(m = 1,2,\cdots,n-1)$

$(L = 1,2,\cdots,n-m$，且 $L \leqslant D-1)$

$(J = 1,2,\cdots,D-L)$

其中 n 是方程阶数；D 是半带宽；m 是消元次数；L 是主元行第 m 行以下被消行的行数；J 是每行中应修正的元素序号。

回代公式是

$$
P_n = \frac{P_n}{K_{n1}} \tag{6.3.21}
$$

$$
P_m = \frac{P_m - \sum_{J=2}^{D_0} K_{mJ} P_{m+J-1}}{K_{m1}} \tag{6.3.22}
$$

$$
(m = n-1, n-2, \cdots, 2, 1)
$$

$$
\left\{ J = \begin{cases} 2,3,\cdots,D & \text{当 } n-m+1 > D, \quad D_0 = D \\ 2,3,\cdots,n-m+1 & \text{当 } n-m+1 \leqslant D, \quad D_0 = n-m+1 \end{cases} \right\}
$$

其中 m 是回代次数；J 是求第 m 个未知量 P_m 所需用到的已求得解的顺序个数。

6.4 三角分解法

6.4.1 三角分解定理

三角分解定理　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有的主子式

$$
a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

均不为零，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必然可以分解为下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 和上三角阵 $\boldsymbol{S}$ 的乘积，即有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LS}$。当 $\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{S}$ 为单位三角阵时，这种分解是唯一的，称为 Crout 分解。

此定理可由数学归纳法证明。

在有限元法中，代数方程组的系数矩阵是结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$，它是对称正定矩阵，主子式恒大于零，符合三角分解定理的条件，因此系数矩阵必定可以进行三角分解。由 6.3.1 节高斯消去法也得到同样的结论。

如(6.3.11)式所表明系数矩阵已分解为

$$
\boldsymbol{K} = \boldsymbol{LS} \tag{6.4.1}
$$

原代数方程组 $\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$ 可写作

$$
\boldsymbol{LSa} = \boldsymbol{P} \tag{6.4.2}
$$

高斯消去过程相当于在上述方程两端各乘以矩阵 L^{-1}

$$L^{-1}LSa = L^{-1}P \tag{6.4.3}$$

令

$$L^{-1}P = V \tag{6.4.4}$$

则有

$$Sa = V \tag{6.4.5}$$

式中 S 是 K 经消元后得到的上三角矩阵;V 是自由项列阵 P 的消元结果。

将系数矩阵 K 按(6.4.1)式进行三角分解后,方程的求解可以分成两步

1. 求 V

由(6.4.4)式可得

$$LV = P \tag{6.4.6}$$

由于 L 是下三角阵,求 V 只需向前回代。

2. 求基本未知量的解 a

利用(6.4.5)式求解。由于 S 是上三角矩阵,求 a 只需向后回代。

向前回代求 V 及向后回代求 a 的过程示意见图 6.6。在求 V 及 a 的过程中没有消元过程。

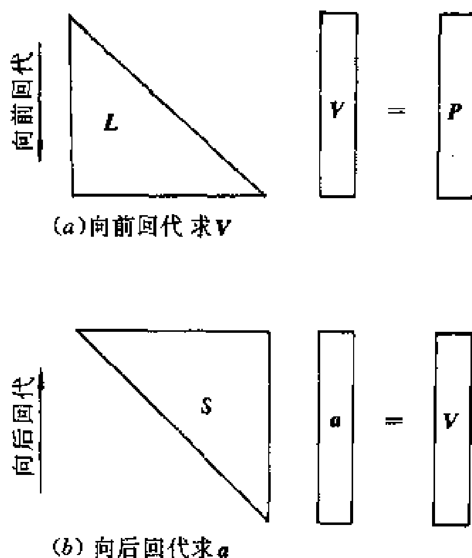


图 6.6 求解 V,a 示意图

由上述过程可见,三角分解法求解线性代数方程组的关键是对系数矩阵进行三角分解。由于 K 是对称矩阵,分解可以得到(6.3.15)式

$$K = LDL^{\mathrm{T}} \tag{6.3.15}$$

其中 D 是对角阵,$DL^{\mathrm{T}} = S$。因此三角分解主要是如何得到 D 矩阵及 L^{T} 矩阵。

6.4.2 三角分解的递推公式

由于 $K = LDL^{\mathrm{T}}$,根据矩阵乘法规则

$$K_{ij} = \sum_{r=1}^{n} l_{ir} d_{rr} l_{rj}^{\mathrm{T}} = \sum_{r=1}^{n} l_{ri}^{\mathrm{T}} d_{rr} l_{rj}^{\mathrm{T}} \tag{6.4.7}$$

其中 $K_{ij}, l_{ir}, d_{rr}, l_{rj}^{T}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{L}^{T}$ 中的元素。由于 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}^{T}$ 互为转置，因此有 $l_{ir}=l_{ri}^{T}$。考虑到 $\boldsymbol{L}^{T}$ 是上三角阵，因此有

$$\begin{aligned} &\text{当 } r > i \text{ 时} \qquad l_{ri}^{T} = 0 \\ &\text{当 } r > j \text{ 时} \qquad l_{rj}^{T} = 0 \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

当 K_{ij} 为 $\boldsymbol{K}$ 中上三角矩阵中的元素时，则 $j \geqslant i$，因此上式中求和 $r=1 \sim n$ 可改为 $r=1 \sim i$。这样，(6.4.7)式可写为

$$K_{ij} = \sum_{r=1}^{i} l_{ri}^{T} d_{rr} l_{rj}^{T} = \sum_{r=1}^{i-1} l_{ri}^{T} d_{rr} l_{rj}^{T} + l_{ii}^{T} d_{ii} l_{ij}^{T} \tag{6.4.9}$$

$\boldsymbol{L}^{T}$ 是单位上三角阵，因此对角元素 $l_{ii}^{T}=1$。由上式可得递推公式

$$\begin{aligned} d_{ii} l_{ij}^{T} &= S_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ri}^{T} d_{rr} l_{rj}^{T} \\ l_{ij}^{T} &= S_{ij}/d_{ii} \end{aligned} \tag{6.4.10}$$

应注意到

$$d_{ii} = S_{ii} \tag{6.4.11}$$

进行三角分解时，可以对原系数矩阵按行或按列进行分解。由于系数矩阵的对称性，只需分解系数矩阵的上三角部分。

1. 按行分解

具体分解过程如下

第 1 行　　$i=1$

$S_{1j}=K_{1j} \; (j \geqslant 1)$

$d_{11}=S_{11}=K_{11}$

$l_{1j}^{T}=S_{1j}/d_{11} \quad (j>1)$

第 2 行　　$i=2$

$S_{2j}=K_{2j}-l_{12}^{T}d_{11}l_{1j}^{T} \quad (j \geqslant 2)$

$d_{22}=S_{22}$

$l_{2j}^{T}=S_{2j}/d_{22} \quad (j>2)$

第 3 行　　$i=3$

$S_{3j}=K_{3j}-l_{13}^{T}d_{11}l_{1j}^{T}-l_{23}^{T}d_{22}l_{2j}^{T} \quad (j \geqslant 3)$

$d_{33}=S_{33}$

$l_{3j}^{T}=S_{3j}/d_{33} \quad (j>3)$

……………………………………

第 i 行

$$S_{ij} = K_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ri}^{T} d_{rr} l_{rj}^{T} \quad (j \geqslant i)$$

$d_{ii}=S_{ii}$

$l_{ij}^{T}=S_{ij}/d_{ii} \quad (j>i)$

在三角分解的计算中，系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 只需存储上三角部分。分解的结果 $\boldsymbol{L}^{T}$ 仍可存放在

$\boldsymbol{K}$ 中。逐行分解，依次元素一个个地分解，替换原来的元素。由于 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 是单位上三角阵，对角元素为 1，可不存储对角元素，因此对角阵 $\boldsymbol{D}$ 的存储可占用对角元素的位置。按行分解的示意图见图 6.7。

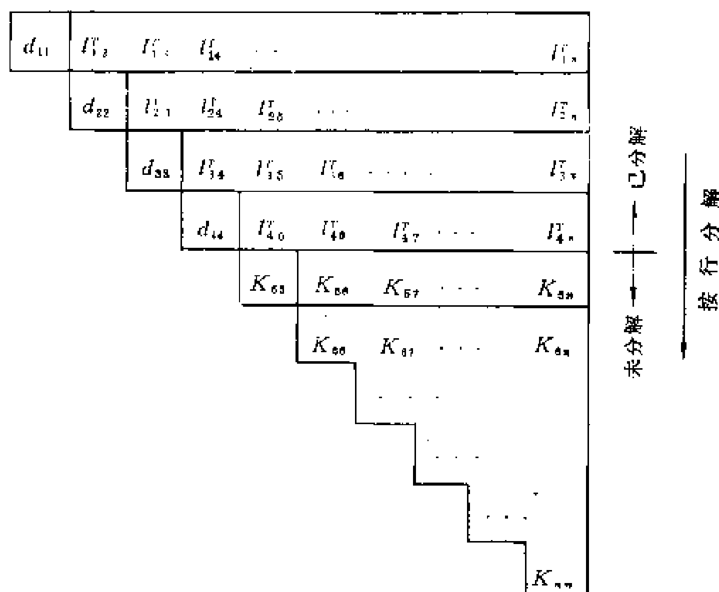


图 6.7　按行分解示意图

2. 按列分解

具体过程如下

第 1 列　　$j=1$

$i=1\quad d_{11}=S_{11}=K_{11}$

第 2 列　　$j=2$

$i=1\quad S_{12}=K_{12}\quad l_{12}^{\mathrm{T}}=S_{12}/d_{11}$

$i=2\quad d_{22}=S_{22}=K_{22}-l_{12}^{\mathrm{T}}d_{11}l_{12}^{\mathrm{T}}$

第 3 列　　$j=3$

$i=1\quad S_{13}=K_{13}\quad l_{13}^{\mathrm{T}}=S_{13}/d_{11}$

$i=2\quad S_{23}=K_{23}-l_{12}^{\mathrm{T}}d_{11}l_{13}^{\mathrm{T}}\quad l_{23}^{\mathrm{T}}=S_{23}/d_{22}$

$i=3\quad d_{33}=S_{33}=K_{33}-l_{13}^{\mathrm{T}}d_{11}l_{13}^{\mathrm{T}}-l_{23}^{\mathrm{T}}d_{22}l_{23}^{\mathrm{T}}$

………………………………

第 j 列

$$i<j\quad S_{ij}=K_{ij}-\sum_{r=1}^{i-1}l_{ri}^{\mathrm{T}}d_{rr}l_{rj}^{\mathrm{T}}\quad l_{rj}^{\mathrm{T}}=S_{ij}/d_{ii}$$

$$i=j\quad d_{ii}=S_{ii}=K_{ii}-\sum_{r=1}^{i-1}l_{ri}^{\mathrm{T}}d_{rr}l_{ri}^{\mathrm{T}}$$

存储形式与按行分解相同，亦可利用原系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的存储区按列进行逐个分解置换。分解示意图见图 6.8。

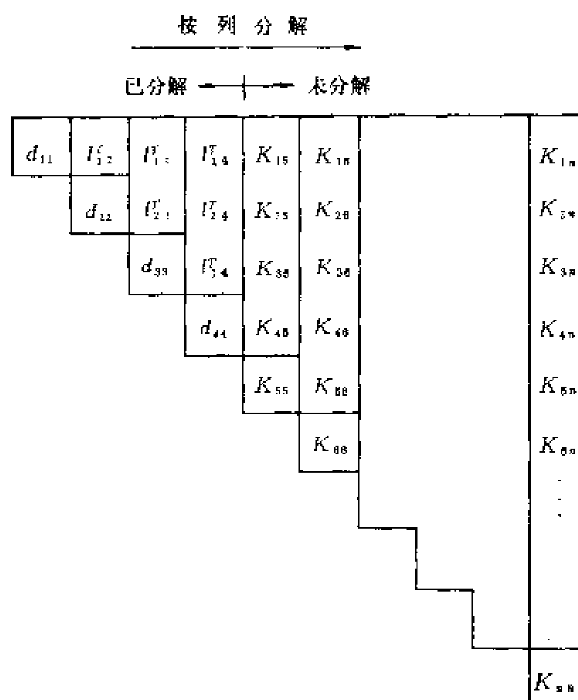


图 6.8　按列分解示意图

6.4.3　当矩阵元素具有带状分布特点时的三角分解递推公式

在有限单元法中采用三角分解法时仍需考虑系数矩阵带状分布的特点。现以按列三角分解法为例说明它的修改。

1. 系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 采用二维等带宽存储

二维等带宽存储与原系数矩阵行列码间的关系已在 6.2.1 节中得到

$$i^* = i,\quad j^* = j - i + 1 \tag{6.2.1}$$

其中 i^*，j^* 为二维存储中系数矩阵的新行、列码；i，j 为原系数矩阵的行列码。

二维存储的带宽为 D，并令 $J=j^*=j-i+1$，递推公式(6.4.10)可改写为

$$S_{iJ} = \begin{cases} K_{iJ} - \sum\limits_{r=J+i-D}^{i-1} l^{\mathrm{T}}_{r,i-r+1} d_{r1} l^{\mathrm{T}}_{r,J+i-r} & (\text{当}\quad J < D) \\ K_{iJ} & (\text{当}\quad J = D) \end{cases} \tag{6.4.12}$$

$$l^{\mathrm{T}}_{iJ} = S_{iJ}/d_{i1}$$

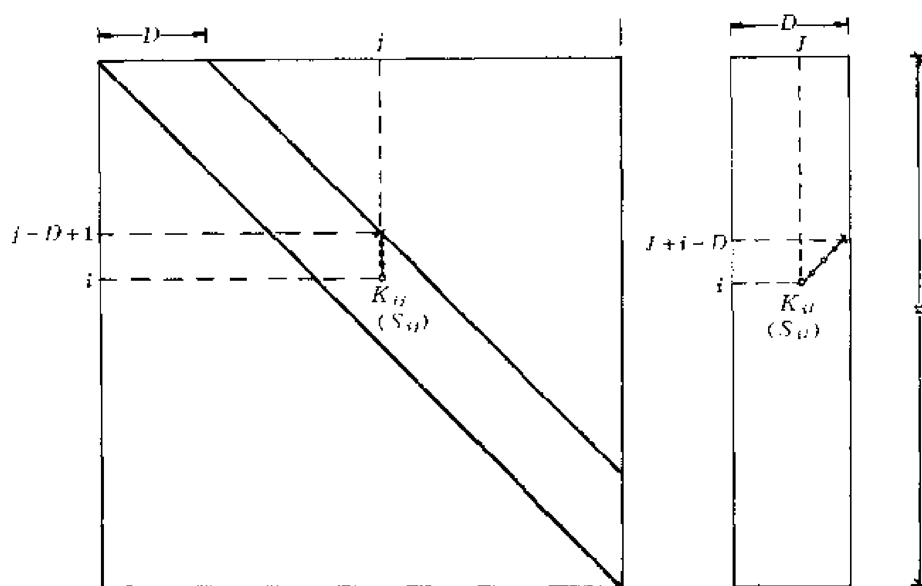
行、列的循环周界亦按等带宽存储进行修正

$$\begin{aligned} i &= 2,3,\cdots,n \\ J &= 1,2,\cdots,D \\ r &= J+i-D,\cdots,i-1 \end{aligned} \tag{6.4.13}$$

等带宽存储按列三角分解见图 6.9。

2. 系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 采用一维变带宽存储

设 m_j 为 j 列第一个元素所在的行号，见图 6.10。对于 j 列的第一个元素



$i=2,3,\cdots,n$　　　　　　　　　　　　$i=2,3,\cdots,n$

$j=i+1,i+2,\cdots,i+D-1$ 且 $j\leqslant n$　　　　$J=1,2,\cdots,D$

$r=j-D+1,\cdots,i-1$　　　　　　　　　　$r=J+i+D,\cdots,i-1$

图 6.9　等带宽存储三角分解示意

$$S_{m_j,j}=K_{m_j,j} \tag{6.4.14}$$

j 列其他元素

$$S_{ij}=K_{ij}-\sum_{r=m_n}^{i-1}l_{ri}^{\mathrm{T}}d_{rr}l_{rj}^{\mathrm{T}},\quad m_n=\max(m_j,m_i) \tag{6.4.15}$$

由(6.4.14)及(6.4.15)式可求得 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{D}$ 中的各元素：

$$l_{ij}^{\mathrm{T}}=S_{ij}/d_{ii},\quad d_{ii}=K_{ii}-\sum_{r=m_i}^{i-1}l_{ri}^{\mathrm{T}}d_{rr}l_{ri}^{\mathrm{T}} \tag{6.4.16}$$

原系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中的元素 K_{ij}在一维变带宽存储 $\boldsymbol{A}$ 中的对应位置为 $A(N)$。

$$N=M(j)+j-i \tag{6.4.17}$$

同样可以利用一维存储 $\boldsymbol{A}$ 的位置存放分解后的 $\boldsymbol{L}^T$ 和 $\boldsymbol{D}$。行列间的对应关系与 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的对应关系相同。

在求得三角分解后的矩阵 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 后，就可以用简单的向前向后回代求解基本未知量 $\boldsymbol{a}$。由于分解后只存储 $\boldsymbol{L}^T$ 和 $\boldsymbol{D}$ 矩阵而不贮存 $\boldsymbol{S}$ 矩阵，因此式(6.4.5)可以改写为

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{V} \tag{6.4.18}$$

令 $\widetilde{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{V}$ 为修正的分解后载荷阵，则(6.4.18)式即为

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\widetilde{\boldsymbol{V}} \tag{6.4.19}$$

可直接向后回代求解 $\boldsymbol{a}$。

三角分解后的求解步骤是

(1) 由 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{P}$ 向前回代求解 $\boldsymbol{V}$。

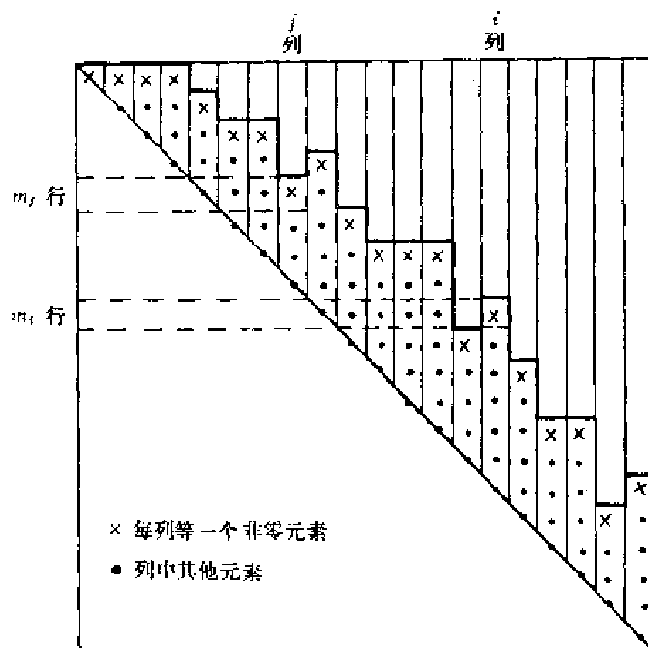


图 6.10 一维变带宽存储列高示意
(轮廓线以内元素按列顺序作一维存储)

(2) 求对角阵 $\boldsymbol{D}$ 的逆阵 $\boldsymbol{D}^{-1}$。$\boldsymbol{D}^{-1}$也是对角阵,它的对角元素 $d_{ii}^{\prime}=1/d_{ii}$。

(3) 由 $\widetilde{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{V}$ 求修正的分解后载荷阵 $\widetilde{\boldsymbol{V}}$。

(4) 由 $\boldsymbol{L}^{T}\boldsymbol{a}=\widetilde{\boldsymbol{V}}$ 向后回代求解基本未知量 $\boldsymbol{a}$。

按列和按行的三角分解法计算量大致相当。按列的三角分解法在一维变带宽存储中较按行的三角分解法少运算一些零元素。如图 6.11 中所示,虚线轮廓中的元素为按行分解时需计算的元素,实线轮廓中的元素为按列分解时所需计算的元素,后者较前者可多排除一些在每列第一个非零元素前的零元素(图中用 x 表示),因此实际运行中采取按列分解较好。

6.4.4 高斯消去法与三角分解法的比较

高斯消去法分为消去过程和回代求解过程两部分。三角分解法由形式上看似乎没有消去过程,只有回代求解过程。但三角分解法在回代求解前必须有系数矩阵进行三角分解的过程,其实质就是高斯消去法中的消去过程。由于这两种解法都是用的高斯消去原理,因此它们的运算量基本相同。但在计算机上执行时,对相同的系数矩阵三角分解消耗的机时却比高斯消去法要少。这是由于系数矩阵都以一维或二维数组的形式贮存在计算机的内存中,对一个元素进行运算时,需经过由数组中取出该元素,以及运算后将该元素再送回数组中去的取数和送数过程,需要消耗一定的机时。三角分解法运算过程中取送数的次数少,每个元素的分解都是一次完成。而采用高斯消去法时,一个元素的消元要取送 1~$D-1$次。因此采用三角分解法较高斯消去法能节省计算时间。

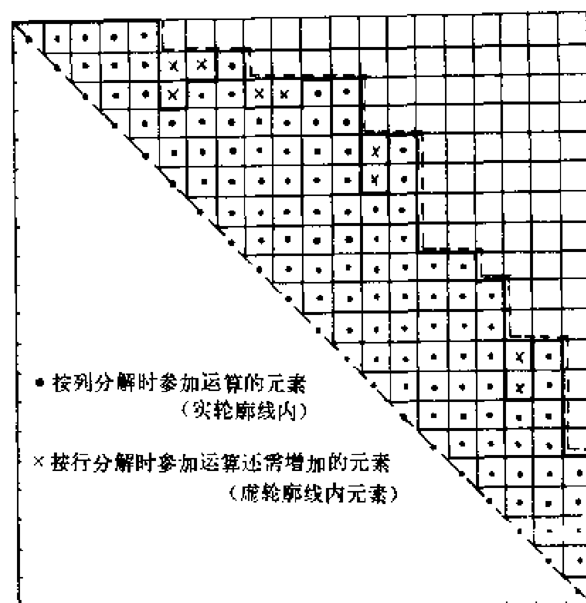


图 6.11　一维存储三角分解参加运算元素图
（实轮廓线以外为零元素）

6.5 追　赶　法

在一维问题中，若每个结点只有 1 个自由度且无分叉情况，则结构刚度矩阵将是一个三对角阵，即非零元素只存在于主对角线及其两侧的二条对角线上，求解方程有如下形式

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ d_1 & b_2 & c_2 & & \\ & d_2 & b_3 & c_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & d_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & d_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{Bmatrix} \tag{6.5.1}$$

每个结点只有一个转角自由度的连续梁就是这种情况。由于这类方程系数分布的特点，可用十分简单的“追赶法”求解。

追赶法原理如下：如线性代数方程组 $\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$ 为三对角方程组，首先将系数矩阵进行分解

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{LS}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的形式如下

$$
\left.
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \begin{bmatrix}
l_1 & & 0 & & & \\
d_1 & l_2 & & & & \\
 & d_2 & l_3 & & & \\
 & & d_3 & l_4 & & \\
 & 0 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & d_{n-1} & l_n
\end{bmatrix} \\
\boldsymbol{S} &= \begin{bmatrix}
1 & S_1 & & 0 & & \\
 & 1 & S_2 & & & \\
 & & 1 & S_3 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & & & 1 & S_{n-1} \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\} \tag{6.5.2}
$$

可以看到 $\boldsymbol{L}$ 是一个下三角矩阵，它只在二条对角线上有非零元素。副对角线上的元素就是原系数矩阵相应副对角线上的元素。$\boldsymbol{S}$ 是单位上三角阵，也只在二条对角线上分布有非零元素。矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 中的元素由下列关系式确定：

$$
\left.
\begin{aligned}
& l_1 = b_1 \\
& S_i = c_i / l_i \quad (i = 1,2,\cdots,n-1) \\
& l_{i+1} = b_{i+1} - d_i S_i
\end{aligned}
\right\} \tag{6.5.3}
$$

这种矩阵分解就是一种特定的三角分解。

矩阵分解后，与三角分解法相同，由(6.4.6)式 $\boldsymbol{LV}=\boldsymbol{P}$ 求解 $\boldsymbol{V}$；由(6.5.5)式 $\boldsymbol{Sa}=\boldsymbol{V}$ 求解 $\boldsymbol{a}$。具体计算公式是

$$
\left.
\begin{aligned}
& V_1 = P_1 / l_1 \\
& V_i = (P_i - d_{i-1} V_{i-1}) / l_i \quad (i = 2,3,\cdots,n)
\end{aligned}
\right\} \tag{6.5.4}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& a_n = V_n \\
& a_i = V_i - S_i a_{i+1} \qquad (i = n-1, n-2, \cdots 2, 1)
\end{aligned}
\right\} \tag{6.5.5}
$$

用(6.5.4)式解 $\boldsymbol{V}$ 是向前回代，称为“追”的过程；用(6.5.5)式解 $\boldsymbol{a}$ 是向后回代，称为“赶”的过程，因此此法称为追赶法。

在有限元法中系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵，因此 $d_i=c_i$，(6.5.3)式中的 c_i 可以改为 d_i。这种追赶法，分解的矩阵可占用原系数矩阵的位置；求出的 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 可利用原方程自由项 $\boldsymbol{P}$ 的位置。

以上是每结点一个自由度的情况。对于每结点多个自由度的梁元以及旋转对称壳，则求解方程(6.5.1)式中的，b_i,c_i,d_i,a_i 及 P_i 是一些子矩阵。例如旋转对称壳，每个结点有3个自由度，则 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{P}_i$ 是(1×3)的向量，而 $\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{c}_i,\boldsymbol{d}_i$ 是(3×3)的子矩阵。由于系数矩阵的对称性，$\boldsymbol{d}_i=\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}$。在此情况下求解公式如下：

由(6.5.1)中第一式可得

$$
\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1^{-1}(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{a}_2)
$$

代入第二式得到

$$\boldsymbol{a}_2 = \tilde{\boldsymbol{b}}_2^{-1}(\tilde{\boldsymbol{P}}_2 - \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{a}_3)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1^{-1}\boldsymbol{c}_1$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_2 = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1^{-1}\boldsymbol{P}_1$$

一般公式为

$$\boldsymbol{a}_i = \tilde{\boldsymbol{b}}_i^{-1}(\tilde{\boldsymbol{P}}_i - \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{a}_{i+1}) \qquad (i = 1,2,\cdots,n-1) \tag{6.5.6}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_i = \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{c}_{i-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}_{i-1}^{-1}\boldsymbol{c}_{i-1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_i = \boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{c}_{i-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{b}}_{i-1}^{-1}\boldsymbol{P}_{i-1} \tag{6.5.7}$$

并且有

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_1 = \boldsymbol{b}_1,\ \tilde{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1$$

最后得到

$$\boldsymbol{a}_n = \tilde{\boldsymbol{b}}_n^{-1}\tilde{\boldsymbol{P}}_n \tag{6.5.8}$$

求得 $\boldsymbol{a}_n$ 后，可由(6.5.6)式回代求得 $\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_{n-2},\cdots,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1$。

6.6 分块解法

采用有限元法求解时，为了达到一定精度要求，往往离散模型划分的单元较多，结点和结点自由度相应很多，得到的求解方程阶数一般都很高，系数矩阵往往不能全部进入计算机内存。这一节要讨论的分块解法和下一节的波前法是解决计算机内存容量不够时的两种较好解法。

6.6.1 对高斯消去法进行再分析

线性代数方程组 $\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$ 经过 $n-1$ 次消元后得到 $\boldsymbol{Sa}=\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{S}$ 为上三角矩阵。矩阵方程中第 i 行元素(即第 i 个方程)只经过它以上的 $i-1$ 行元素作为主元行时的修正，因此第 i 行元素是 $i-1$ 次消元后的结果，即

$$\begin{aligned} S_{ij} &= K_{ij}^{(n-1)} = K_{ij}^{(i-1)} \\ V_i &= P_i^{(n-1)} = P_i^{(i-1)} \end{aligned} \tag{6.6.1}$$

由于系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵，消元公式(6.3.1)式可写为

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(m)} &= K_{ij}^{(m-1)} - \frac{K_{mi}^{(m-1)}}{K_{mm}^{(m-1)}} = K_{mj}^{(m-1)} = K_{ij}^{(m-1)} - \frac{S_{mi}}{S_{mm}}S_{mj} \\ P_i^{(m)} &= P_i^{(m-1)} - \frac{K_{mi}^{(m-1)}}{K_{mm}^{(m-1)}}P_m^{(m-1)} = P_i^{(m-1)} - \frac{S_{mi}}{S_{mm}}V_m \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

由上式可以注意到第 m 次消元对元素 $K_{ij}^{(m-1)}$ 及 $P_i^{(m-1)}$ 的修正都是利用了 m 行元素，而第 m 行元素经过 $m-1$ 次消元已达到了消元的最终结果。在上式中我们将已达到消元最终结果的元素表达为 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 矩阵中的元素。

由于系数矩阵带状分布的特点，对 K_{ij}的有效消元次数是以 $j-D+1$ 行作为主元行开始至 $i-1$ 行作为主元行为止，因此系数矩阵中一个元素的全部消元过程可表示为

$$S_{ij} = K_{ij} - \sum_{m=j-D+1}^{i-1} \frac{S_{mi}S_{mj}}{S_{mm}} \quad (m \geqslant 1) \tag{6.6.3}$$

其中 K_{ij}是原系数矩阵中的元素。考虑到系数矩阵是由单元刚度矩阵集合而成，因此元素

K_{ij}可以表示为 $\sum_e K_{ij}$，这样(6.6.3)式可以进一步表达为：

$$S_{ij}=\sum_e K_{ij}-\sum_{m=j-D+1}^{i-1}\frac{S_{mi}S_{mj}}{S_{mm}}\quad (m\geqslant 1)\tag{6.6.4}$$

(6.6.4)式表示了元素 K_{ij}全部的集成和消元最后演变为 S_{ij}的过程。公式右端第一个和式表示了 K_{ij}元素的集成过程，第二个和式表示 K_{ij}逐次消元的过程。同理可以写出自由项列阵的集成和消元过程，自由项列阵在有限单元法中就是等效结点载荷列阵

$$V_i=P_i^{(i-1)}=\sum_e P_i^e-\sum_{m=j-D+1}^{i-1}\frac{S_{mi}}{S_{mm}}V_m\quad (m\geqslant 1)\tag{6.6.5}$$

(6.6.5)式中第一个和式代表结构等效结点载荷阵由单元等效结点载荷集成的过程，第二个和式是逐次消元的修正。

在有限单元法中，一般解题过程是先集成后消元，即先进行第一个和式，将结构刚度矩阵和等效结点载荷列阵全部集成完毕，然后进行消元，即执行第二个和式。由于连续体离散时分的单元很多，刚度矩阵在计算中将占有相当大的内存。往往由于中小型计算机内存不足而使有些问题不能求解。采用分块解法可以解决计算机内存不足的矛盾。

分析公式(6.6.4)和(6.6.5)可以得到以下结论：

(1) 结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中的元素 K_{ij}的集成和消元可以交替进行。未集成完毕甚至尚未集成的元素也可以先进行消元，然后继续集成，不必要在全部元素集成完毕后再消元。

(2) 矩阵方程中的某行元素如第 m 行，只要本身的集成和消元都已完毕，就可以作为主元行对它以下的 $D-1$ 行完成消元作用(见图 6.5)。对于被消元行(第 $m+1$ 行到 $m+D-1$ 行)则不一定要求元素集成完毕。也就是说，不论被消元行的元素集成(公式(6.6.4)及(6.6.5)中的第一个和式)与否，消去过程(公式(6.6.4)及(6.6.5)中的第二个和式)都可以进行。

(3) 第 m 次消元只涉及包括第 m 行元素在内的一个有效消元区共 D 个方程。对于 m 行以前的元素(已消元完毕)和 $m+D-1$ 行以后的元素(消元有效区以外的元素)是否保留在计算机内存中，对第 m 次消元没有影响。

(4) 不论是对系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 还是对自由项列阵 $\boldsymbol{P}$，每个元素在消元过程中逐次修正用到的元素都是集成和消元已全部完成的元素，即消元的最终结果，因此与消元过程中的中间结果无关。

在这些结论的基础上，我们建立分块求解的基本思想。

6.6.2 分块解法

对高斯消去法的再分析可知结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 不必全部进入内存，可按计算机允许的内存将结构刚度矩阵分成若干块，逐次进入内存。在每块中刚度矩阵的元素先集成后消元。

以二维等带宽存储为例，只要网格的结点编号、单元扫描合理，很容易做到进入内存的系数矩阵只有最后的 D 行元素集成尚未完毕。若内存允许存储 NQ 行元素(占内存 $NQ\times D$)，则前 $NQ-D$ 行都已集成完毕，可以作为主元行进行循序消元，消元波及 $NQ-1$ 行。然后将内存中已完成集成和消元的元素(前 $NQ-D$ 行)移出内存。最后的 D 行元素

是未完成集成和消元的，称为公共区。公共区和下一块系数矩阵一起在内存中继续集成和消元，如此进行直至全部系数矩阵集成和消元完毕。

回代求解可逐块自下而上地进行。

系数矩阵在内存中的分块示意见图 6.12。

分块解法的特点：

(1) 在每一分块中，系数矩阵的元素先集成后消元。

(2) 从求解的全过程上看，系数矩阵的集成和消元交替进行。

当计算机有外存可用时，移出的系数矩阵可按块存入外存，求解时再由后向前逐块调入内存。这样分块解法较一次集成和消元只多消耗一些计算机内外存交换的时间，但却能达到求解大型问题的要求。

在理论上只要内存允许的 $NQ>D$，分块解法就可以进行。这种扩大解题的能力在理论上也是无限制的，因为分块的块数并无数量限制。实际上只有当允许内存 NQ 有一个相当数量时，求解的效率才能较高。否则内外存交换的时间将占较大的比重。

在计算机无外存可用的情况下，分块解法仍可进行。只是移出内存的系数矩阵无法保留，回代求解时需要再次形成。这样就以多耗机时为代价来扩大解题能力。

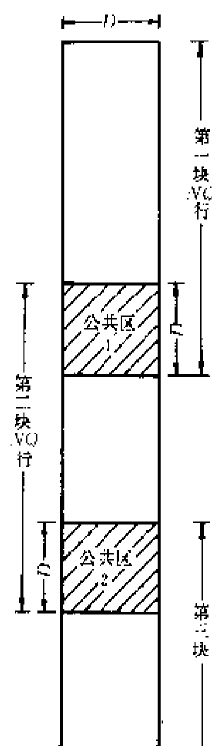


图 6.12 分块解法示意

自由项列阵由于占用内存不多，一般不必采用分块形式，但也可以与系数矩阵同步进行分块，做法是相同的。

三角分解亦可采用分块解法，它的基本思想和特点也完全如上所述。

6.6.3 程序框图

分块解法的程序实现十分简单。以二维等带宽存储的高斯消去法为例，只要加一些简单的控制语句就可实现分块求解。

程序的特点是：

(1) 只需给出系数矩阵的允许内存 A，分块可自动进行，不要事先人为地分块。当计算的问题较小时就是通常的一次集成和消元。当计算的问题较大时则自动进行分块。

(2) 分块是以用满允许内存 A 为原则，因此当 A 按计算机许可的最大内存给出时(指可供系数矩阵用的最大内存)，分块解法能充分利用计算机的内存自动分块。

(3) 在理论上，系数矩阵在计算机内的允许内存 A 只要大于 $D(D+1)$，分块解法就能实现。D 是求解问题中系数矩阵包括主元在内的半带宽。因此最小内存要求与带宽有关。结点自由度仍按结点编码顺序自然排列。

程序的简单框图见图 6.13。

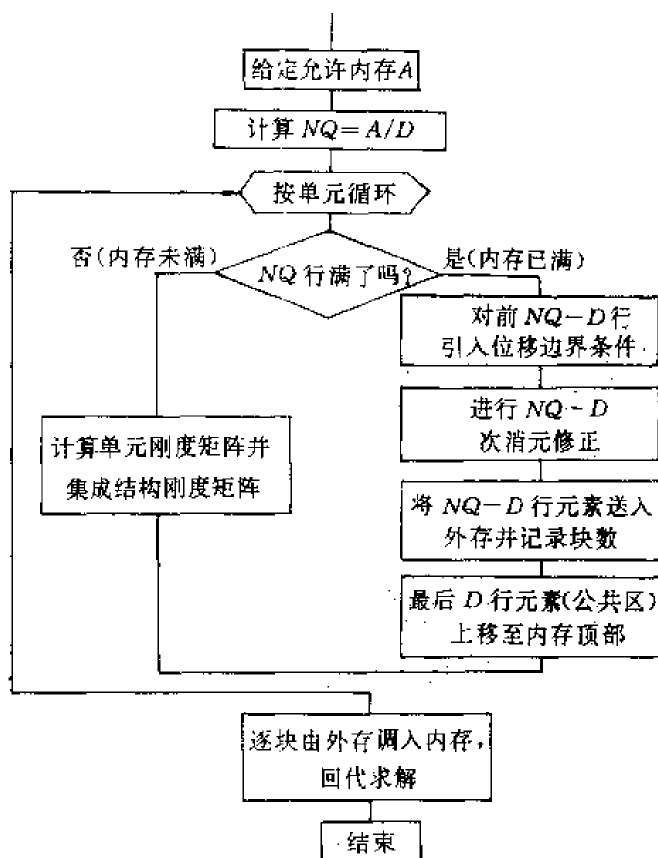


图 6.13　分块解法简单框图

6.7 波　前　法

6.7.1 波前法

采用高斯循序消去法和三角分解法时,方程一般都按结点自然编号顺序排列。在有些情况下按自然顺序的带宽 D 很大而中间夹有很多零元素,如复连通域的问题。造成工作三角形很大,这时可以采用波前法。

波前法解题的特点是:刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和载荷列阵 $\boldsymbol{P}$ 不按自然编号进入内存而按计算时参加运算的顺序排列;在内存中只保留尽可能少的一部分 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 中的元素。

下面我们将以图 6.14 中的简单例子说明波前法求解的原理和步骤。

例题　图 6.14 中连续体共划分 4 个单元,有 6 个结点。假定每个结点只有一个自由度(例如温度场的计算),因此自由度编码与结点编码相同。单元扫描次序按单元编码顺序进行。

计算过程如下:

1. 按单元顺序扫描计算单元刚度矩阵及等效结点载荷列阵并送入内存进行组装。如首先扫描单元①,进入内存的元素见图 6.15(a)。

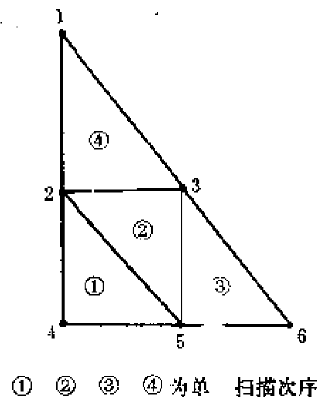
在 **K** 和 **P** 中集成尚未完毕的自由度称为活动变量；集成完毕的自由度称为不活动变量。不活动变量可以作为主元行对其它非主元行的元素进行消元。

内存中存储刚度矩阵 **K** 元素的三角形称为波前三角形。在波前三角形中活动变量和主元按一定顺序构成波前。波前中变量的个数叫作波前数，记为 W。

图 6.15(a)中，波前为 2,4,5，波前数 $W=3$。

2. 检查哪些自由度已集成完毕，以集成完毕的自由度 i 作为主元对其它行列的元素进行消元修正。

图 6.15(b)中，自由度 4 已集成完毕，是不活动变量，现在作为主元，用④表示。主元行元素⊗，不再变化，对其它行列元素进行消元修正。



① ② ③ ④为单元扫描次序

图 6.14 例题

3. 对其它行列元素进行消元修正后，主元已完成消元作用，将主元行有关元素 K_{ij}, P_i 送入外存，共有 $W+1$ 个数。此后的紧凑波前区，见图 6.15(c)。

送入外存的元素是代数方程组中一个方程的系数和自由项

$$K_{ia}a_a + K_{ib}a_b + \cdots + K_{ii}a_i + \cdots = P_i$$

方程由哪些自由度($a_a, a_b, \cdots, a_i, \cdots$)组成是由主元行ⓘ行未送出内存时的波前决定，因此在把主元行的元素送入外存前需记录有关信息：(1)主元号 A，(2)主元在波前中的位置 I，(3)波前数 W。以后需要用这组信息来恢复波前。

送出主元行④行前，这组信息为 $A=4$; $I=2$; $W=3$。

4. 重复步骤 1～3，将全部单元扫描完毕。全部扫描过程内存中的情况见图 6.15(a)～(e)。

在最后一个单元扫描完成后，内存中全部自由度都已集成完毕，如图 6.15(e)，此时可直接消元后回代求解，得到最后内存中几个未知量 a_i 的解。

在消元过程中得到一组 AIW 信息如下：

A	I	W	(送入外存元素)
4	2	3	(K_{4i}　$i=1\sim4$)
5	2	4	(K_{5i}　$i=1\sim5$)
6	3	3	(K_{6i}　$i=1\sim4$)

5. 回代求解

按消元的顺序，由后向前逐个恢复波前，调入送到外存的元素，依次回代求解。

恢复波前需利用 AIW 信息。在现有内存基础上根据 A、I 可将自由度 A 插在位置 I 上，然后根据 W 取出前 W 个自由度即为恢复的上一个波前。恢复一个波前就顺序由外存调入一组元素(后调出的元素先调入)，依次求出方程组的解。

本例中最后内存中的波前为 2,3,1，消元后解出未知量 a_1, a_3, a_2。利用最后一组 AIW 信息 6,3,3 恢复上一个波前：增加自由度 6 在第 3 的位置上，波前数为 3，即 2,3,1⇒2,3,6,1⇒2,3,6 调入 $K_{6i}(i=1\sim4)$，相当于得到方程

$$K_{61}a_2 + K_{62}a_3 + K_{63}a_6 = K_{64}$$

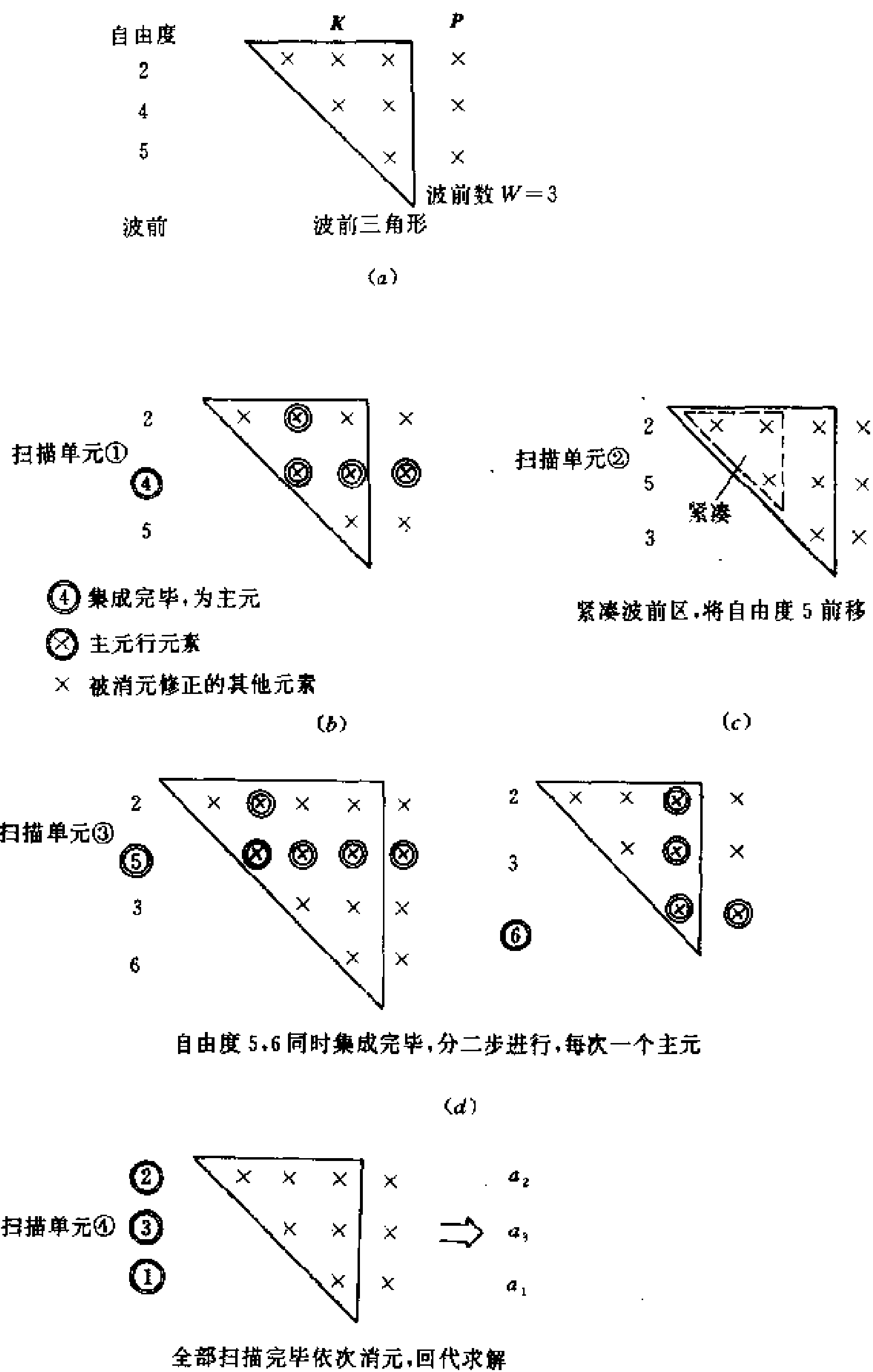


图 6.15 波前法解题示意图

a_2，a_3 已在上一个波前解得，由上列方程可解得 a_5。然后再推出前一个波前，用相同的方法求解一个新进入的自由度，由后向前直至全部求解完毕。过程如下所示

A I W	波前	调入	求解
(最后内存中)	2,3,1	/	a_1,a_3,a_2
6,3,3	2,3,6	K_{6i}(4 个)	a_6
5,2,4	2,5,3,6	K_{5i}(5 个)	a_5
4,2,3	2,4,5	K_{4i}(4 个)	a_4

由上述解题过程可见,保留在内存中的波前区,包括波前三角形与自由项列阵,它的大小与结点编码无关而与单元扫描的次序有关。为了确定不活动变量,需先记下每个结点的相关单元数,这只需事先把单元扫描一遍即可解决。一般波前法扫描可以有两种次序:

(1) 按单元编码顺序扫描。上述例题就是如此。

(2) 按自由度进入内存的顺序,保证先进入内存的自由度首先集成完毕作为主元退出波前。即按先进先出的次序进行扫描。

前者扫描方便;后者恢复波前较简单,波前区较小,但需多耗扫描时间。

6.7.2 波前法与分块解法的比较

分块解法和波前法都是解大型线性代数方程组时解决计算机内存不够时的方法。它们的简单比较如下:

分块解法	波前法
① 自由度集成完一批消去一批。	① 自由度集成完一个消去一个。
② 允许内存大于 $D(D+1)$即可求解。能充分利用内存。	② 内存大于最大波前区就可求解。内存要求比分块解法要小。
③ 内外存交换次数较少。	③ 内外存交换频繁。
④ 无外存时也能求解。	④ 无外存时不能求解。
⑤ 程序实现简单。	⑤ 程序编制较复杂。

波前法和分块解法的基本思想都是基于对高斯消去法的再分析上,由先集成后消元发展到集成和消元交替进行。基于这种分析,派生出的各种解法是不少的,不同的解法各有特点,但基本思路则相同,因此掌握了系数矩阵可以分块进入内存的特征,了解各种不同解法或作某些改进都是不困难的。

6.8 雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法

当线性方程组的阶次很高,用直接解法可能误差较大,或希望改进直接解法得到的解的精度时,可用迭代法。

下面用一个简单的例子说明迭代解法的基本思想。

例 1 用迭代法求解线性方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 + x_3 = 0.5 \\ -4x_1 + 12x_2 - 4x_3 + x_4 = 1.2 \\ x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 4x_4 = 1.3 \\ x_2 - 4x_3 + 10x_4 = 3 \end{cases} \qquad ①$$

上述线性方程组的矩阵表达式为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{②}$$

其中　未知向量

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 12 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

自由项列阵

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = [0.5 \quad 1.2 \quad 1.3 \quad 3]$$

此方程组的精确解

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = [0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4]$$

现用迭代法求此线性方程组:

改写①方程组,将第 $i(i=1\sim4)$个方程中的 x_i 用其它场变量表示

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{10}(0.5 - 4x_2 - x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{12}[1.2 + 4(x_1 + x_3) - x_4] \\ x_3 = \dfrac{1}{12}[1.3 + 4(x_2 + x_4) - x_1] \\ x_4 = \dfrac{1}{10}[3 - x_2 + 4x_3] \end{cases} \tag{③}$$

其矩阵表达式为

$$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \bar{\boldsymbol{b}} \tag{④}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{4}{10} & -\dfrac{1}{10} & 0 \\ \dfrac{4}{12} & 0 & \dfrac{4}{12} & -\dfrac{1}{12} \\ -\dfrac{1}{12} & \dfrac{4}{12} & 0 & \dfrac{4}{12} \\ 0 & -\dfrac{1}{10} & \dfrac{4}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{0.5}{10} & \dfrac{1.2}{12} & \dfrac{1.3}{12} & \dfrac{3}{10} \end{bmatrix}$$

若把 $\boldsymbol{D}$ 定义为②式中原系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角阵,即

$$D=\begin{bmatrix}10 & & & \\ & 12 & & \\ & & 12 & \\ & & & 10\end{bmatrix}$$

则很容易看出线性方程组改写前后，即②式与④式中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 以及自由项列阵 $\boldsymbol{b}$ 与 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 间存在如下关系：

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} \qquad ⑤$$
$$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

改写后的③式可用作迭代求解。任取一组初值 $\boldsymbol{x}^0$ 代入方程组右端，可得到一组新的解 $\boldsymbol{x}^1$，再将 $\boldsymbol{x}^1$ 代入方程右端，则又可得到第二组新的解 $\boldsymbol{x}^2$，…，迭代若干次后可得到方程组的解答。按迭代解法，方程组④可更明确地表达为

$$\boldsymbol{x}^{k+1}=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}^k+\bar{\boldsymbol{b}} \qquad ⑥$$
$$(k=0,1,2,\cdots)$$

每迭代一次就是由上一次的解答 $\boldsymbol{x}^k$，求得一个更新的解答 $\boldsymbol{x}^{k+1}$。按迭代法作出向量系列 $\boldsymbol{x}^k$ 希望逐步逼近方程组的真正解。

取初值 $\boldsymbol{x}^0=[0\ 0\ 0\ 0]^T$

迭代 15 次的各次解数值如下：

k	x_1	x_2	x_3	x_4	ERROR
1	0.0500000	0.1000000	0.1083333	0.3000000	0.3000E+00
2	0.0791667	0.1277778	0.2375000	0.3333333	0.1292E+00
3	0.0773611	0.1777778	0.2554398	0.3822222	0.5000E−01
4	0.0955671	0.1790818	0.2885532	0.3843982	0.3311E−01
5	0.0927774	0.1960070	0.2881961	0.3975131	0.1693E−01
6	0.0995832	0.1938651	0.2984419	0.3956777	0.1025E−01
7	0.0977018	0.1997019	0.2965490	0.3999903	0.5837E−02
8	0.1002259	0.1980844	0.3000889	0.3986494	0.3540E−02
9	0.0992249	0.2002175	0.2988925	0.4002271	0.2133E−02
10	0.1001977	0.1993535	0.3002128	0.3995352	0.1320E−02
11	0.0997201	0.2001756	0.2996131	0.4001497	0.8220E−03
12	0.1001089	0.1997653	0.3001317	0.3998277	0.5186E−03
13	0.0998929	0.2000946	0.2998552	0.4000762	0.3293E−03
14	0.1000523	0.1999097	0.3000658	0.3999326	0.2106E−03
15	0.0999573	0.2000450	0.2999431	0.4000354	0.1353E−03

表中 ERROR$=\max|x_i^k-x_i^{k-1}|\quad(i=1,2,3,4)$

由迭代 10 次的结果可见，迭代解 $\boldsymbol{x}^{10}$ 与精确解间的误差已在 0.5%以内。不同的初值也有类同的结果。

对于给定的方程组 $\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}+\bar{\boldsymbol{b}}$ 用式⑥逐步代入求近似解的方法称为迭代法。如 $\boldsymbol{x}^k$（当

$k \to \infty$)的极限存在，此极限即方程组的真正解，此迭代法收敛，否则称迭代法发散。

6.8.1 雅可比(Jacobi)迭代法

设有方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{6.8.1}$$

其展开形式为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{6.8.2}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵，且 $a_{ii} \neq 0 (i=1 \sim n)$. $\boldsymbol{A}$ 可分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{A}_0 \tag{6.8.3}$$

其中：

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{(为对角阵)}$$

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

改写线性方程组(6.8.2)式，将第 i 个方程($i=1 \sim n$)表示为 x_i 的表达式：

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j\right) \quad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{6.8.4}$$

改写后的(6.8.2)式的矩阵表达式为：

$$\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \bar{\boldsymbol{b}} \tag{6.8.5}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots\cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots\cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{33}} & -\dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots\cdots & -\dfrac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} & \dfrac{b_2}{a_{22}} & \dfrac{b_3}{a_{33}} & \cdots\cdots & \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

很容易看出(6.8.1)式和(6.8.5)式间系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 及自由项列阵 $\boldsymbol{b}$ 与 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 之间存在如下关系

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}_0 \\ \bar{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{6.8.6}$$

用迭代法解(6.8.5)式，其迭代公式为

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}^k + \bar{\boldsymbol{b}} \tag{6.8.7}$$

初始向量为 $\boldsymbol{x}^0$

此法称雅可比迭代法，$\bar{\boldsymbol{A}}$ 称为雅可比迭代法的迭代矩阵。k 为迭代次数。雅可比迭代法的分量形式为

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^k\Big) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6.8.8}$$

其中 $\boldsymbol{x}^k = [x_1^k \quad x_2^k \quad \cdots \quad x_n^k]^{\mathrm{T}} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$

雅可比迭代法分量形式(6.8.8)式也可改写为：

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k\Big) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6.8.9}$$

$$\boldsymbol{x}^k = [x_1^k \quad x_2^k \quad \cdots \quad x_n^k]^{\mathrm{T}} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

(6.8.9)式更方便于编程求解。

例 1 中方程组(a)的迭代求解就是雅可比迭代法。

雅可比迭代法公式简单，迭代思路明确。每迭代一次只需计算 n 个方程的向量乘法，程序编制时需设二个数组分别存放 $\boldsymbol{x}^k$ 及 $\boldsymbol{x}^{k+1}$ 便可实现此迭代求解。

6.8.2 高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法

由雅可比迭代法可知，在计算 $\boldsymbol{x}^{k+1}$ 的过程中，采用的都是上一迭代步的结果 $\boldsymbol{x}^k$。考察其计算过程，显然在计算新分量 x_i^{k+1} 时，已经计算得到了新的分量，$x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \cdots, x_{i-1}^{k+1}$。有理由认为新计算出来的分量可能比上次迭代得到的分量有所改善。希望充分利用新计算出来的分量以提高迭代解法的效率，这就是高斯-赛德尔迭代法(简称 G-S 迭代法)

对(6.8.8)式进行改变可以得到 G-S 迭代法的分量形式

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\Big)$$

$$(i = 1,2,3,\cdots,n) \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{6.8.10}$$

G-S 迭代法的分量形式亦可表示为

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^k\Big)$$

$$(i = 1,2,3,\cdots,n) \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{6.8.11}$$

(6.8.10)式也可写成矩阵形式。方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在(6.8.3)式基础上还可进一步分解，若将 $\boldsymbol{A}_0$ 继续分解为一个下三角阵 $\boldsymbol{A}_0^L$ 和一个上三角阵 $\boldsymbol{A}_0^U$，则系数矩阵的分解则可表达为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{A}_0^L + \boldsymbol{A}_0^U \tag{6.8.12}$$

其中：

$$A_0^L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & 0 & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0^U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.8.13)$$

(6.8.10)式可写成矩阵形式

$$Dx^{k+1} = b - A_0^L x^{k+1} - A_0^U x^k$$

按向量的迭代次数归并可得

$$(D + A_0^L)x^{k+1} = b - A_0^U x^k$$

若$(D+A_0^L)$的逆存在，则有

$$x^{k+1} = (D + A_0^L)^{-1}[b - A_0^U x^k]$$

高斯-赛德尔迭代的矩阵形式可表达为

$$x^{k+1} = E\,x^k + F \qquad (6.8.14)$$

其中：$E = -(D+A_0^L)^{-1}A_0^U x^k$（为 G-S 迭代法的迭代矩阵）

$F = (D+A_0^L)^{-1}b$

高斯-赛德尔迭代法每步迭代的计算量与雅可比迭代相当，但在计算机进行计算时，只需存放 x 一个数组。

例 2 对例 1 的线性方程组①，采用相同的初值，高斯-赛德尔迭代的结果如下：

k	x_1	x_2	x_3	x_4	ERROR
1	0.0500000	0.1166667	0.1430556	0.3455555	0.3456E+00
2	0.0823611	0.1463426	0.2654360	0.3915401	0.1224E+00
3	0.0819934	0.1831815	0.2930744	0.3989116	0.3684E−01
4	0.0939652	0.1957705	0.2987303	0.3999150	0.1259E−01
5	0.0984352	0.1990622	0.2997895	0.4000096	0.4470E−02
6	0.0996459	0.1998110	0.2999697	0.4000068	0.1211E−02
7	0.0999274	0.1999651	0.2999967	0.4000022	0.2815E−03
8	0.0999864	0.1999942	0.2999999	0.4000005	0.5896E−04
9	0.0999977	0.1999992	0.30000001	0.4000001	0.1129E−04
10	0.0999997	0.1999999	0.3000000	0.4000000	0.1967E−05
11	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.3055E−06
12	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.3725E−07
13	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.7451E−08
14	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.0000E+00
15	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.0000E+00

表中 $\mathrm{ERROR} = \max|x_i^k - x_i^{k-1}| \quad (i=1,2,3,4)$

与雅可比迭代的结果相比较可见高斯-赛德尔迭代具有较快的收敛速度。

用迭代法求解时要注意迭代法的收敛性[①]。无论是用雅可比迭代法或高斯-赛德尔迭代法都存在解的收敛问题，甚至有的线性方程组，用雅可比迭代法解是收敛的，而用高斯-赛德尔迭代法解却是发散的。反之亦然。

当线性方程组(6.8.1)中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$(n 阶矩阵)为严格对角优势矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其它元素之和：

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

则可证明上述二种迭代法收敛。

定理 如果线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角优势矩阵，则对求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法均收敛。

有限单元法的求解方程 $\boldsymbol{Ka}=\boldsymbol{P}$ 中，系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 具有主元占优的特点，但却不能保证是严格对角优势矩阵，因此采用雅可比迭代法时要注意解的收敛问题。高斯-赛德尔迭代法的收敛性要求在下一节超松弛迭代法时一并讨论。

6.9 超松弛迭代法

逐次超松弛迭代法(Successive Over Relaxation Merhod，简称 SOR 法)是高斯-赛德尔迭代法的一种加速收敛的方法。是大型稀疏矩阵线性方程组的有效解法之一。

首先用另一种变换形式讨论一下迭代过程。对于(6.8.1)式的线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

当系数矩阵主元 $a_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$ 时将式中系数矩阵分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}_0 \tag{6.9.1}$$

则可得到(6.8.1)式的等价方程组

$$\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{A}}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \tag{6.9.2}$$

它的迭代公式为

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \overline{\boldsymbol{A}}_0\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{b} \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{6.9.3}$$

当进行了 k 次迭代得到 $\boldsymbol{x}^k$ 后，$\boldsymbol{x}^k$ 一般地与真解 $\boldsymbol{x}$ 间仍存在差异。如何改进 $\boldsymbol{x}^k$ 得到下一次迭代的结果 $\boldsymbol{x}^{k+1}$，可以引入 $\boldsymbol{x}^k$ 的剩余向量 $\boldsymbol{r}^k$

$$\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}^k \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{6.9.4}$$

此时，迭代公式(6.9.3)可表示为

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{r}^k \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{6.9.5}$$

由此可见应用迭代法得到逐次改进的解 $\boldsymbol{x}^{k+1}$，实质上是用 k 次迭代后的剩余向量 $\boldsymbol{r}^k$ 来改进解的第 k 次近似 $\boldsymbol{x}^k$。因此可以引进一个加速迭代的模式来改进迭代法。令

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \omega\boldsymbol{r}^k \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{6.9.6}$$

其中 ω 称为松弛因子。

① 李庆扬等著. 数值分析. 华中工学院出版社，1982

式(6.9.6)是迭代公式(6.9.5)的一个改进,可以适当选择松弛因子 ω 加速迭代过程的收敛。

式(6.9.6)的分量形式为

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k\right) \tag{6.9.7}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n;\quad k = 0,1,2,\cdots)$$

若对上述改进的迭代公式,按高斯-赛德尔迭代法尽量利用最新迭代得到的分量的原

10	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.2980E−06
11	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.2980E−07
12	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07
13	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07
14	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07
15	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07
16	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07
17	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07
18	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07
19	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07
20	0.1000000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.1490E−07

表中 $\mathrm{ERROR}=\max|x_i^k-x_i^{k-1}|\quad(i=1,2,3,4)$

用超松弛迭代法求解时，应选择超松弛因子，适当的超松弛因子将会加快收敛速度。超松弛因子一般可取 1.2 左右。对例 3 我们用不同的超松弛子试算，控制 $\mathrm{ERROR}\leqslant 10^{-5}$，结果如下：

超松弛因子 ω	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
达到误差要求的迭代次数 k	10	8	10	12	15	18	25	34	51	109

对例 3，如控制 $\mathrm{ERROR}\leqslant 10^{-5}$，三种不同方法需要的迭代次数及误差如下

雅可比迭代	$k=22$	$\mathrm{ERROR}=0.6527\times10^{-5}$
高斯-赛德尔迭代	10	0.1967×10^{-5}
超松弛迭代($\omega=1.1$)	8	0.4739×10^{-5}

由此算例也可看出超松弛迭代法和高斯-赛德尔迭代要优于雅可比迭代。而由于选择了超松弛因子 ω，一般超松弛迭代效率要高于高斯-赛德尔迭代。超松弛因子无法事先确定最优值，可在迭代过程中根据收敛速度进行调整。

用超松弛迭代法求解思路明确，编程简单，存储迭代解 x^k 只需一个数组。但需注意超松弛因子的选择。

在用迭代法求解有限元方程时，仍需按系数矩阵(刚度矩阵)在计算机内的存储方式，与直接解法中的高斯消去法和三角分解法所讨论的相似，考虑系数矩阵特点，修改(6.9.10)式中元素的下标及迭代涉及的元素。如采用雅可比迭代或高斯-赛德尔迭代时，也应作此修正。读者可以进行修改并验证。

6.10 小　结

本章讨论了有限单元法中线性代数方程组的常用解法，包括直接解法和迭代解法。由于线性方程组是大型的甚至是巨型的，因此应当选择适当的解法以减少机时，降低计算费用。

当代计算机发展十分迅速，计算机性能不断提高，如字长位数增加，内存扩大，计算速度不断提高，因此直接解法还是首选的解法。当方程为巨型而求解精度由于直接解法的误差积累而不能满足要求时，可采用迭代解法。采用迭代解法时可取直接解法得到的解作为迭代解法的初值，以加速迭代的收敛速度。

现在计算机已发展到具有多个中央处理器(CPU)，为了充分利用计算机的性能，并行算法正在研究和兴起，现行有限单元法的算法将随着并行算法的进一步研究而发生变化，这将大大提高数值分析的速度和效率。

习　题

6.1　刚度矩阵采用二维等带宽存储，半带宽为 D，什么是工作三角形？以某行元素为主元行时为何只需对工作三角形中的元素进行修正？

6.2　当采用波前法求解时，给定位移边界条件应怎样引入？

6.3　试编二维等带宽存储按列三角分解的子程序。等带宽存储可任意选择上半带或下半带存储。

6.4　将超松弛迭代的分量形式(6.9.10)式改为二维等带宽存储的迭代公式并试编程序。

6.5　有方程组

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

其精确解为 $x^T = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$，试写出 SOR 方法的迭代公式

6.6　编程计算 6.5 题的线性方程组

(1) 用超松弛迭代，当前后二次解的误差绝对值 ERROR$\leqslant 10^{-5}$时，取 $\omega = 1.3$，迭代几次才能满足误差要求，列出各次迭代结果。

(2) 试确定超松弛因子 ω。

(3) 控制同样误差时用雅可比迭代需几次？列出各次迭代结果。

第7章　有限单元法程序的结构和特点——典型有限元程序介绍

7.1 引　　言

有限单元法的实现必须通过计算机。全部有限单元法的计算原理和数值方法集中反映在有限单元法的程序中，因此有限单元法的程序极为重要。它应具有分析准确可靠、计算效率高、使用方便、易于扩充和修改等特点。

有限单元法程序总体可分为三个组成部分：前处理部分；有限元分析本体程序；后处理部分。

有限元分析本体程序是有限元分析程序的核心，它根据离散模型的数据文件进行有限元分析。有限元分析的原理和采用的数值方法集中于此，因此它是有限元分析准确可靠的关键，选用计算方法的合理与否决定了有限元分析程序的计算效率和结果的精度及可靠性。

离散模型的数据文件主要应包括：离散模型的结点数及结点坐标；单元数及单元结点编码；载荷信息等。对于一个实际的工程问题离散模型的数据文件十分庞大，靠人工处理和生成一般是不可能的，除工作量大不能忍受外，还不可避免的出现数据错误，包括数据精度的不足。为了解决这一问题，有限元分析程序必须有前处理程序。前处理程序是根据使用者提供的对计算模型外形及网格要求的简单数据描述，自动或半自动地生成离散模型的数据文件，并要生成网格图供使用者检查和修改。这部分程序的功能很大程度上决定了程序使用的方便性。

同样，有限元分析程序的计算结果也是针对离散模型得到的。例如对静力平衡问题可以得到离散模型各结点的位移，各单元的应力等。输出的文本文件量很大，但却不易得到所分析对象的全貌，例如位移哪里最大，应力集中发生在什么部位以及变化趋势如何。因此一个使用方便的有限元分析程序不仅要有可供选择输出内容的文本文件，还需有结果的图形显示，如位移图、等应力线图或截面应力分布图等。这部分程序称后处理程序，与前处理程序相似对程序使用的方便性有举足轻重的作用。

有限元分析程序的三个组成部分对于一个较好的用于实际问题分析的有限元程序来说，前后处理的程序量常常超出有限元分析的本体程序。前后处理功能越强，程序的使用就越方便。有限元分析程序中前后处理程序一般可占全部程序条数的2/3～4/5。有的近期发展的通用程序更注重程序的“包装”和使用功能，有限元分析本体程序以外部分的比例更高。

下面以二维静力分析有限元分析程序为例，简单介绍程序各部分的组成、流程和主要编程技巧。

7.2 有限元分析本体程序

有限元分析本体程序的内容取决于采用有限单元法分析的问题类型，可以是静力学的或动力学的；可以是温度场或流场等其它场问题的；可以是稳态场问题或瞬态场问题的；也可以是线性的或非线性的等等。

以静力平衡问题为例，讨论有限元分析本体程序的组成和流程可以了解到一般有限元分析本体程序的结构特点，其中采用的编程技巧也具有普遍意义。

7.2.1 静力平衡问题本体程序主框图及主要编程技巧

静力平衡问题的有限元分析是依据离散模型的数据，形成有限元求解方程 $ka=P$ 的系数矩阵 K、等效结点载荷列阵 P，并解方程得到结点位移 a 为其主要分析过程，主框图如下：

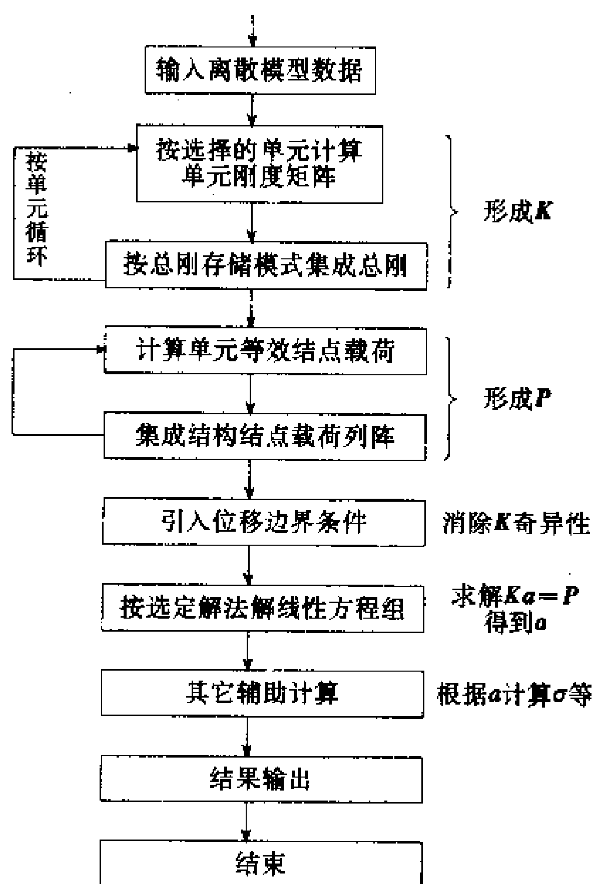


图 7.1 有限元分析的流程

主要编程技巧

1. 程序结构模块化

有限单元法中各部分计算可分解成若干模块，每个模块可由 1 个或多个子程序组成。子程序的功能应简单，便于调用或扩展。

主程序主要是按模块结构的顺序正确地组织和调用子程序。主程序应条理清晰，不应夹杂复杂的具体计算。

2. 动态数组技术

由于有限元离散模型的规模有很大的差别，每次分析时离散模型的结点数、单元数、作用载荷情况都不相同，因此结构刚度矩阵、载荷列阵等的规模可能差别很大。为了尽可能充分地利用计算机内存，许多数组都应定义为变界数组（界随具体分析对象而变化），并共用一个大型数组，这就是动态数组技术。具体要点如下：

(1) 主程序中按整型和实型定义二个一维大型数组，分别存放整型和实型的变界数组。数组的界应在可能情况下尽量大些，以充分利用计算机内存以扩大解题规模。

(2) 设计动态数组表：将变界数组按界可确定的顺序在一维数组中排列次序。

(3) 变界数组只能在子程序中使用，使用时应注意：

① 变界数组的界应在进入子程序前已确定。

② 变界数组名及其变界参数应出现在子程序的形式参数中。

③ 子程序中的变界数组可为 n 维数组。

(4) 动态数组覆盖技术

按程序设计要求动态数组可覆盖，包括全部覆盖（如连续计算多个离散模型时，计算下一个离散模型可重新开始定义变界数组）和部分覆盖（如计算多组载荷时覆盖与载荷有关部分的变界数组）。采用部分覆盖技术时，必须将要被覆盖的数组排列在一维数组的末尾，以免覆盖时由于界的变化而使其它数组的数据被占用而发生错误。

采用动态数组技术便于程序移机，只需改动主程序中一维数组的界便可扩大和缩小解题的规模，或将程序移植到不同内存容量的计算机上，十分方便。

下面我们以平面问题程序来具体说明程序的设计及编程技巧的实施。

7.2.2 平面问题 3 结点单元有限元分析程序

本程序是一个教学程序，单元为 3 结点单元，可用于计算平面应力和平面应变问题。程序除了具有连续运算多个结构、多组载荷的功能以及可以输出各种中间结果外，主程序中采用了各数组按照实际结构离散模型需要的容量，以动态数组（变界数组）的方式共同使用二个大型数组（一个实型，一个整型）。这种变界数组的使用可以更充分地利用计算机的内存。只要计算机内存许可，只需加大此二个公共块就可以计算大型课题，也有利于程序在不同机型上的移植。这种安排数组的技术是编制中大型程序必须采用的。

程序采用模块结构，流程清晰，各子程序功能明确。其中有的子程序如高斯消去法求解器、引入位移边界条件等，在有限元分析程序中都可通用。

程序的模块结构便于修改和扩充。读者在了解了主程序及各子程序功能后，可以很方便地将这个程序扩充为平面问题和轴对称问题的联合求解程序，也可以扩充相应的前处理程序（网格自动划分）及后处理程序（应力处理及图象显示等）。

现将主程序及主要子程序的说明、框图以及源程序分别列出。

I. 平面问题程序的使用说明和动态数组设计

(1) 平面问题程序的使用说明

输入数据格式说明。输入数据依次如下：

1. NG

   NG：结构的结点总数

2. NE,MC,NX,NB,ND,EO,VO,T

   NE：结构单元总数

   MC：计算控制类型参数=0 平面应力

   =1 平面应变

   NX：作用载荷组数

   NB：给定位移的个数

   ND：结构刚度阵的半带宽

   EO：弹性模量

   VO：泊桑比

   T ：单元(结构)的厚度

3. NWA,NWE,NWK,NWP,NWD

   NWA：单元参数的输出控制参数

   NWE：单元刚度矩阵的输出控制参数

   NWK：结构刚度矩阵的输出控制参数

   NWP：载荷向量的输出控制参数

   NWD：结点位移的输出控制参数

   输出控制参数=1 输出

   =0 不输出

4. IJM(3,NE)：单元结点编码数组

   IJM(1,I),IJM(2,I),IJM(3,I)：第I个三角形单元的结点号

   按单元编号顺序填写。

5. XY(2,NG)：结点坐标数组

   XY(1,I)：第I个结点的X坐标

   XY(2,I)：第I个结点的Y坐标

   按结点编号顺序填写。

6. MB(2,NB),ZB(NB)：给定位移约束的信息数组与值数组

   MB(1,I)：第I个给定位移所在的结点号

   NB(2,I)=1：给定X方向位移

   =0：给定Y方向位移

   ZB(NB)：给定位移值(以坐标正向为正)

7. NF,NP

   NF：作用于结点上的集中载荷(坐标方向)的个数

   NP：作用均布侧压的单元边数

若NF>0,填8

8. MF(2,NF),ZF(NF)：作用于结点上集中载荷的信息数组与值数组

MF(1,I)：第I个集中载荷作用的结点号

MF(2,I)=1：作用x方向的集中力

=0：作用y方向的集中力

ZF(NF)：作用的集中力值(以坐标正向为正)

若NP>0,填9

9. MP(2,NP),ZP(NP)：作用于单元边上均布载荷的信息数组与值数组

MF(1,I)：第I个均布载荷作用边的起始结点号a

MF(2,I)：第I个均布载荷作用边的终止结点号b

由起始结点a到终止结点b按单元逆时针方向排列,如图7.2所示。

ZP(NP)：第I个均布载荷值(压向单元为正)

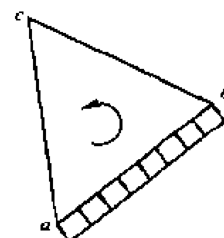


图 7.2

输入数据格式,建立数据文件,文件名小于12个字符：

1. NG　　1个整型数
2. NE,MC,NX,NB,ND,EO,VO,T------------------------ 5个整型数,3个实型数
3. NWA,NWE,NWK,NWP,NWD------------------------------------ 5个整型数
4. IJM(3,NE)-- 3×NE个整型数
5. XY(2,NG)-- 2×NG个实型数
6. MB(2,NB),ZB(NB)------------------------------- 2×NB个整型数,NB个实型数
7. NF,NP---2个整型数

当NF>0,则填8

8. MF(2,NF),ZF(NF)------------------------------- 2×NF个整型数,NF个实型数

当NP>0,则填9

9. MP(2,NP),ZP(NP)------------------------------- 2×NP个整型数,NP个实型数

若NX>1,即多组载荷情况,重复7～9,若计算多个结构则重复1～9。

10. 最后以1个0表示计算结束

0-- 1个整型数

(2) 平面问题主程序框图见图7.3。

由框图可知,此平面问题程序通过对弹性常数的不同处理,既可算平面应力问题也可算平面应变问题。

由框图走向可知,此平面问题程序可用于多个结构连续计算,见框图循环①;对每一结构又可计算多组载荷,见框图循环②。

计算多组载荷时,刚度矩阵只进行一次集成和消元,与第一组载荷同步完成。计算多组载荷的后几组载荷时,只形成新的载荷列阵并对其进行处理和消元,以节省运算时间。

多组载荷及多个结构的计算结果顺序记录在输出文本中。

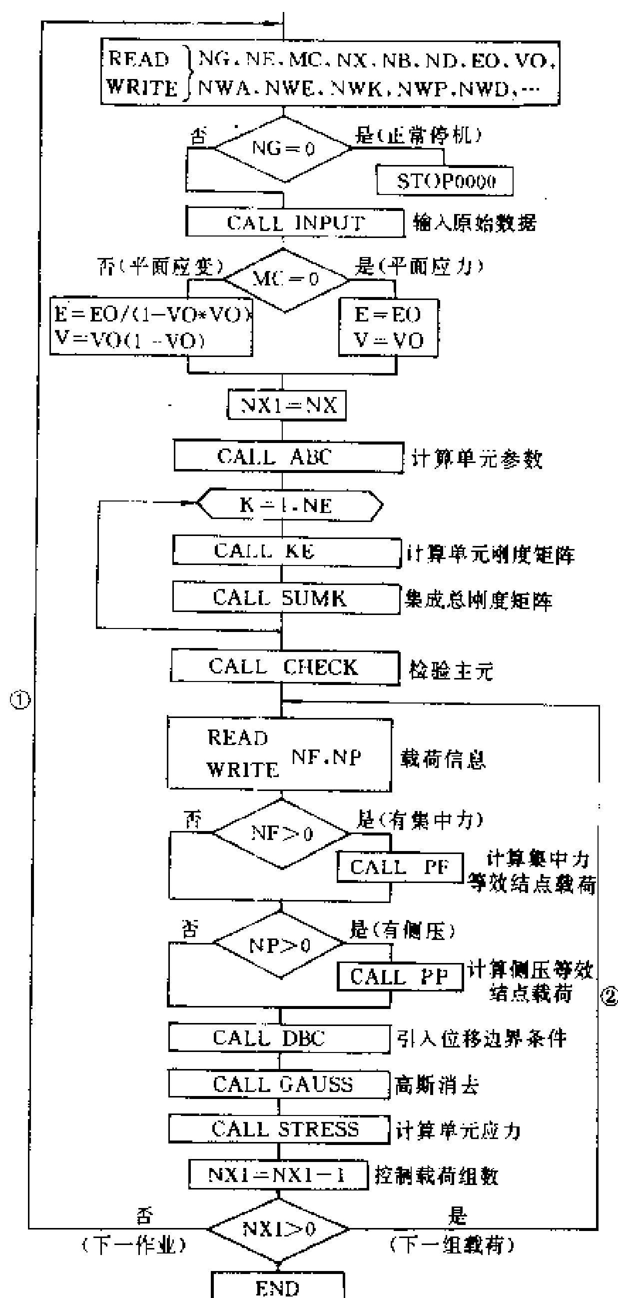


图 7.3　平面问题主程序框图

Ⅰ. 数据输入子程序 INPUT

功能：输入计算所需数据

　　按使用说明顺序输入

参数及数组说明

1. NE 单元数

2. NG 结点数

3. NB 给定位移个数

4. IJM(3,NE) 单元结点编码数组

5. XY(2,NG) 结点坐标数组

6. MB(2,NB) 给定位移约束的信息数组

7. ZB(NB) 给定位移值数组

源程序：

```
      SUBROUTINE INPUT(NE,NG,NB,IJM,XY,MB,ZB)
C***********************************************************************
C   1                                                                  *
C        INPUT INFORMATIONS OF NODES AND ELEMENTS                      *
C               BOUNDARY CONDITIONS                                    *
C                                                                      *
C***********************************************************************
      DIMENSION IJM(3,NE),XY(2,NG),MB(2,NB),ZB(NB)
      READ(5,*) ((IJM(I,L),I=1,3),L=1,NE)
      READ(5,*) ((XY(I,J),I=1,2),J=1,NG)
      READ(5,*)((MB(I,L),I=1,2),L=1,NB),(ZB(L),L=1,NB)
      WRITE(6,10)
 10   FORMAT(/10X,'ELEMENT CODE BLOCKS IJM(2,NE)',/)
      WRITE(6,20)((IJM(M,I),M=1,3),I=1,NE)
 20   FORMAT(1X,4(3I4,3X),3I4)
      WRITE(6,30)
 30   FORMAT(/10X,'COORDINATES OF NODES   XY(2,NG)',/)
      WRITE(6,40)((XY(M,I),M=1,2),I=1,NG)
 40   FORMAT(1X,6E12.5)
      WRITE(6,50)
 50   FORMAT(/,10X,'INRMATION AND VALUES OF GIVEN DISPLACEMENTS',/,
     &         20X,'MB',15X,'ZB',/)
      DO 70 I=1,NB
       WRITE(6,60) (MB(K,I),K=1,2),ZB(I)
 60    FORMAT(10X,2I5,5X,E14.6)
 70   CONTINUE
      RETURN
      END
```

Ⅲ. 计算单元参数子程序 ABC

功能：计算并输出单元的 $b_i,b_j,b_m,c_i,c_j,c_m,A$ 框图见图 7.4。

参数及数组说明：

1. IJM(3,NE)　单元结点编码数组

2. XY(2,NG)　结点坐标数组

3. X(2,5)　当前计算单元的结点坐标

$$\begin{bmatrix} x_i & x_j & x_m & x_i & x_j \\ y_i & y_j & y_m & y_i & y_j \end{bmatrix}$$

多存 2 个结点的坐标是为了编程方便，可简单采用框图中的循环①。

4. B(7)　当前计算单元的单元参数

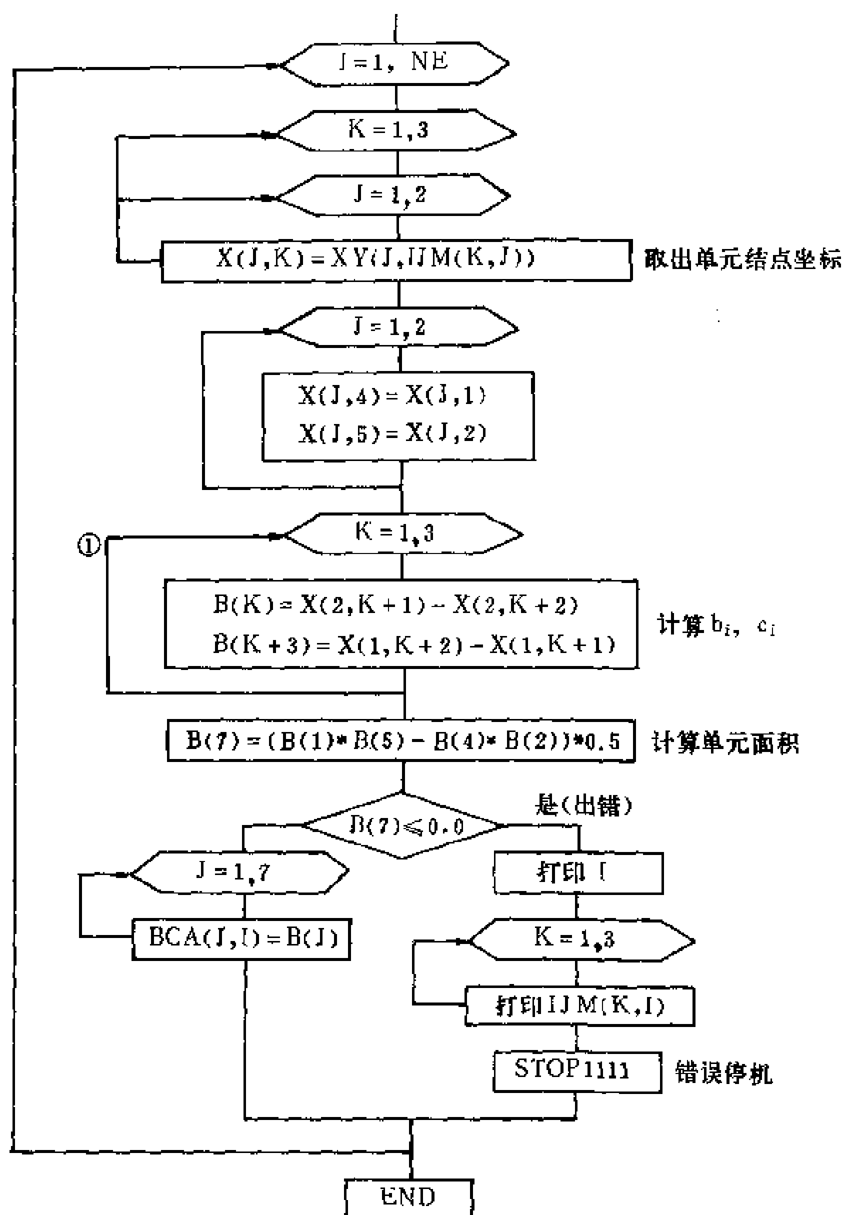


图 7.4 计算单元参数子程序 ABC 框图

B(1) ~ B(3)　b_i, b_j, b_m

B(4) ~ B(6)　c_i, c_j, c_m

B(7)　　　　单元面积 A

5. BCA(7,NE)　将 B(7)按单元存储于该数组中。

输入量：IJM(3,NE),XY(2,NG)

输出量：单元参数 BCA(7,NE)。

本子程序有简单的检查功能，当计算得到的单元面积为零或负值时，即输出错误信息。停机指针为 333。

源程序：

```
      SUBROUTINE ABC(NE,NG,NWA,IJM,XY,BCA)
C*********************************************************************
C   2                                                                *
C          CALCULATE ELEMENT PARAMETERS                              *
C                                                                    *
C              INPUT :IJM,XY                                         *
C              OUTPUT:BCA                                            *
C                                                                    *
C*********************************************************************
      DIMENSION IJM(3,NE),XY(2,NG),BCA(7,NE),X(2,5),B(7)
      IF(NWA.EQ.1) WRITE(6,5)
    5 FORMAT(/10X,'PARAMETERS   OF   ELEMENTS   BCA(7,NE)'/)
      DO 80 I=1,NE
       DO 10 K=1,3
        K1=IJM(K,I)
        DO 10 J=1,2
        X(J,K)=XY(J,K1)
   10  CONTINUE
       DO 20 J=1,2
        X(J,4)=X(J,1)
        X(J,5)=X(J,2)
   20  CONTINUE
       DO 30 K=1,3
        B(K)=X(2,K+1)-X(2,K+2)
        B(K+3)=X(1,K+2)-X(1,K+1)
   30  CONTINUE
       B(7)=(B(1)*B(5)-B(4)*B(2))*0.5
       IF(NWA.GT.0) WRITE(6,40)I,B
   40  FORMAT(1X,'NE=',I3,/3X,7E10.4)
       IF(B(7).LE.0.0) GOTO 60
       DO 50 J=1,7
        BCA(J,I)=B(J)
   50  CONTINUE
       GOTO 80
   60  WRITE(6,70)I,(IJM(J,I),J=1,3)
   70  FORMAT(/5X,'ELEMENT',I5,5X,'AREA IS NONPOSITIVE',5X,'IJM',3I5)
       STOP 333
   80 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Ⅳ. 计算单元刚度矩阵子程序 KE

功能：计算并输出单元刚度矩阵

参数及数组说明：

1. BCA(7,NE)　单元参数数组

2. EK(6,6)　单元刚度矩阵

输入量　单元参数 BCA(7,NE)

输出量　单元刚度矩阵 EK(6,6)

源程序：

```
        SUBROUTINE KE(IO,NE,NWE,T,A1,A2,V,EK,BCA)
C*********************************************************************
C   3                                                                *
C          CALCULATE STIFFNESS MATRIX OF ELEMENT                     *
C                                                                    *
C                 INPUT :BCA                                         *
C                 OUTPUT:EK                                          *
C                                                                    *
C*********************************************************************
        DIMENSION B(7),BCA(7,NE),EK(6,6)
        DO 10 I=1,7
         B(I)=BCA(I,IO)
  10    CONTINUE
        A=A1/B(7)*T
        DO 20 I=1,3
         DO 20 J=I,3
          I1=2*I
          J1=2*J
          EK(I1-1,J1-1)=A*(B(I)*B(J)+A2*B(I+3)*B(J+3))
          EK(I1-1,J1)=A*(V*B(I)*B(J+3)+A2*B(I+3)*B(J))
          EK(I1,J1-1)=A*(V*B(I+3)*B(J)+A2*B(I)*B(J+3))
          EK(I1,J1)=A*(B(I+3)*B(J+3)+A2*B(I)*B(J))
  20    CONTINUE
        DO 30 I=3,6
         DO 30 J=1,I
          EK(I,J)=EK(J,I)
  30    CONTINUE
        IF(NWE.EQ.0) GOTO 60
        WRITE(6,40) IO
  40    FORMAT(/1X,'EK     NE=',I5)
        WRITE(6,50)EK
  50    FORMAT(1X,6E11.4)
  60    RETURN
        END
```

Ⅴ. 总刚集成子程序 SUMK

功能：按二维等带宽存储的方式集成总刚度矩阵。

框图见图 7.5。

参数及数组说明：

1. IO　按单元循环的单元号，来自主程序

2. EK(6,6)　单元刚度矩阵

3. IJM(3,NE)　单元结点编码数组

4. SK(NT,ND)　按二维等带宽存储的总刚度矩阵

输入量：单元刚度矩阵 EK(6,6)

　　　　单元结点编码数组 IJM(3,NE)

　　　　单元号 IO

输出量：结构总刚度矩阵 SK(NT,ND)

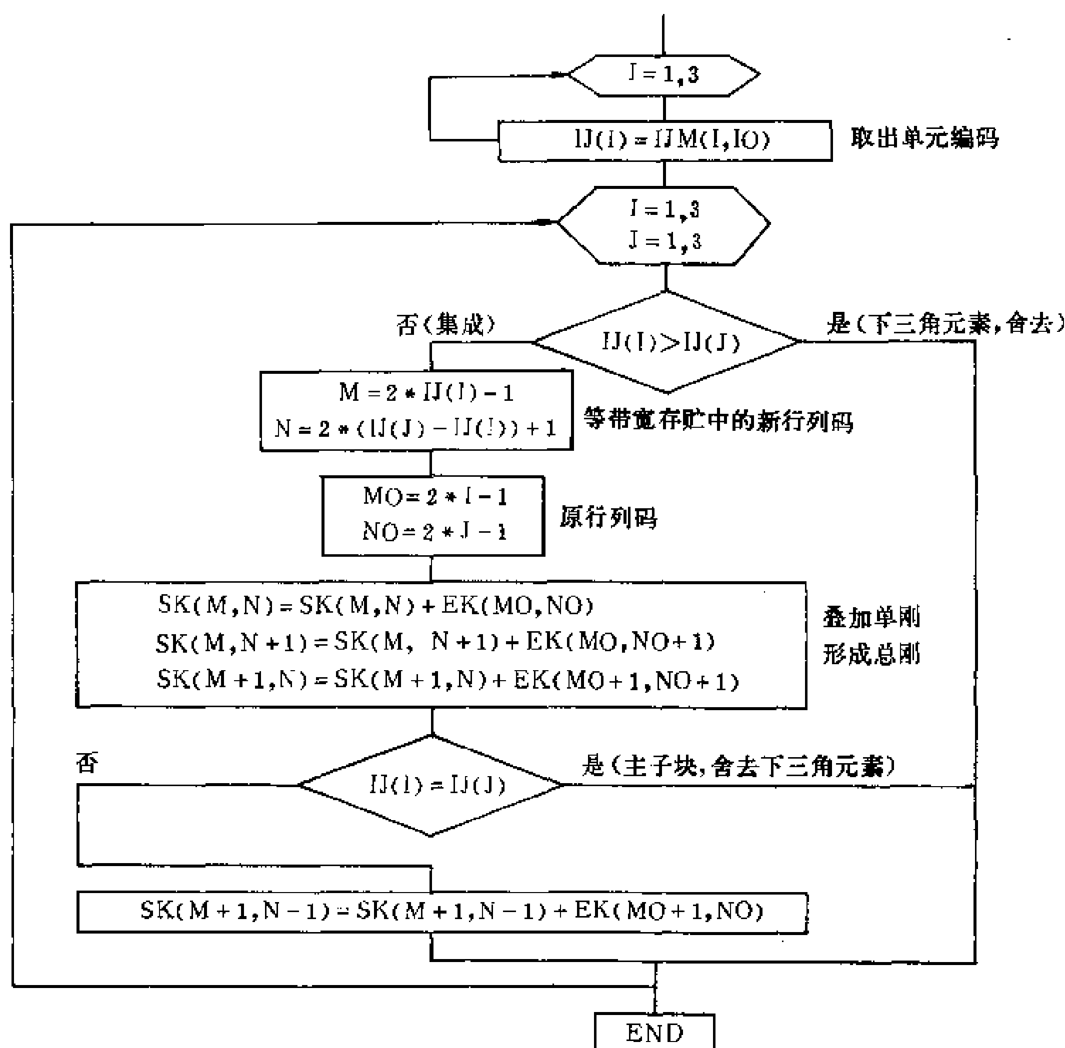


图 7.5　总刚集成子程序 SUMK 框图

源程序：

```
      SUBROUTINE SUMK(IO,NE,ND,NT,IJM,SK,EK)
C***********************************************************************
C   4                                                                 *
C           FORM THE STRUCTURE STIFFNESS MATRIX OF THE                *
C           MAXIMUN HALF BAND-WIDTH                                   *
```

```
C                                                                      *
C                  INPUT :EK,IJM                                       *
C                  OUTPUT : SK                                         *
C                                                                      *
C***********************************************************************
        DIMENSION IJ(3),SK(NT,ND),IJM(3,NE),EK(6,6)
        DO 10 I=1,3
         IJ(I)=IJM(I,IO)
   10   CONTINUE
        DO 20 I=1,3
         DO 20 J=1,3
          IF(IJ(I).GT.IJ(J)) GOTO 20
          M=2*IJ(I)-1
          N=2*(IJ(J)-IJ(I))+1
          MO=2*I-1
          NO=2*J-1
          SK(M,N)=SK(M,N)+EK(MO,NO)
          SK(M,N+1)=SK(M,N+1)+EK(MO,NO+1)
          SK(M+1,N)=SK(M+1,N)+EK(MO+1,NO+1)
          IF(IJ(I).EQ.IJ(J)) GOTO   20
          SK(M+1,N-1)=SK(M+1,N-1)+EK(MO+1,NO)
   20   CONTINUE
        RETURN
        END
```

Ⅵ. 检验主元子程序 CHECK

功能：1. 检验系数矩阵主元，若主元为零或负值则输出错误信息并停机。停机指针 444。

2. 输出总刚度矩阵

参数及数组说明：

SK(NT,ND) 总刚度矩阵

源程序：

```
        SUBROUTINE CHECK(NT,ND,NWK,SK)
C***********************************************************************
C    5                                                                 *
C        CHECK WHETHER THE MAIN ELEMENTS O.                            *
C        STIFFNESS MATRIXIS K ARE POSITIVE                             *
C                                                                      *
C***********************************************************************
        DIMENSION SK(NT,ND)
        IF(NWK.EQ.0) GOTO 30
        WRITE(6,10)
   10   FORMAT(/,10X,'GLOBLE STIFFNESS MATRIX',/)
        WRITE(6,20) ((SK(I,J),I=1,NT),J=1,ND)
   20   FORMAT(1X,5E13.6)
```

```
30      M=0
        DO 50 I=1,NT
         IF(SK(I,1).GT.1E-10) GOTO 50
         WRITE(6,40)I,SK(I,1)
40       FORMAT(/10X,'MAIN ELEMENT IS NONPOSITIVE NT=',I4,5X,E12.6)
         M=M+1
50      CONTINUE
        IF(M.GT.0) GOTO 60
        GOTO 70
60      STOP 444
70      RETURN
        END
```

Ⅵ. 组装结点集中载荷子程序 PF

功能：将作用在坐标方向上的结点集中力装入等效结点载荷列阵中

输出等效结点载荷列阵

参数及数组说明：

1. NF 作用于结点坐标方向的集中载荷的个数
2. MF(2,NF) 结点集中载荷信息数组
3. ZF(NF) 结点集中载荷值数组
4. F(NT) 等效结点载荷列阵

输入量：有关集中载荷的信息 NF,MF(2,NF),ZF(NF)

等效结点载荷列阵 F(NT)

输出量：等效结点载荷列阵 F(NT)

源程序：

```
        SUBROUTINE PF(NF,NP,NT,NWP,F,MF,ZF)
C*********************************************************************
C   6                                                                *
C        FORM THE VECTOR OF NODAL LOADS PRODUCED                     *
C              BY CONCENTRATED FORCES                                *
C                                                                    *
C               INPUT :NF,MF,ZF,F                                    *
C               OUTPUT:F                                             *
C                                                                    *
C*********************************************************************
        DIMENSION MF(2,NF),ZF(NF),F(NT)
        READ(5,*) ((MF(I,L),I=1,2),L=1,NF),(ZF(L),L=1,NF)
        WRITE(6,10)
 10     FORMAT(/,10X,'CONCENTRATED LOADS MF(2,NF) ZF(NF)'/)
        DO 30 L=1,NF
         WRITE(6,20) (MF(I,L),I=1,2),ZF(L)
 20      FORMAT(1X,2I10,10X,E12.6)
 30     CONTINUE
```

```
      DO 40 I=1,NF
       N=2*MF(1,I)-MF(2,I)
       F(N)=F(N)+ZF(I)
40    CONTINUE
      IF(NP.GT.0) GOTO 70
      IF(NWP.EQ.0) GOTO 70
      WRITE(6,50)
50    FORMAT(/,10X,'LOAD VECTOR'/)
      WRITE(6,60)F
60    FORMAT(1X,5E14.6)
70    RETURN
      END
```

Ⅶ. 计算均布侧压等效结点载荷子程序 PP

功能：计算均布侧压的等效结点载荷并装入等效结点载荷列阵中。

输出等效结点载荷列阵。

参数及数组说明

1. NP 作用均布侧压的单元边数
2. MP(2,NP) 作用均布侧压信息数组
3. ZP(NP) 均布侧压值数组
4. XY(2,NG) 结点坐标数组
5. F(NT) 等效结点载荷列阵

输入量：有关均布侧压信息 NP,MP(2,NP),ZP(NP)

结点坐标 XY(2,NG)

等效结点载荷列阵 F(NT)

输出量：等效结点载荷列阵 F(NT)

源程序

```
      SUBROUTINE PP(NP,NT,NG,NWP,XY,F,MP,ZP)
C**********************************************************************
C   7                                                                 *
C      FORM THE VECTOR OF NODAL FORCE PRODUCED                        *
C          BY UNIFORM FORCE                                           *
C                                                                     *
C             INPUT :F,XY,NP,MP,ZP                                    *
C             OUTPUT:F                                                *
C                                                                     *
C**********************************************************************
      DIMENSION MP(2,NP),ZP(NP),XY(2,NG),F(NT)
      READ(5,*) ((MP(I,L),I=1,2),L=1,NP),(ZP(L),L=1,NP)
      WRITE(6,10)
10    FORMAT(/,10X,'UNIFORM PRESSURE MP(2,NP) ZP(NP)'/)
      DO 30 L=1,NP
       WRITE(6,20) (MP(I,L),I=1,2),ZP(L)
20     FORMAT(1X,2I10,10X,E12.6)
30    CONTINUE
```

```
      DO 40 I=1,NP
       N1=MP(1,I)
       N2=MP(2,I)
       PX=XY(2,N1)-XY(2,N2)
       PY=XY(1,N2)-XY(1,N1)
       PX=.5*ZP(I)*PX
       PY=.5*ZP(I)*PY
       F(2*N1-1)=F(2*N1-1)+PX
       F(2*N1)=F(2*N1)+PY
       F(2*N2-1)=F(2*N2-1)+PX
       F(2*N2)=F(2*N2)+PY
40    CONTINUE
      IF(NWP.EQ.0) GOTO 70
      WRITE(6,50)
50    FORMAT(/,10X,'LOAD VECTOR'/)
      WRITE(6,60)F
60    FORMAT(1X,5E14.6)
70    RETURN
      END
```

Ⅸ. 引入给定位移子程序 DBC

功能：引入给定位移消除系数矩阵奇异性。

引入给定位移方案

给定零位移：对角元素改 1 法

给定非零位移：对角元素乘大数法

框图见图 7.6。

参数及数组说明：

1. A(NT,ND)系数矩阵
2. B(NT)　等效结点载荷列阵
3. NB　给定位移的个数
4. MB(2,NB)　给定位移信息数组
5. ZB(NB)　给定位移值数组
6. NX　载荷组数

   计算多组载荷时

   NX=NX1　计算第一组载荷,A,B 同时引入位移边界条件。

   NX≠NX1　计算以下几组载荷,只在 B 中引入位移边界条件。

输入量　系数矩阵 A(NT,ND)

　　等效结点载荷列阵 B(NT)

　　位移边界条件 NB,MB(2,NB),ZB(NB)

输出量　系数矩阵 A(NT,ND)

　　等效结点载荷列阵 B(NT)

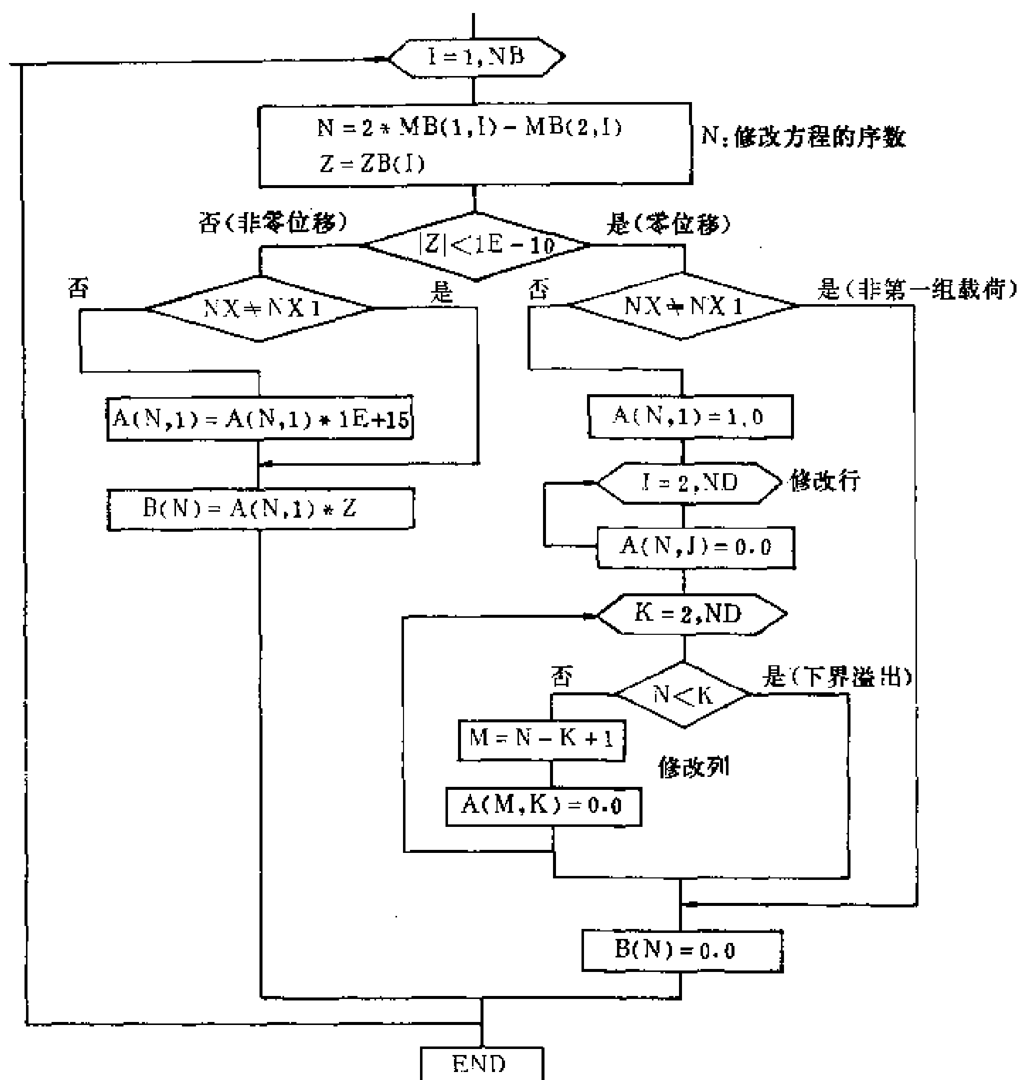


图 7.6　引入给定位移子程序 DBC 框图

源程序：

```
      SUBROUTINE DBC(NT,ND,NB,NX,NX1,A,B,MB,ZB)
C***********************************************************************
C   8                                                                  *
C        INTRODUCE GIVENE NODAL DISPLACEMENTS                          *
C                                                                      *
C                 INPUT :A,B,NB,MB,ZB                                  *
C                 OUTPUT:A,B                                           *
C                                                                      *
C***********************************************************************
      DIMENSION MB(2,NB),ZB(NB),A(NT,ND),B(NT)
      DO 60 I=1,NB
```

```
        N=2*MB(1,I)-MB(2,I)
        Z=ZB(I)
        IF(ABS(Z).LT.1E-10) GOTO 20
        IF(NX.NE.NX1) GOTO 10
        A(N,1)=A(N,1)*1E+15
10      B(N)=A(N,1)*Z
        GOTO 60
20      IF(NX.NE.NX1) GOTO 50
        A(N,1)=1.0
        DO 30 J=2,ND
         A(N,J)=0.0
30      CONTINUE
        DO 40 K=2,ND
         IF(N.LT.K) GOTO 50
         M=N-K+1
         A(M,K)=0.0
40      CONTINUE
50      B(N)=0.0
60     CONTINUE
       RETURN
       END
```

X. 高斯消去法子程序 GAUSS

功能：用以求解系数矩阵以二维等带宽方式存储的线性代数方程组。多组载荷时系数矩阵只作一次消元。线性方程组的解与等效结点载荷列阵共用存贮单元。输出结点位移。

框图见图 7.7。

参数及数组说明：

1. A(NT,ND)系数矩阵
2. B(NT)求解前为等效结点载荷列阵
   求解后为结点位移
3. 计算多组载荷时
   NX=NX1　计算第一组载荷，A、B 同时消元求解。
   NX≠NX1　计算以下几组载荷时，只对 B 消元并求解。

输入量：系数矩阵 A(NT,ND)
　　　　等效结点载荷列阵 B(NT)

输出量：结点位移 B(NT)

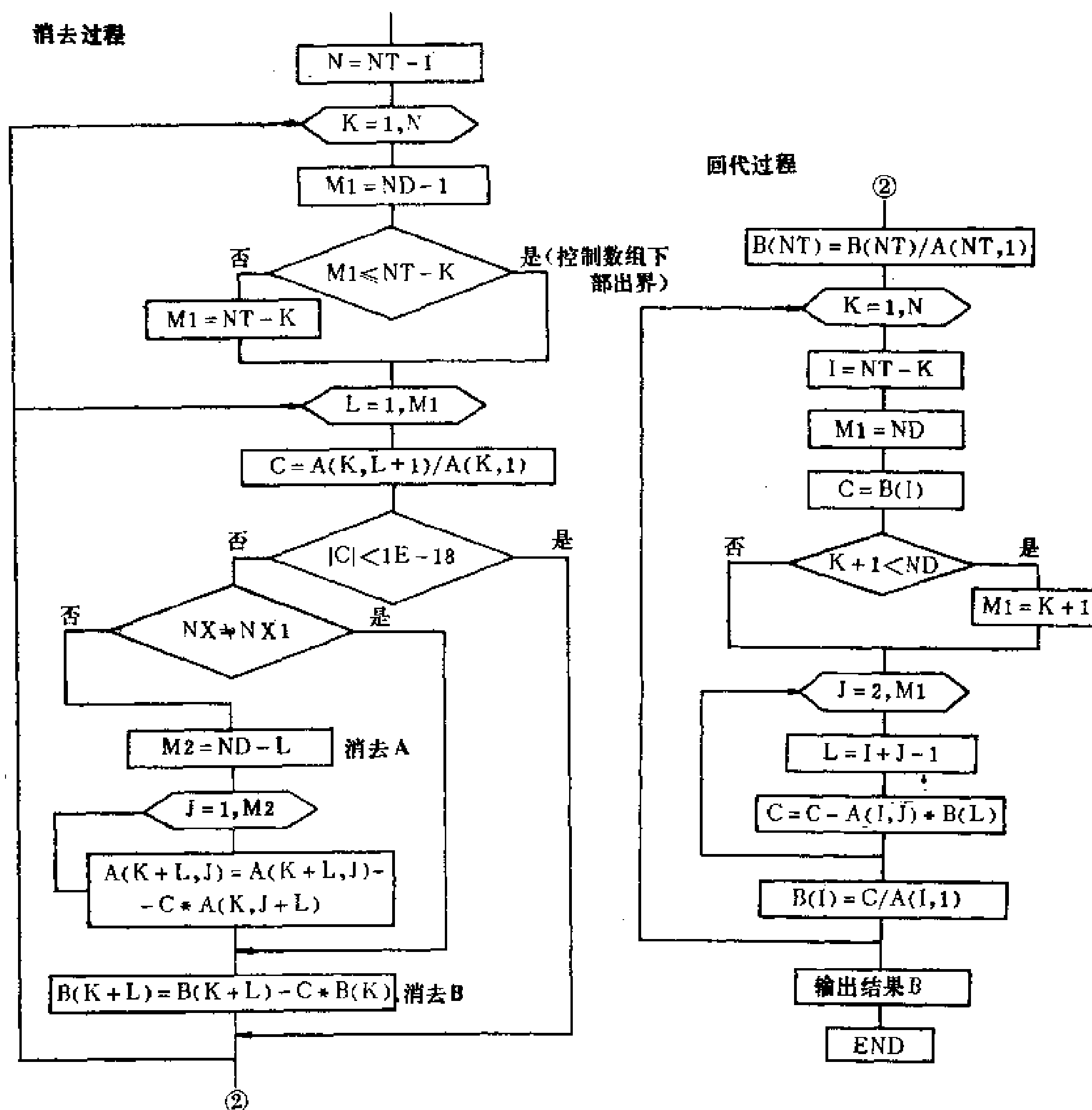


图 7.7 高斯消去子程序 GAUSS 框图

源程序

```
      SUBROUTINE GAUSS(NT,ND,NWD,NX,NX1,A,B)
C************************************************************************
C    9                                                                  *
C             GAUSS ELIMINATION                                         *
C                                                                       *
C                 INPUT :A,B                                            *
C                 OUTPUT:B                                              *
C                                                                       *
C************************************************************************
      DIMENSION A(NT,ND),B(NT)
```

```
      N=NT-1
      IF(NX.EQ.NX1) GO TO 10
      ASSIGN 50 TO M
      GO TO 20
 10   ASSIGN 30 TO M
 20   DO 60 K=1,N
       M1=ND-1
       IF((M1).GT.(NT-K)) M1=NT-K
       DO 60 L=1,M1
        C=A(K,L+1)/A(K,1)
        IF(ABS(C).LT.1E-18) GO TO 60
        GO TO M,(30,50)
 30     M2=ND-L
        DO 40 J=1,M2
         A(K+L,J)=A(K+L,J)-C*A(K,J+L)
 40     CONTINUE
 50     B(K+L)=B(K+L)-C*B(K)
 60   CONTINUE
      B(NT)=B(NT)/A(NT,1)
      DO 80 K=1,N
       I=NT-K
       M1=ND
       C=B(I)
       IF((K+1).LT.(ND)) M1=K+1
       DO 70 J=2,M1
        L=I+J-1
        C=C-A(I,J)*B(L)
 70    CONTINUE
      B(I)=C/A(I,1)
 80   CONTINUE
C
C  OUTPUT NODAL DISPLACEMENTS
C
      IF(NWD.EQ.0)GOTO 150
      WRITE(6,90)
      WRITE(6,100)
 90   FORMAT(/,10X,'DISPLACEMENTS OF NODES',/)
 100  FORMAT(1X,2(1X,'NG',9X,'U',12X,'V',9X))
      N=NT/2
      N11=N/2

      IF(FLOAT(N11)+.3-FLOAT(N)/2.0.GT.1E-7)N=N-1
      DO 140 I=1,N,2
       NT2=NT/4
       NT3=NT/2
       FL1=FLOAT(NT2)+.3-FLOAT(NT3)/2
       IF((FL1.LT.0).AND.(I.EQ.N)) GOTO 120
       J=2*I-1
       K=2*I
       I1=I+1
```

```
          J1=J+2
          K1=K+2
          WRITE(6,110) I,B(J),B(K),I1,B(J1),B(K1)
  110     FORMAT(1X,2(I3,3X,E11.5,2X,E11.5,5X))
          GOTO 140
  120     J=2*I-1
          K=2*I
          WRITE(6,130)I,B(J),B(K)
  130     FORMAT(1X,I3,3X,E11.5,2X,E11.5)
  140   CONTINUE
  150   RETURN
        END
```

Ⅺ. 计算单元应力子程序 STRESS

功能：计算并输出单元应力、主应力及主应力方向

参数及数组说明：

1. A1,A2,V 材料系数

$$A1=\frac{E}{4(1-V^2)},\ A2=\frac{1}{2(1-V)}$$

V 泊桑比

2. IJM(3,NE) 单元结点编码数组
3. BCA(7,NE) 单元参数数组
4. F(NT) 结点位移
5. 应力输出符号：

S-X σ_x

S-Y σ_y

S-XY τ_{xy}

S1,S2 主应力

AG 主应力 S1 与 x 轴夹角

输入量 材料参数 A1,A2,V

结点编码数组 IJM(3,NE)

单元参数数组 BCA(7,NE)

结点位移 F(NT)

输出量：单元应力 S-X,S-Y,S-XY

主应力及主应力方向 S1,S2,AG

源程序：

```
        SUBROUTINE STRESS(NE,NT,A1,A2,V,IJM,BCA,F)
C***********************************************************************
C   10                                                                  *
C       CALCULATE THE ELEMENT STRESSES                                  *
```

```
C                                                                      *
C              INPUT :F,IJM,BCA,A1,A2,V                                *
C              OUTPUT:S-X,S-Y,S-XY,S1,S2,AG                            *
C                                                                      *
C***********************************************************************
      DIMENSION IJM(3,NE),BCA(7,NE),F(NT),B(7),R(6)
      WRITE(6,5)
  5   FORMAT(/,10X,'ELEMENT STRESSES',/)
      WRITE(6,10)
 10   FORMAT(2X,'NE',5X,'S-X',8X,'S-Y',8X,'S-XY',10X,
     &        'S1',10X,'S2',8X,'AG',/)
      DO 60 I=1,NE
       S1=0.
       S2=0.
       S3=0.
       DO 20 J=1,7
        B(J)=BCA(J,I)
 20    CONTINUE
       A=2*A1/B(7)
       DO 30 J=1,3
        N=IJM(J,I)*2
        R(2*J-1)=F(N-1)
        R(2*J)=F(N)
 30    CONTINUE
       DO 40 J=1,3
        K=2*J
        S1=S1+A*(B(J)*R(K-1)+V*B(J+3)*R(K))
        S2=S2+A*(V*B(J)*R(K-1)+B(J+3)*R(K))
        S3=S3+A*A2*(B(J+3)*R(K-1)+B(J)*R(K))
 40    CONTINUE
       P=.5*(S1+S2)
       Q=.5*(S1-S2)
       X1=P+SQRT(Q*Q+S3*S3)
       X2=2*P-X1
       CTA=0.
       IF (S3.GT.0) CTA=ATAN((X1-S1)/S3)
       WRITE(6,50)I,S1,S2,S3,X1,X2,CTA
 50    FORMAT(1X,I3,1X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,2X,E10.4,
     &        2X,F8.4)
 60   CONTINUE
      RETURN
      END
```

Ⅻ. 动态数组设计与主程序

动态数组表

本程序中设二个一维大数组：实型数组 C 及整型数组 IA，分别供程序中实型和整型变界数组共同使用。动态数组表设计如下：

C数组：

```
 |XY(2,NG)| ZB(NB)| BCF(7, NE)| SK(NT, ND)| F(NT)| ZF(NF)| ZP(NP)|
C(1)     C(N1)  C(N2)       C(N3)        C(N4)  C(N5)  C(N6)  C(NEND)
```

IA数组

```
 |IJM(3,NE)| MB(2,NB)| MF(2,NF)| MP(2,NP)|
IA(1)     IA(M1)    IA(M2)     IA(M3)    IA(MEND)
```

每个一维数组线上方标注的是变界数组名，线下方标注的是每个变界数组在一维数组中相应的起始数组元素号。例如，C数组中顺序存储的变界数组为：XY(2,NG)，ZB(NB)，BCF(7,NE)，……，它们的第一个元素分别对应于C数组的C(1)，C(N1)，C(N2)，……号元素。各个变界数组的长度由实际需要确定，因此所有的界N1，N2，……；M1，M2，……都需在主程序中予以确定。

程序在计算多个结构时动态数组采用全覆盖技术，即动态数组重新分割；计算多组载荷是采用动态数组部分覆盖技术，因此与载荷有关的变界数组MF，MP，ZF，ZP，都分别安排在IA和C数组的尾部。

当实际需要的变界数组总体超出一维数组的界时，计算就不能进行。程序中分别用NEND及MEND校验C和IA数组的界是否满足有限元求解要求。很明显，只要在可能条件下扩大一维数组C和IA的界就能扩大解题规模而不需要改动程序中任何其它部位，因此对使用和程序移机十分方便。

平面问题3结点单元有限元分析主程序中包括了动态数组使用中变界数组界的确定，对各子程序的调用并给出了充分的注释语句。主源程序：

```
C*********************************************************************
C                                                                    *
C          PL  ----  PROGRAM OF PLANE PROBLEM             96.1       *
C                                                                    *
C*********************************************************************
C
C-------- INPUT DATA (IN SEQUENCE) --------
C 1.NG
C       NG       TOTAL NUMBER OF NODES
C                NG=0   STOP
C 2.NE,MC,NX,NB,ND,EO,VO,T
C       NE       TOTAL NUMBER OF ELEMENTS
C       MC       TYPE OF PROBLEM
C                   MC=0   PLANE STRESS
C                     =1   PLANE STRAIN
C       NX       TOTAL NUMBER OF LOAD GROUPS
C       NB       TOTAL NUMBER OF GIVEN DISPLACEMENTS
C       ND       MAXIUM HALF BAND-WIDTH OF STIFFNESS MATRIX K
C       EO       YOUNG'S MODULUS
C       VO       POSSIN'S RATIO
C       T        THICKNESS OF STRUCTURE
```

```
C 3.NWA NWE,NWK,NWP,NWD
C       CONTROL PARAMETERS OF OUTPUT
C                 =1 OUTPUT
C                 =0 NO OUTPUT
C       NWA     OUTPUT CONTROL PARAMETER OF ELEMENT PARAMETERS
C       NWE     OUTPUT CONTROL PARAMETER OF ELEMENT STIFFNESS MATRIX
C       NWK     OUTPUT CONTROL PARAMETER OF STRUCTURE STIFFNESS MATRIX
C       NWP     OUTPUT CONTROL PARAMETER OF LOAD VECTOR
C       NWD     OUTPUT CONTROL PARAMETER OF NODAL DISPLACEMENTS
C 4.IJM(3,NE)   NODAL CODES OF ELEMENT
C               IJM(1,I); IJM(2,I); IJM(3,I)
C               THREE NODAL CODES OF I-TH TRIANGLE ELEMENT
C 5.XY(2,NG)    COORDINATES OF NODES
C 6.MB(2,NB),ZB(NB)  INFORMATION AND VALUES OF PRESCRIBED BOUNDARY
C               MB(1,I)---NODAL NUMBER OF PRECRIBED BOUNDARY
C               MB(2,I)=1--X-DISPLACEMENT IS PRESCRIBED
C                      =0--Y-DISPLACEMENT IS PRESCRIBED
C               ZB(I)------VALUE OF PRESCRIBED BOUNDARY
C 7.NF,NP
C               NF-----TOTAL NUMBER OF CONCENTRATED FORCES
C               NP-----TOTAL NUMBER OF UNIFORM FORCES
C IF NF>0
C 8. MF(2,NF),ZF(NF)
C               MF(1,I)---NODAL NUMBER APPLIED BY CONCENTRATED FORCES
C               MF(2,I)=1--X-COMPONENT IS APPLIED
C                      =0--Y-COMPONENT IS APPLIED
C               ZF(I)------VALUES OF FORCES
C IF NP>0

C 9.MP(2,NP),ZP(NP)
C               MP(1,I)----THE FIRST NODAL NUMBER OF STRIP
C               MP(2,I)----THE SECOND NODAL NUMBER OF STRIP
C               ZP(I)------VALUE OF UNIFORM FORCE
C
C IF NX>1 REPEAT 7.-9. (NX-1) TIMES
C
C DATA END OF NG=0
C------------------------------------------------------------------
C
C  ARRANGEMENT OF ADJUSTABLE ARRAYS
C
C       ARRAY     C(5000)            ARRAY      IA(1000)
C       C(1)      XY(2,NG)           IA(1)      IJM(3,NE)
C       C(N1)     ZB(NB)             IA(M1)     MB(2,MB)
C       C(N2)     BCA(7,NE)          IA(M2)     MF(2,NB)
C       C(N3)     SK(NT,ND)          IA(M3)     MP(2,NP)
C       C(N4)     F(NT)              IA(MEND)   LIMIT NEEDED
C       C(N5)     ZF(NF)
C       C(N6)     ZP(NP)
C       C(NEND)   LIMIT NEEDED
```

```
C
C  ERROR STOP
C        STOP 111    EXCEED THE LIMIT OF ARRAY C
C        STOP 222    EXCEED THE LIMIT OF ARRAY C /IA
C        STOP 333    ELEMENT AREA IS NONPOSITIVE
C        STOP 444    MAIN ELEMENT OF MATRIX K IS NONPOSITIVE
C
C  MAIN PROGRAM
C
      DIMENSION   C(5000),IA(1000),EK(36)
      CHARACTER*12 IN,OUT
      WRITE(*,*)'     '
      WRITE(*,*)'    PLEASE INPUT THE INPUT-FILE   NAME (A<12)'
      WRITE(*,*)'     '
      READ(*,5) IN
      WRITE(*,*)'     '
      WRITE(*,*)'    PLEASE INPUT THE OUTPUT-FILE NAME (A<12)'
      WRITE(*,*)'     '
      READ(*,5) OUT
 5    FORMAT(A12)
      OPEN(5,FILE=IN, STATUS='OLD')
      OPEN(6,FILE=OUT,STATUS='UNKNOWN')
 10   READ(5,*)NG
      IF(NG.EQ.0)  STOP
      WRITE(6,15)
 15   FORMAT(//,5X,
     & '******************    PLANE PROBLEM    ********************',/)
      READ(5,*)NE,MC,NX,NB,ND,EO,VO,T
      WRITE(6,20)NG,NE,MC,NX,NB,ND,EO,VO,T
 20   FORMAT(//,10X,'NG=',I4,5X,'NE=',I4,5X,'MC=',I4,5X,'NX=',I4,/,
     &        10X,'NB=',I4,5X,'ND=',I4,/,10X,'EO=',E10.4,5X,'VO=',F7.2,
     &        5X,'T=',F7.2,)
      READ(5,*)NWA,NWE,NWK,NWP,NWD
      WRITE(6,25)NWA,NWE,NWK,NWP,NWD
 25   FORMAT(/10X,'NWA=',I2,3X,'NWE=',I2,3X,'NWK=',I2,3X,
     &         'NWP=',I2,3X,'NWD=',I2)
      NT=2*NG
C
C  CALCULATE THE LIMIT OF ADJUSTABLE-SIZE ARRAYS
C
      M1=3*NE+1
      M2=M1+2*NB
      N1=2*NG+1
      N2=N1+NB
      N3=7*NE+N2
      N4=N3+NT*ND
      N5=N4+NT
C
C  CHECK THE LIMIT OF ARRAY C
C
```

```
      NEND=N5
      IF(NEND.LE.5000) GOTO 35
      WRITE(*,*)'*** EXCEED THE LIMIT OF ARRAY C(IN THE MIDDLE)!! ***'
      WRITE(*,30) NEND
   30 FORMAT(/,'******** NEND=',I6,1X,'>5000 ********')
      STOP 111

C
C  INPUT DATA
C
   35 CALL INPUT(NE,NG,NB,IA(1),C(1),IA(M1),C(N1))
      WRITE(*,40)
   40 FORMAT(/10X,'#####   INPUT PASSED   #####')
      IF(MC.EQ.0) GOTO 45
C
C  PLANE STRAIN PROBLEM
C
      E=EO/(1.0-VO*VO)
      V=VO/(1.0-VO)
      GOTO 50
C
C  PLANE STRESS PROBLEM
C
   45 E=EO
      V=VO

   50 NX1=NX
      A1=E/(1.0-V*V)/4.0
      A2=0.5*(1.0-V)
C
C  CALCULATING ELEMENT PARAMETERS
C
      CALL ABC(NE,NG,NWA,IA(1),C(1),C(N2))
      WRITE(*,55)
   55 FORMAT(/10X,'#####   ABC   PASSED   #####')

      DO 60 I=N3,N4
       C(I)=0.0
   60 CONTINUE
C
C  FORM MATRIX K
C
      DO 65 K=1,NE
       IO=K
       CALL KE(IO,NE,NWE,T,A1,A2,V,EK(1),C(N2))
       CALL SUMK(IO,NE,ND,NT,IA(1),C(N3),EK(1))
   65 CONTINUE
      WRITE(*,70)
   70 FORMAT(/10X,'#####   SUMK   PASSED   #####')
```

```
      CALL CHECK(NT,ND,NWK,C(N3))
      WRITE(*,75)
 75   FORMAT(/10X,'#####   CHECK PASSED   #####')
 80   READ(5,*) NF,NP
C
C  CALCULATE THE LIMIT OF ADJUSTABLE-SIZE ARRAYS
C  CHECK THE LIMIT OF ARRAY C AND ARRAY IA
C
      M3=M2+2*NF
      N6=N5+NF
      NEND=N6+NP-1
      MEND=M3+2*NP-1
      NM=0
      IF(NEND.LE.5000) GOTO 85
      WRITE(*,*)'*** EXCEED THE LIMIT OF ARRAY C (AT THE END)!! ***'
      WRITE(*,30) NEND
      NM=1
 85   IF(MEND.LE.1000) GOTO 95
      WRITE(*,*)'*** EXCEED THE LIMIT OF ARRAY IA (AT THE END)!! ***'
      WRITE(*,90) MEND
 90   FORMAT(/,'******** MEND=',I6,1X,'>1000 ********')
      STOP 222
 95   IF(NM.EQ.1) STOP 222
C
C  FORM VECTOR P
C
      DO 100 I=N4,N5
       C(I)=0.0
 100  CONTINUE
      IF(NF.GT.0) CALL PF(NF,NP,NT,NWP,C(N4),IA(M2),C(N5))
      WRITE(*,105)
 105  FORMAT(/10X,'#####   PF    PASSED   #####')
      IF(NP.GT.0) CALL PP(NP,NT,NG,NWP,C(1),C(N4),IA(M3),C(N6))
      WRITE(*,110)
 110  FORMAT(/10X,'#####   PP    PASSED   #####')
C
C  INTRODUCE GIVEN DISPLACEMENTS
C
      CALL DBC(NT,ND,NB,NX,NX1,C(N3),C(N4),IA(M1),C(N1))
      WRITE(*,115)
 115  FORMAT(/10X,'#####   DBC   PASSED   #####')
C
C  SOLVE LINEAR EQUATIONS KA=P
C
      CALL GAUSS(NT,ND,NWD,NX,NX1,C(N3),C(N4))
      WRITE(*,120)
 120  FORMAT(/10X,'#####   GAUSS PASSED   #####')
C
C  CALCULATE ELEMENT STRESSES
```

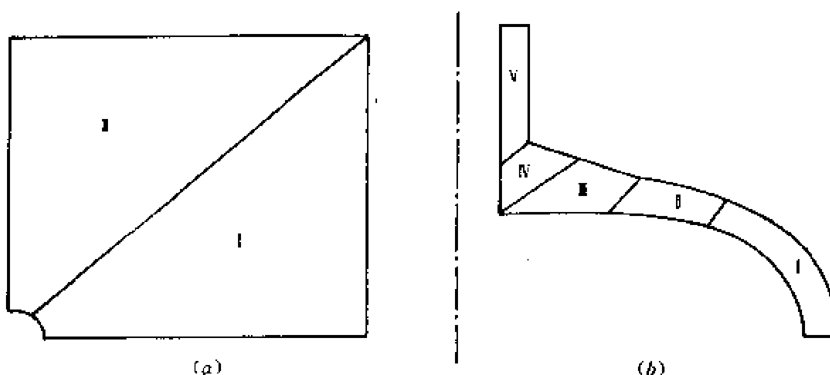
```
C
      CALL STRESS(NE,NT,A1,A2,V,IA(1),C(N2),C(N4))
      WRITE(*,125)
  125 FORMAT(/10X,'##### STRESS PASSED   #####')
      NX1=NX1-1
      IF(NX1.GT.0) GOTO 80
      GOTO 10
      END
```

7.3 网格生成技术

前处理程序的主要功能就是提供给程序使用者一种工具，能方便地将有限元分析的计算模型进行网格划分，得到离散模型的有关数据，例如结点数、结点编码、结点坐标，以及单元数，单元结点编码等。对上一节的平面问题3结点有限元分析程序来说则是对各种平面问题的分析对象划分合理的网格并自动形成结点数 NG，单元数 NE，结点坐标 XY(2,NG)及单元编码 IJM(3,NE)数组等。不具备这部分功能的有限元分析程序很困难用于实际问题的分析。网格生成的方便程度是有限元分析程序使用性能的重要标志之一。

网格生成的方法很多，各有长处。现以二维问题为例，介绍一种网格生成的方法——几何分区生成法，以示启迪。

图 7.8 中所示为二个二维有限元分析实例：带孔矩形板(二向对称，取 1/4 作计算模型)和压力容器封头接管，它们的外形轮廓可按几何特征划分成若干区，如梯形区、不同心圆弧区、圆弧-直边区等，见图 7.8(*a*)和(*b*)。这种特点普遍存在于计算模型中，因此可以选择若干种典型的几何区，解决它们的网格生成及各几何区的连接问题，可较方便地对计算模型进行网格划分并得到相应的离散模型数据。



Ⅰ、Ⅱ为圆弧-直边区　　　　Ⅰ、Ⅱ为不同心圆弧区　Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ为梯形区

图 7.8　二维问题实例

(*a*) 带孔矩形板　(*b*) 压力容器封头接管

对二维问题，典型的几何区可选择为：梯形区、不同心圆弧区、直边-圆弧区及圆弧区

等四个几何区，见图 7.9。每个几何区当 4 个端点坐标及有关圆弧的半径和圆心坐标确定时，几何区便唯一确定，对几何区即可进行网格生成。

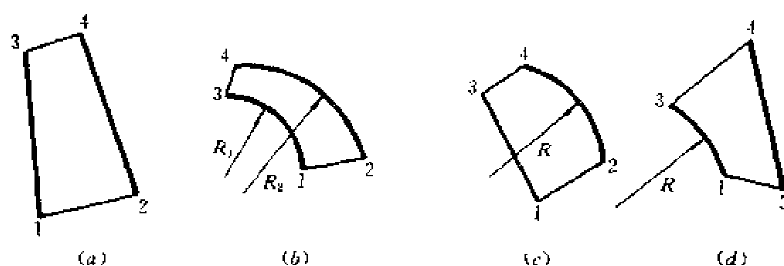


图 7.9　二维问题几何分区图

(a) 梯形区　(b) 不同心圆弧区　(c) 直边-圆弧区　(d) 圆弧-直边区

现以梯形区为例，单元采用 3 结点单元，说明网格形成的步骤和要求。

1. 沿几何区联结方向划分成线，线和线间供单元划分用，因此称单元条。布线应能等距分布亦应能变间距分布(如按等差方式分布)，以满足有限元分析不同部位精度的要求。布线就是在梯形区起始边界 1～3 及终止边界 2～4 上，按等分或等差分布等要求确定线的二个端点坐标，由一对对的端点坐标布线。

2. 在每条线上按要求布点，形成单元。布点同样要求等距或变间距。

3. 按一定顺序编结点码及单元码并累计形成结点坐标及单元编码坐标。

以上 1.2 过程见图 7.10(a)，(b)，形成的网格见 7.10(c)。

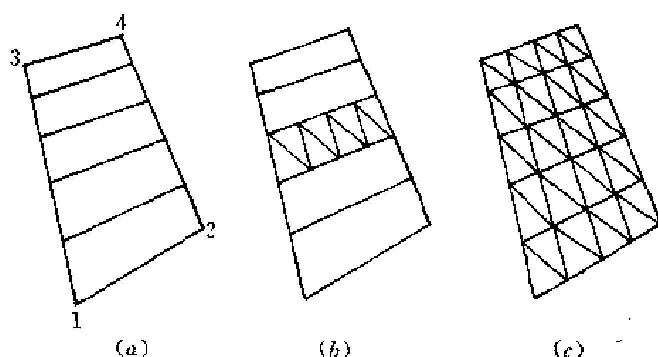


图 7.10　梯形区网格划分

(a) 沿几何区布线　(b) 线上布点形成单元　(c) 几何区网格图

其它几何区的网格生成都是同一的原理，只是确定布线的端点坐标采用相应的直线方程或圆方程来确定。

有了各几何区的网格生成方案后，还需解决各几何区的联结问题。联结方案也应从实际问题出发。一般可分为：

1. 前后二个几何区首尾结点相联，如图 7.11(a)所示。

2. 前后二个几何区非首尾结点相联(包括只有首结点或尾结点相联)，如图 7.11(b)所示。

其中首结点指图 7.9 中各几何区的 1、3 结点，尾结点指 2、4 结点。

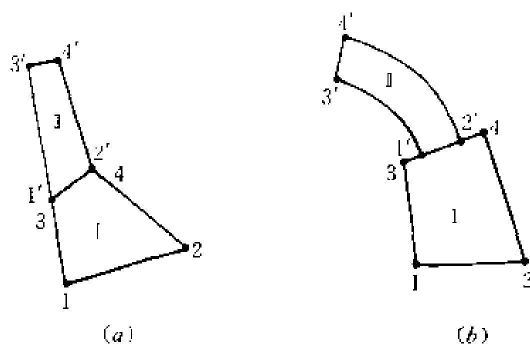


图 7.11　几何区的联结

(a) 二几何区首尾结点相联　(b) 二几何区非首尾结点相联

不同的几何区联结给出不同的信息。按组成计算模型的顺序，逐个几何区生成网格时后一几何区网格应在前一几何区网格生成的基础上进行，结点和单元的计数进行累计，其它有关数组的形成按序进行。图 7.8 中二个二维问题实例按几何分区生成法生成的 3 结点网格图见图 7.12。

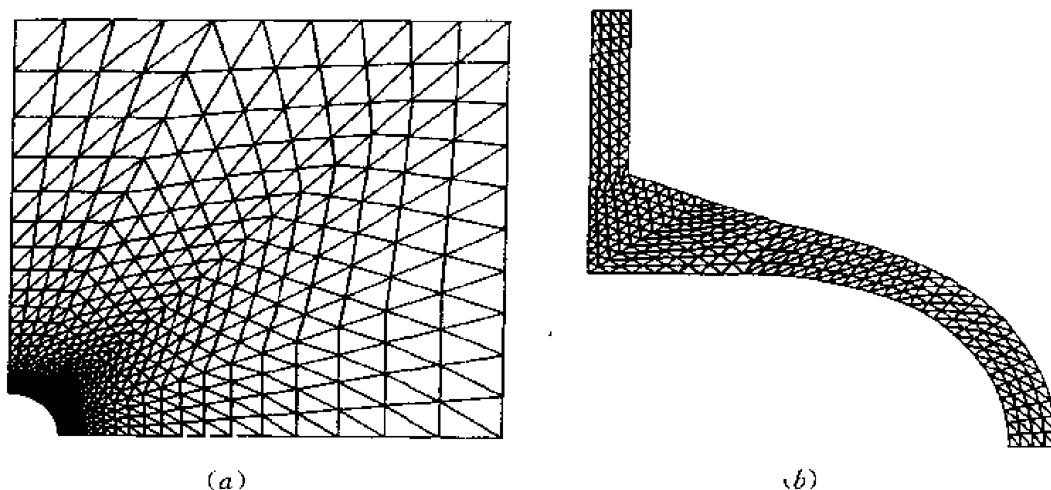


图 7.12　二维问题实例网格图

(a) 带孔矩形板　(b) 压力容器封头接管

这种几何分区网格生成法是一种半自动的网格生成技术，可通过人机交互控制网格的变化以适应有限元分析的要求。应当注意到，对于不同的单元，线上布点的要求是不同的。对于 3 结点单元线上的点还可增减，使单元布置更为合理；而对于 4～8 结点等参元来说一个几何区中单元条上的单元数通常不能改变，只有当几何区非首尾结点相联时，单元条上的单元数才能发生变化，单元的合理布置主要依赖结点的不等距分布。

几何分区网格的生成也可通过等参变换来实现，原理就是等参元的坐标插值。一般采

用二次单元作几何分区，即用二次抛物线近似计算模型的边界。利用给定中结点的位置可得到变间距的网格布置。图 7.13 为用等参变换得到的 4×4 网格，单元是 8 结点等参元。可以注意到由于几何区边界是二次曲线而使几何区内部划分的单元条和单元边都是二次曲线，这原本是不需要的，有时会给后处理，如应力处理等带来困难。

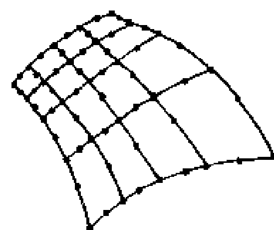


图 7.13 等参变换形成的网格

二维网格生成的原则同样可推广到三维网格的生成。对半自动网格生成要求程序的使用者有划分网格的经验。网格划分合理与否直接影响有限元分析的精度与求解速度，不合理的网格划分甚至导致有限元解的失败（完全背离真正解）。

对于一些专门的部件，可根据其明确的几何外形，编制网格全自动生成的前处理程序，使用者只需填写若干控制外形的尺寸，便可得到合理的网格划分及有关数据。例如在压力容器管道及海洋平台接头处常见的三通部件，是三维问题，外形如图 7.14(a)，给定半径、壁厚和联结型式后，可全自动生成网格，如图 7.14(b)所示为 1/4 三通的网格图。

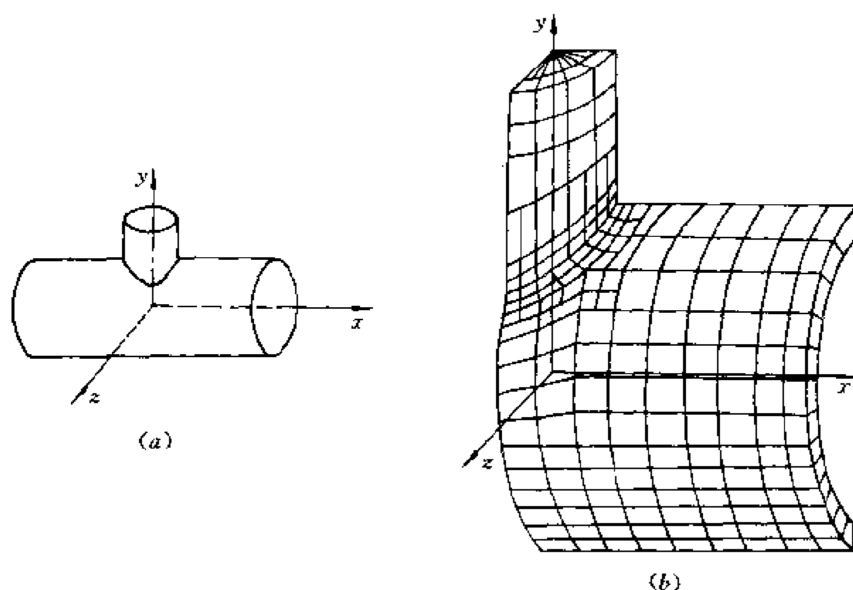


图 7.14 三通接管

(a) 外形 (b) 1/4 网格图

7.4 等值线的绘制

等值线通常能直观地反映场函数在域内的变化，如等温线、等应力线等。等值线分布密集的部位即场函数变化激烈的部位而且达到极值，这些部位一般都是有限元分析要注意的重点部位。由于等值线能直观地反映场函数的分布，因此应用极为广泛。

这里介绍一种简单而有效的等值线绘法，即线性插值扫描绘制法。

首先看了不论有限元求解时采用何种网格，在求得场函数结点值绘制等值线时可按3结点单元形成的网格。由于场函数的结点值已知，可用线性插值全域扫描的方法确定等值线。此方法认为每二个相邻结点间，场函数呈线性变化。下面介绍具体作法：

设场函数为ϕ。对某个特定单元，它的结点编号为1、2、3，相应的结点坐标为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，并有场函数的结点值ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3。绘制$\phi=\phi_0$的等值线时，等值线通过单元一条边的条件是：

$$(\phi_i-\phi_0)(\phi_j-\phi_0)<0 \qquad (i,j=1,2,3) \tag{7.4.1}$$

满足(7.4.1)式条件时，表示$\phi=\phi_0$的等值线穿过单元的ij边，等值线与ij边的交点k的坐标由下式确定：

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_i+(x_j-x_i)\frac{\phi_0-\phi_i}{\phi_j-\phi_i} \\ y_k &= y_i+(y_j-y_i)\frac{\phi_0-\phi_i}{\phi_j-\phi_i} \end{aligned}\right\} \quad (i,j=1,2,3) \tag{7.4.2}$$

显然当$\phi=\phi_0$等值线穿过单元的一条边时，必然穿过该单元的另一条边。

绘制$\phi=\phi_0$等值线时，应顺序对域内每个3结点单元进行扫描：

1. 确定该单元是否满足(7.4.1)式的条件，若不满足，则扫描下一单元。
   若满足则进入2，3
2. 按(7.4.2)式确定该单元边与等值线的交点坐标。
   一般情况下一个单元应有二个交点k和l。
3. 联结等值线的二个交点得到$\phi=\phi_0$等值线在该单元中的迹线。
4. 进行下一单元扫描。

显而易见当全部单元扫描一遍后，即可得到$\phi=\phi_0$全部等值线的图形，包括封闭型等值线(等值线不与外边界相交，自行封闭)和不封闭的等值线(等值线起始和终止于边界的)，无一遗漏。等值线在全域和单元上的示意图见图7.15。取等间隔的ϕ_0值就可得到反映函数场变化的等值线图。用线性插值全域扫描法得到的等值线是由一段段的直线联接

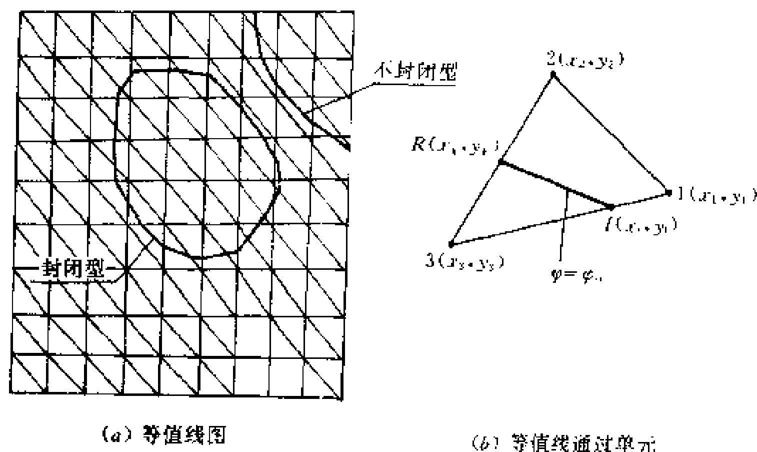


图7.15 用线性插值全域扫描法绘制的等值线

而成的。需要时可对这些等值线进行光滑化(用曲线拟合),但一般情况下当网格相当细时也能得到视觉效果很好的等值线。图 7.16 就是图7.8(a)中的中心带孔矩形板在拉伸情况下,采用图 7.12(a)的网格划分,用线性插值全域扫描法绘制的 σ_x 等应力线图。图形未经过光滑化处理但具有较好的视觉效果,明确地显示了孔边应力集中效应。

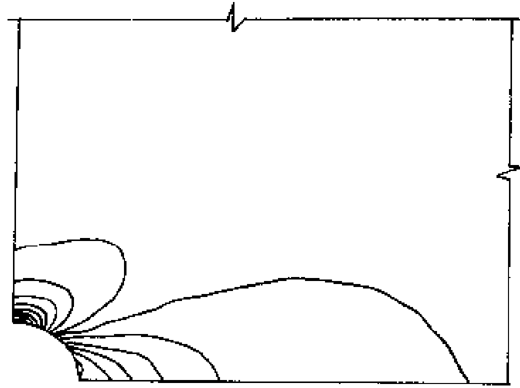


图 7.16 带孔矩形板拉伸状态下 σ_x 等应力线分布图

线性插值全域扫描法绘制等值线的方法与追踪法(见注)绘制等值线方法相比较,优点是明显的。它避免了用追踪法绘制等值线产生的难以解决的问题:封闭等值线的绘制和确定域内全部等值线的条数。

有了等值线图后若在等值线间填充以不同的颜色则可得到色带图,也是一种较好的图形显示。

这种线性插值全域扫描绘制等值线的方法如用于非 3 结点网格时,应将网格增加联线构成 3 结点网格后才能应用此法。

注:等值线的追踪绘法

追踪法采用非线性插值,等参变换的方法。考虑局部坐标 ξ,η,在单元每点上场函数由下式给出

$$\phi(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)a^e \qquad ①$$

其中:$N(\xi,\eta)$是插值函数矩阵。

a^e 是场函数 ϕ 在单元的结点值。

当绘制 $\phi=\phi_0$ 的等值线时,根据等值线的性质有

$$\frac{\partial \phi}{\phi \xi}d\xi + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}d\eta = 0 \qquad ②$$

其中当取 dL 作为追踪法绘等值线的步长,它的方向是沿等值线切向,则 $d\xi,d\eta$ 是 dL 的二个分量(见附图),它们是

$$\begin{aligned} d\xi &= dL\cos\alpha \\ d\eta &= dL\sin\alpha \end{aligned} \qquad ③$$

解方程②可得 $\mathrm{tg}\alpha$。

找到 $\phi=\phi_0$ 等值线上的某一点,确定步长 dL 后,可根据式②得到该点等值线的方向 $\mathrm{tg}\alpha$,沿 α 方向上取 dL 的长度可得到该等值线的第二个点。然后可重复上述过程由第 2 点找到第 3 点……,直至完成整条等值线的绘制。这种逐个由等值线上的一个点找到下一点的作法叫追踪法。

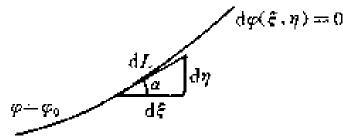
追踪法主要存在 3 个方面的问题

1. 对封闭型的等值线由于逐点寻找误差的累计,等值线有“漂移现象”。确定封闭条

件比较困难。

2. 找到一条新的等值线的起点并不容易，由于“漂移现象”找到的另一条等值线上的点，还可能是已追踪绘制的等值线上的点。

3. 难以判定是否已找全了域内所有 $\phi=\phi_0$ 的等值线。



附图 追踪法绘等值线

7.5 小　结

本章简单地介绍了有限元程序的组成和特点，并以平面问题程序为例介绍。主要编程技巧以及前后处理程序的要求。可以看到选择一个有限元分析程序，正如在本章引言中所指出，本章所讨论的内容，只是作为引导读者学习有限元程序的结构和特点以及各主要组成部分所涉及问题的入门。除本体程序要正确，能满足解题要求外，选择带有良好使用性能的前、后处理程序是十分重要的。

应予注意的是，近年来前后处理程序各方面开发势头很猛，主要有以下几方面：

1. 许多高级语言丰富了。图形表达能力；采用不同语言混合编程，如 FORTRAN 语言和 C 语言，各取所长，FORTRAN 语言主要用于科学计算，C 语言主要用于图形显示和人机交互界面设计。

2. 与新型软件平台相联接，如 ACAD、Windows，丰富程序的表现力。

3. 向智能化方向发展。如网格划分与有限元分析误差分析结合，当误差达不到指定的控制要求时，自动修正网格或采用不同精度的阶谱单元以满足精度要求；后处理方面能提供自动形成有限元分析的图文并茂的报告等。

这些无疑会使有限元分析程序的使用性能得到进一步的提高和改进，更有利于这个卓有成效的数值分析方法，不仅在科研方面而且在实际生产中得到更广泛的应用。

第8章 有限单元法的进一步基础——广义变分原理

8.1 引 言

通过以前各章的讨论，我们已经知道变分原理是有限单元法的重要理论基础。但是所涉及的仅是场变量已事先满足附加条件的自然变分原理。例如最小位能原理中的场函数——位移，事先应满足几何方程（应变和位移关系）和给定位移的边界条件。当用于二维、三维弹性力学问题的有限元分析时，位移还应满足在单元交界面上连续的条件。最小余能原理中的场函数——应力，事先应满足平衡方程和给定力的边界条件，当用于二维、三维弹性力学问题的有限元分析时，则应力还应满足在单元交界面上使内力保持连续的条件。利用自然变分原理的好处是通常仅保留一个场函数，同时泛函具有极值性。在场函数能事先满足所要求的附加条件时，当然乐于采用。这正是我们在以前各章的讨论中所看到的，在二维、三维问题的有限元分析中广泛采用基于属于自然变分原理的最小位能原理的实体单元的主要原因。

实际上，有相当多的物理或力学问题，如采用自然变分原理，要求它所对应泛函中的场函数事先满足全部附加条件往往不易做到。例如对于固体力学板壳问题，由于对应于此问题的最小位能原理的泛函中包含场函数——挠度的二阶导数，因此要求挠度函数事先不仅要满足单元交界面上挠度自身的连续条件，而且要满足交界面上挠度法向导数的连续条件，这就是一个比较棘手的问题。

约束变分原理，亦即广义变分原理所研究的就是如何利用适当的方法将场函数应事先满足的附加条件引入泛函，使有附加条件的变分原理变成无附加条件的变分原理。仍以前面所述板壳问题的有限元分析为例，广义变分原理中通过利用适当的方法将附加条件引入泛函，而不再要求挠度函数事先满足单元交界面上法向导数连续的条件，以使得问题的求解比较方便。其他如不可压缩连续介质力学问题，不同介质的耦合问题、不同类型结构或单元的联结问题等都常常依赖于利用广义变分原理作为分析的理论基础。

本章在8.2节讨论约束变分原理的一般理论、方法和特点；8.3节讨论约束变分原理在弹性力学问题中的应用，即导出弹性力学各种形式的广义变分原理；8.4节讨论约束变分原理在有限元分析中关于放松单元交界面上连续条件方面的应用，从而导出弹性力学各种变分原理的修正形式。整章内容安排的目的在于为建立各种有限单元法格式、扩大它的应用领域提供进一步的理论基础。

8.2 约束变分原理

在第1章的内容中我们已知对于一给定的微分方程和边界条件，在建立了对应的自

然变分原理后，问题的解答就是使泛函 Π 取驻值。但是未知函数 $\boldsymbol{u}$ 往往还要服从一些附加条件，我们可将这种变分原理称为“具有附加条件的变分原理”。现在讨论另一做法，就是将附加条件引入泛函，重新构造一个“修正泛函”，把问题转化为求修正泛函的驻值问题。此时未知函数 $\boldsymbol{u}$ 不需要服从已引入修正泛函的附加条件。这种引入附加条件构造修正泛函的变分原理叫作“约束变分原理”，又可称为“没有附加条件的变分原理”或“广义变分原理”。

引入附加条件构造修正泛函常用的方法有拉格朗日乘子法和罚函数法。下面分别介绍这两种方法。

8.2.1 拉格朗日乘子法

首先考虑将使泛函 Π 取驻值的问题，并且未知函数 $\boldsymbol{u}$ 还需服从附加的约束关系

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{8.2.1}$$

这时引入这些附加条件构造另外一个泛函

$$\Pi^* = \Pi + \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Omega \tag{8.2.2}$$

其中 Π 是未知函数 $\boldsymbol{u}$ 必须服从附加条件(8.2.1)式时的泛函；$\boldsymbol{\lambda}$ 是 Ω 域中一组独立坐标的函数向量，称为拉格朗日乘子；Π^* 称作修正泛函。在引入附加条件后，原泛函 Π 的有附加条件驻值问题转化为修正泛函 Π^* 的无附加条件驻值问题。Π^* 的驻值条件是它的一次变分等于零

$$\delta^* \Pi = \delta\Pi + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{8.2.3}$$

用类似的方法也可以在域内某些点或边界上引入附加条件。例如要求 $\boldsymbol{u}$ 服从

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \tag{8.2.4}$$

我们可以将积分

$$\int_\Gamma \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Gamma \tag{8.2.5}$$

引入原来的泛函。其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 只是定义于边界 Γ 上的未知函数。假如附加条件 $\boldsymbol{C}$ 仅在体系的一个或若干个点上被满足，那么只需要在这些点上简单地将 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{u})$ 引入泛函即可。

为了说明概念，先讨论一个函数具有附加条件时的驻值问题。有二次函数

$$z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 18x + 6y \tag{a}$$

变量 x 和 y 服从附加条件

$$x - y = 0 \tag{b}$$

现求使 z 取驻值的 x 和 y 值。

最简单的方法是将(b)式代入(a)式，消去一个非独立的变量，例如消去 y，得到

$$z = x^2 + 24x \tag{c}$$

此时函数 z 不再具有附加条件，使 z 取驻值的 x 值可由其一阶导数为零求得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x + 24 = 0 \qquad x = -12 \tag{d}$$

由附加条件(b)可知 $x = y = -12$。由(c)式可求得 z 取驻值时的值为 -144，又因为

$d^2z/dx^2=2\geqslant 0$，所以 $z=-144$ 是极小值。

对于一般情况，有时附加条件（例如微分关系）不能将 y 表示成 x 的显式，此时就不能简单地利用附加条件消去非独立的变量，可以用拉格朗日乘子将附加条件(b)引入函数(a)，得到修正函数。此时

$$z^* = z + \lambda(x-y) - 2x^2 - 2xy + y^2 + 18x + 6y + \lambda(x-y) \qquad (e)$$

式中三个变量 x、y、λ 都是独立的。现用拉格朗日乘子 λ 引入附加条件，使原来求有附加条件函数 z 的驻值问题，转化为求无附加条件的修正函数 z^* 的驻值问题。z^* 的驻值条件是

$$\frac{\partial z^*}{\partial x} = 4x - 2y + \lambda + 18 = 0;\quad \frac{\partial z^*}{\partial y} = -2x + 2y - \lambda + 6 = 0;\ \frac{\partial z^*}{\partial \lambda} = x - y = 0 \qquad (f)$$

求解上述联立方程组，同样可得正确的解答

$$x = y = -12, \qquad \lambda = 6$$

由上面过程可以看到，直接使用拉格朗日乘子法会遇到两个问题：

(1) 方程组的阶数随附加条件数的增加而增加，从而增加了计算工作量。

(2) $\partial z^*/\partial\lambda$ 得到的是附加条件，其中必然不包含 λ，因此方程组(f)的系数矩阵就必定存在 0 对角元素，不能简单地用普通的消去法求解。

克服上述困难的方法是利用(f)中的第一或第二式消去修正泛函 Π^* 中的 λ，得到另一个修正函数

$$\bar{z}^* = 2xy - y^2 + 24x \qquad (g)$$

它的驻值条件是

$$\frac{\partial \bar{z}^*}{\partial x} = 2y + 24 = 0 \quad \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \qquad (h)$$

仍然解得正确答案 $x=y=-12$

还应指出，当利用拉格朗日乘子法求解有附加条件的函数驻值问题时，修正函数不再保持原函数在驻值点的极值性质。上例中原函数 z 在驻值点($x=y=-12$)是极小值。修正函数 z^* 或 $\bar{z}^*$ 是否仍取极值要看它们的二次型矩阵是否保持正定（或负定）性。在驻值点，若函数的二次型矩阵是正（负）定的，则函数取极小（极大）值。

判定二次型矩阵正（负）定的方法是：

若有函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0$$

引入函数的二阶导数值

$$f''x_ix_j(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) = a_{ij} \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

式中 $x_i^0(i=1,2,\cdots,n)$ 是函数 f 的驻值点坐标。二次型矩阵为正定的必要且充分条件是

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\cdots,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

对于负定二次型则应有

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

在此例题中，二次型矩阵就是一次偏导数方程组(f)和(h)的系数矩阵。

z^* 的二次型矩阵有

$$4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

$\bar{z}^*$ 的二次型矩阵有

$$2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

它们既非正定又非负定，所以 z^* 和 $\bar{z}^*$ 在驻值点不可能取极值。

对于约束变分原理，用拉格朗日乘子构造的修正泛函包括两部分未知量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$，都需要用试探函数构造它们的近似解。例如

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \sum \boldsymbol{N}_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}; \quad \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \sum \tilde{\boldsymbol{N}}_i \boldsymbol{b}_i = \tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{b} \tag{8.2.6}$$

修正泛函变分为零得到一组方程

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{c}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{a}} \\ \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{b}} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{c} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{Bmatrix} \tag{8.2.7}$$

由方程可解得二组参数 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$。可以看到约束变分导致待定参数的增加，因而带来了求解的复杂性。

假如原泛函 Π 的欧拉方程是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \tag{8.2.8}$$

附加条件是线性微分方程组

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{0} \tag{8.2.9}$$

将(8.2.6)、(8.2.8)和(8.2.9)式一并代入(8.2.3)式，则得到

$$\begin{aligned} \delta \Pi^* = & \delta \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \int_\Omega \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}) \mathrm{d}\Omega + \delta \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{L}_1(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{C}_1] \mathrm{d}\Omega \\ & + \delta \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \int_\Omega \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}) \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \mathrm{d}\Omega = 0 \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

因为上式对于所有变分 $\delta \boldsymbol{a}$ 和 $\delta \boldsymbol{b}$ 都必须成立，所以得到

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}) \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \mathrm{d}\Omega = 0 \\ & \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{L}_1(\tilde{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{C}_1] \mathrm{d}\Omega = 0 \end{aligned} \tag{8.2.11}$$

(8.2.11)式中第一式的第一项就是线性方程组 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ 自然变分的近似方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} \tag{8.2.12}$$

整个方程组(8.2.11)式可以写成

$$K_0 c + R = \begin{bmatrix} K & K_{ab} \\ K_{ab}^{T} & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} = 0 \tag{8.2.13}$$

其中：

$$\begin{aligned} K_{ab}^{T} &= \int_{\Omega} \tilde{N}^{T} L_1(N) \mathrm{d}\Omega \\ Q &= \int_{\Omega} \tilde{N}^{T} C_1 \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{8.2.14}$$

显然方程组的系数矩阵 K_c 仍然是对称的，但在主对角线上必然存在零元素。修正泛函 Π^* 的变分仅使 Π^* 取驻值。主对角线上存在零元素时将不能用通常的直接解法求解。

与求函数驻值问题类同，我们也可以利用(8.2.3)式 $\delta\Pi^*=0$ 所得到的 u 和 λ 的关系(由此关系还可识别拉格朗日乘子 λ 自身的物理意义)，再代入修正泛函，使修正泛函中只包含未知函数 u。以后的计算就和自然变分原理完全相同了。现在仍以二维热传导问题为例说明这种做法。

对于用(1.2.3)式和(1.2.4)式表示的二维稳态热传导问题，在1.3.2节中建立了它的自然变分原理，求近似解时假定试探函数 $\bar{\phi}$ 在边界 Γ_ϕ 上满足强迫边界条件 $\phi=\bar{\phi}$，因此是具有附加条件的变分。现在我们可以把此附加条件引入泛函，从而得到修正泛函

$$\Pi^* = \Pi + \int_{\Gamma_\phi} \lambda(\phi - \bar{\phi}) \mathrm{d}\Gamma \tag{8.2.15}$$

式中 Π 由(1.3.30)式给出。上式的变分是

$$\delta\Pi^* = \delta\Pi + \int_{\Gamma_\phi} \delta\lambda(\phi - \bar{\phi}) \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_\phi} \lambda\delta\phi \mathrm{d}\Gamma \tag{8.2.16}$$

将(8.2.16)式分部积分可得

$$\begin{aligned} \delta\Pi^* = &\int_{\Omega} \left(-k\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - Q \right) \delta\phi \mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_q} \left(k\frac{\partial\phi}{\partial n} - \bar{q} \right) \delta\phi \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_\phi} \delta\lambda(\phi - \bar{\phi}) \mathrm{d}\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_\phi} \delta\phi \left(\lambda + k\frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \mathrm{d}\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{8.2.17}$$

上式对于所有的 $\delta\lambda$ 和 $\delta\phi$ 都成立，由前二式得到的是原问题的微分方程和边界 Γ_q 上的边界条件，由最后二个边界 Γ_ϕ 上的积分可以得到

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \qquad \text{在 } \Gamma_\phi \text{ 上} \tag{8.2.18}$$

$$\lambda + k\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n} = 0 \quad \text{即 } \lambda = -k\frac{\partial\phi}{\partial n} \quad \text{在 } \Gamma_\phi \tag{8.2.19}$$

前一式就是引入的附加条件。从后一式看到可以用 $-k(\partial\phi/\partial n)$ 来表示 λ，因为在边界上 $k(\partial\phi/\partial n)$ 等于热流，因此可知算子 λ 的物理意义是边界热流取负值。将(8.2.19)式回代到(8.2.15)式，得到新的修正泛函

$$\Pi^* = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - Q\phi \right] \mathrm{d}\Omega$$

$$-\int_{\Gamma_q} \phi \bar{q} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_\phi} k \frac{\partial \phi}{\partial n}(\phi - \bar{\phi}) \mathrm{d}\Gamma \tag{8.2.20}$$

在此修正泛函中拉格朗日乘子 λ 已不再出现。如用上式求近似解，近似函数可以不必再考虑 Γ_ϕ 边界上满足 $\phi=\bar{\phi}$ 的要求，而且保持原来的待定参数的数目，对计算有利。但是这时边界项中出现了 ϕ 的非平方二次项，这样一来，泛函将不再具有极值性，即在真正解附近，泛函仅保持为驻值。

8.2.2 罚函数法

仍然考虑在 Ω 域内具有附加条件 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u})=0$ 的泛函 Π 的驻值问题。附加条件的乘积是

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = C_1^2 + C_2^2 + \cdots \tag{8.2.21}$$

这里

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = [C_1 \quad C_2 \quad \cdots]$$

(8.2.21)式必然得到一个正值或者是零，当附加条件都得到满足时乘积为零。显然变分

$$\delta(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}) = 0 \tag{8.2.22}$$

乘积将是最小。

我们可以利用罚函数将附加条件以乘积的形式引入泛函

$$\Pi^{**} = \Pi + \alpha\int_\Omega \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega \tag{8.2.23}$$

其中 α 称为罚数，若 Π 本身是解的极小值问题，α 取正数。由修正泛函得到的近似解只是近似地满足附加条件，α 值越大，附加条件的满足就越好。

为了便于说明问题，我们仍以拉格朗日乘子法中的二次函数为例进行讨论。用罚函数构造的修正函数为

$$z^{**} = 2x^2 - 2xy + y^2 + 18x + 6y + \alpha(x-y)^2 \tag{i}$$

对于 z^{**}，取驻值的条件为

$$\frac{\partial z^{**}}{\partial x} = 4x - 2y + 18 + 2\alpha(x-y) = 0 \tag{j}$$

$$\frac{\partial z^{**}}{\partial y} = -2x + 2y + 6 - 2\alpha(x-y) = 0$$

解方程组得到

$$x = -12, \qquad y = \frac{-12 - 15/\alpha}{1 + 1/\alpha} \tag{k}$$

显然，当 $\alpha \to \infty$，$y \to -12$，即趋近精确解。收敛情况可由下表说明

表 8.1

α	1	2	5	10	100	1000
x	−12.0000	−12.0000	−12.0000	−12.0000	−12.0000	−12.0000
y	−13.5000	−13.1667	−12.5000	−12.2727	−12.0297	−12.0030

可以看到，利用罚函数求解条件驻值问题不增加未知参量的个数，并且不改变驻值的性质。若原来的函数取极值，那么用罚函数法构造的修正函数仍取极值。上述二次函数

z^{**}的二次型矩阵的顺次主子式分别是

$$a_{11} = 4 + 2a > 0 \tag{l}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 + 2a & -2 - 2a \\ -2 - 2a & 2 + 2a \end{vmatrix} = 4a + 4 > 0 \tag{m}$$

所以修正函数 z^{**} 在驻值点仍保持函数 z 的极小性质。

利用罚函数法求解条件驻值问题时，还需特别注意一个关键问题，它将决定罚函数法是否收敛于真正解。我们把方程组(j)改写成矩阵形式

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 2\alpha\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18 \\ -6 \end{Bmatrix} \tag{n}$$

可以看到与 α 相关的矩阵必须是奇异的(即行列式为零)，以保证 $\alpha \to \infty$ 时，能得到非零解。非零解是该矩阵的特征向量，现在的情况下此向量的意义就是附加条件即 $x = y$。

对于一般的线性代数方程组，方程的某个系数稍有变化时，对解答的影响是不大的。但(n)式中与 α 相关的矩阵系数如稍有变化，将使之失去奇异性，从而给解答带来很大影响。α 越大影响就越大，甚至最后导致完全失败(即得到零解)。现在我们将(n)式中与 α 相关的矩阵的下对角元素改为 1.1，从下表可见随 α 增大，解答变化的情况。

表 8.2

α	1	10	100	1000	10000
x	−10.8261	−6.1304	−1.1646	−0.1276	−0.0129
y	−11.1739	−5.8696	−1.0839	−0.1187	−0.0120

从表 8.2 可见，随着罚数 α 的逐步增大，x，y 的解逐步减小。当 α 趋于无穷时，x，y 将趋于 0。这是与罚数相关的系数矩阵不具有奇异性时必然出现的现象。究其原因可以作如下解释。当 α 趋于无穷时，求解方程(n)式可以近似地表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\alpha}\begin{Bmatrix} -18 \\ -6 \end{Bmatrix} \approx 0 \tag{o}$$

由于方程的系数矩阵是奇异的，所以可以有非零解。具体解是通过求解上述特征值问题得到

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = A\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{p}$$

式中$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$是原系数矩阵的特征向量，$A$ 是任意常数，它的具体数值通过原方程(n)式决定。如果系数矩阵失去了奇异性，例如以上所假设的情况，系数矩阵的下对角元素改为 1.1，则当罚数 α 趋于无穷时，方程只可能得到零解。因此，保持与罚函数相关的系数矩阵的奇异性对采用罚函数法求解的成败有决定性的影响。这是采用罚函数法时需要特别注意的。

还应指出的是在实际计算中罚数 α 不可能取得无穷大，而只能取为较大的有限值。这是因为实际计算不是先求解特征值问题，然后再求解原方程，而是直接求解原方程。当罚函数取得过大时，方程已病态，而使求解失败。因为实际计算中、罚函数只能取有限值，所

以利用罚函数法求解只能得到近似解。

现在再回到约束变分问题。我们以梁的弯曲问题为例来阐明罚函数法的应用。梁的弯曲问题通常可表示为以下泛函

$$\Pi = \int_0^l \frac{EI}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^l wq\mathrm{d}x \tag{8.2.24}$$

的驻值问题。其中 E 是弹性常数，I 是梁截面的惯性矩，w 是梁中心线的挠度，q 是分布载荷。因为在泛函 Π 中出现 w 的二次导数，所以要求试探函数具有 C_1 连续性。为了降低对试探函数连续性的要求，我们可以把(8.2.24)式表为另一形式

$$\Pi = \int_0^l \frac{EI}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^l wq\mathrm{d}x \tag{8.2.25}$$

其中 θ 是梁截面的转角。在(8.2.25)式中把挠度 w 和截面转角 θ 看作是泛函中的两个独立的未知场函数，但是它们应服从附加条件

$$\boldsymbol{C}(w,\theta) \equiv \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \theta = 0 \tag{8.2.26}$$

现在由于泛函中只出现 θ 的一次导数，所以 w 和 θ 只要具有 C_0 连续性就可以了。

我们用罚函数法将附加条件(8.2.26)引入泛函，将问题转化为无附加条件的泛函驻值问题。得到约束变分原理的修正泛函是

$$\Pi^{**} = \Pi + \alpha\int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \theta\right)^2 \mathrm{d}x \tag{8.2.27}$$

从材料力学知识，可知上式中的附加罚函数项可以代表剪切应变能。只要将 α 选择为剪切刚度的二分之一，即令 $\alpha=\frac{k}{2}GA$，其中 G 是材料的剪切模量，A 是梁的截面积，k 是考虑实际剪切应变在截面上并非均匀分布而引入的校正因子(这在下一章中将进一步解释)，则附加项代表剪切应变能。当截面较高时，附加项的引入正是考虑剪切变形对梁挠度影响的实际需要。而当梁截面高度很小时，即 $h/l \ll 1$ 时，剪切变形的影响可以忽略，即应假设 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta=0$。采用上述 α 的取值，正是使附加项成为罚函数项所要求。这可以通过比较修正泛函 Π^{**} 中前后二项的数量级而认识到。前项是$\frac{EI}{l^2}$量级，后项是 GA 量级，所以后项/前项$\propto (GA)/\left(\frac{EI}{l^2}\right) \propto \frac{l^2}{h^2} \gg 1$。因此后一项确实起到了罚函数的作用。当$\frac{l^2}{h^2}\to\infty$，则被约束的条件$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta\to 0$，即解答趋于经典梁理论的精确解。

这种通过将挠度和转动分别独立插值，再利用罚函数法将约束条件引入泛函，从而使原来的 C_1 型问题转化为 C_0 型问题的做法，在以后杆件、板、壳各章中加以应用和推广。再如研究不可压缩固体$\left(\nu=\frac{1}{2}\right)$问题时，也可以通过罚函数法将不可压缩的约束条件引入泛函。

在应用罚函数法求解实际问题时，也出现一定的困难。首先约束泛函(8.2.23)式变分时结果将导致下列形式的求解方程

$$(\boldsymbol{K}_1 + \alpha\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} \tag{8.2.28}$$

其中 $\boldsymbol{K}_1$ 是从原泛函导出的，而 $\alpha\boldsymbol{K}_2$ 是从附加的罚函数项导出的。当 α 无穷增大时，上列方程将退化为

$$\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{a} \approx \frac{\boldsymbol{P}}{\alpha} \to \boldsymbol{0}$$

除非 $\boldsymbol{K}_2$ 是奇异的，否则只能得到零解，即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。但是这种奇异性并非总是自然出现的。例如在(8.2.27)式表示的泛函中，若 w 和 θ 采用同阶的试探函数，同时与罚函数项相关的积分采用精确积分，则最后求解方程中的 $\boldsymbol{K}_2$ 矩阵就是非奇异的。因此在利用罚函数法求解问题时，为保证 $\boldsymbol{K}_2$ 的奇异性必须采用专门的措施，这将在以后有关章节中进一步具体讨论。

其次，如以前已指出，企图将 $\alpha\to\infty$ 以得到精确解也是不可能的。因为当 α 增至相当大但仍保持为有限值时，已造成方程的病态，所以在实际计算中只能将 α 控制在一定的范围内。如何恰当地选择罚数 α 的大小是利用罚函数法将附加条件引入泛函时的一个不易掌握的问题。原则上是应使由于罚数为有限值导致附加条件未能精确满足所引起的误差与计算中的其他误差(如离散误差、截断误差等)结合起来为最小。实际上通常需要根据具体问题的特点和计算机字长等因素通过试算来决定，一般情况下使 $\alpha\boldsymbol{K}_2$ 的主元比 $\boldsymbol{K}_1$ 的主元大 $10^4\sim10^5$ 量级，常可取得较好的结果。

8.3 弹性力学广义变分原理

本节是将上节讨论的约束变分原理应用于弹性力学问题。首先从场函数事先应满足一定附加条件的最小位能原理出发，利用拉格朗日乘子法将附加条件引入泛函，导出无约束条件的广义变分原理。

8.3.1 胡海昌-鹫津久原理(简称 H-W 变分原理)

现在考虑的场函数不要求事先满足几何方程和位移边界条件，此时系统的总位能是相互独立的场函数 u_i 和 ε_{ij} 的泛函。利用拉格朗日乘子将附加条件(1.4.26)式和(1.4.36)式引入泛函，修正泛函可以表示为

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathrm{H-W}} = &\Pi_p(u_i,\varepsilon_{ij}) + \int_V \lambda_{ij}\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\mathrm{d}V \\ &+ \int_{S_u} p_i(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

其中 λ_{ij} 和 p_i 分别是 V 域内和 S_u 边界上的拉格朗日乘子，它们是独立坐标 x_i 的任意函数。修正泛函 $\Pi_{\mathrm{H-W}}$ 的变分

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\mathrm{H-W}} = &\int_V \Big\{\delta\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \delta u_i\bar{f}_i + \delta\lambda_{ij}\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right] \\ &+ \lambda_{ij}\left[\delta\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\right]\Big\}\mathrm{d}V \\ &- \int_{S_\sigma}\delta u_i\bar{T}_i\mathrm{d}S + \int_{S_u}[\delta p_i(u_i-\bar{u}_i)+p_i\delta u_i]\mathrm{d}S = 0\end{aligned}$$

对上式体积分中最后一项 $\lambda_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})$ 进行分部积分，则上式可改写为

$$\delta \Pi_{\mathrm{H-W}} = \int_V \left\{ \delta\varepsilon_{ij}(D_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \lambda_{ij}) + \delta u_i(\lambda_{ij,j} - \overline{f}_i) + \delta\lambda_{ij}\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\right\}\mathrm{d}V$$

$$- \int_{S_\sigma} \delta u_i(\lambda_{ij}n_j + \overline{T}_i)\mathrm{d}S$$

$$+ \int_{S_u} [\delta u_i(p_i - \lambda_{ij}n_j) + \delta p_i(u_i - \overline{u}_i)\mathrm{d}S = 0 \tag{8.3.2}$$

因为所有的变分 $\delta\varepsilon_{ij}$、δu_i、$\delta\lambda_{ij}$、δp_i 都是独立的，因此 $\Pi_{\mathrm{H-W}}$的驻值条件是

$$D_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\lambda_{ij}=0 \quad 在 V 域 \tag{8.3.3}$$

$$\lambda_{ij,j}-\overline{f}_i=0 \quad 在 V 域 \tag{8.3.4}$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0 \quad 在 V 域 \tag{8.3.5}$$

$$\lambda_{ij}n_j+\overline{T}_i=0 \quad 在 S_\sigma 上 \tag{8.3.6}$$

$$p_i-\lambda_{ij}n_j=0 \quad 在 S_\sigma 上 \tag{8.3.7}$$

$$u_i-\overline{u}_i=0 \quad 在 S_u 上 \tag{8.3.8}$$

由(8.3.3)式和(8.3.7)式可以识别拉格朗日乘子 λ_{ij}和 p_i 的力学意义分别是应力 σ_{ij}和边界力 T_i(取负值)，即

$$\lambda_{ij} = - D_{ijkl}\varepsilon_{kl} = - \sigma_{ij} \tag{8.3.9}$$

$$p_i = \lambda_{ij}n_j = - \sigma_{ij}n_j = - T_i \tag{8.3.10}$$

将此结果回代到驻值条件中，除(8.3.7)式外，得到了弹性力学的全部微分方程和边界条件。将(8.3.9)和(8.3.10)式代入(8.3.1)式，则修正泛函可表示为

$$\Pi_{\mathrm{H-W}}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}) = \int_V \left\{\frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \overline{f}_i u_i - \sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\right\}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}\overline{T}_i u_i\mathrm{d}S - \int_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i - \overline{u}_i)\mathrm{d}S \tag{8.3.11}$$

将新的泛函取名为 $\Pi_{\mathrm{H-W}}$是因为此变分原理是由胡海昌(在 1954 年)和鹫津久(K. Washizu 在 1955 年)各自独立提出的。需要注意的是：

(1) 此变分原理中 u_i、ε_{ij}、σ_{ij}都是独立的场函数，它们的变分是完全独立的，没有任何附加条件。如果我们把几何方程(1.4.26)和位移边界条件(1.4.36)仍取作场函数必须服从和满足的附加条件，则修正泛函 $\Pi_{\mathrm{H-W}}$将还原为 Π_p。

(2) 此变分原理是驻值原理而不再是极值原理。

(3) 此变分原理是用拉格朗日乘子法建立的约束变分原理，原来泛函中由 u_i 表示的 ε_{ij}成为独立的场变量，较原问题增加的场变量 σ_{ij}就是拉格朗日乘子。

8.3.2 Hellinger-Reissner 变分原理(简称 H-R 变分原理)

如果认为在泛函 $\Pi_{\mathrm{H-W}}$中，场函数 ε_{ij}和 σ_{ij}不是互相独立的，即服从物理方程，那么我们可以用(1.4.32)式将(8.3.11)式中的应变项用应力项表示，则其中的

$$\frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=-\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}=-V(\sigma_{ij}) \tag{8.3.12}$$

这样就得到新的泛函

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{H-R}}(u_i,\sigma_{ij})=&\int_V\left[\sigma_{ij}\cdot\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\overline{f}_iu_i\right]\mathrm{d}V\\&-\int_{S_\sigma}\overline{T}_iu_i\mathrm{d}S-\int_{S_u}T_i(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}S\\=&\int_V\left[\sigma_{ij}\cdot\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-V(\sigma_{ij})-\overline{f}_iu_i\right]\mathrm{d}V\\&-\int_{S_\sigma}\overline{T}_iu_i\mathrm{d}S-\int_{S_u}T_i(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.3.13}$$

这就是 Hellinger-Reissner 变分原理。泛函中变分的独立场变量是 u_i 和 σ_{ij}。H-R 变分原理是没有附加条件的约束变分原理，同样也是驻值原理而不是极值原理。由于独立场场变量有位移也有应力，故亦称混合变分原理。

8.3.3 最小余能原理

对(8.3.13)式进行分部积分可以得到

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{H-R}}(u_i,\sigma_{ij})=&-\int_V[V(\sigma_{ij})+(\sigma_{ij,j}+\overline{f}_i)u_i]\mathrm{d}V\\&-\int_{S_\sigma}(\overline{T}-T_i)\mathrm{d}S+\int_{S_u}T_i\overline{u}_i\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.3.14}$$

如果选择的近似场函数 σ_{ij}满足平衡方程(1.4.24)和力的边界条件(1.4.33)，则上式中体积分的第二项以及给定力边界 S_σ 上的积分都为零，这样可以得到新的泛函

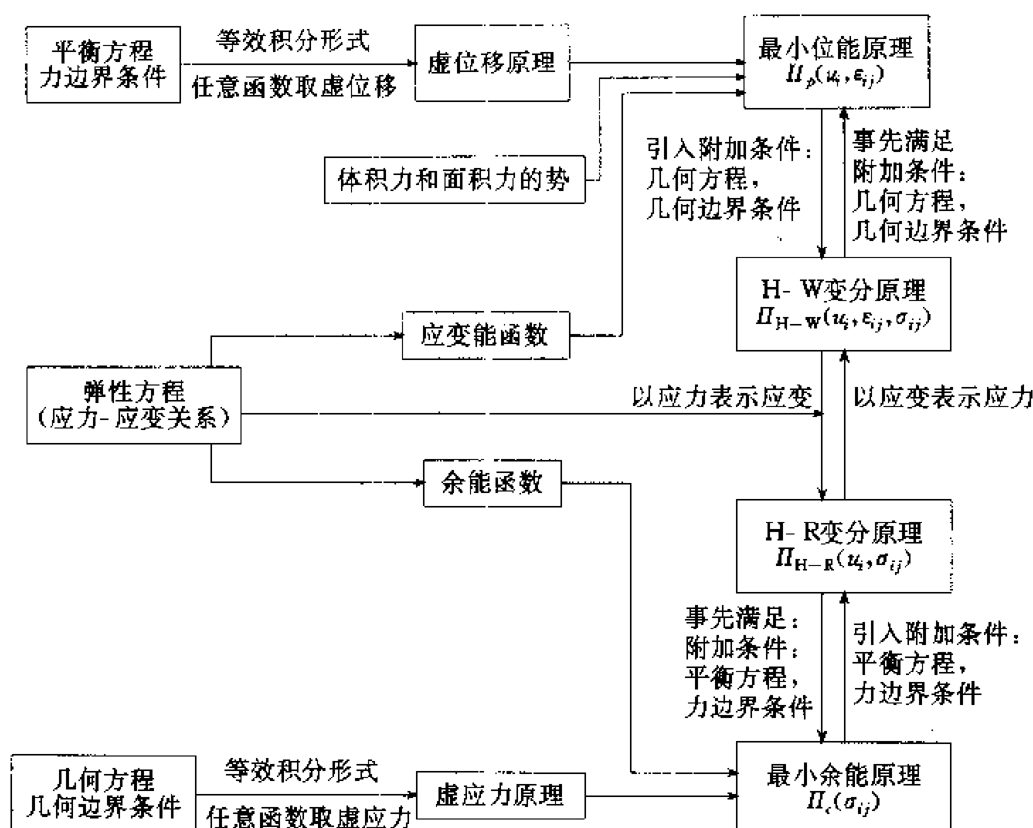
$$\begin{aligned}\Pi_c(\sigma_{ij})=&\int_V V(\sigma_{ij})\mathrm{d}V-\int_{S_u}T_i\overline{u}_i\mathrm{d}S\\=&\int_V\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\mathrm{d}V-\int_{S_u}T_i\overline{u}_i\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.3.15}$$

式中体积分代表弹性体的余能，它是正定函数。因此(8.3.15)式泛函的变分原理称为最小余能原理。最小余能原理可以叙述如下：在所有满足平衡方程和力的边界条件的应力中，真正解使总余能 Π_c 取最小值。

其实建立最小余能原理并不需要经过这样迂回的途径，正如我们在 1.4.4 节中已看到的，只要将物理方程(1.4.32)式代入虚应力原理(1.4.45)式就可以得到。但是这一迂回的过程说明，一经从虚位移原理出发建立了最小位能原理后，通过拉格朗日乘子引入附加条件，可将变分原理一般化，建立包括 Hellinger-Reissner 变分原理和最小余能原理在内的一系列变分原理。反之，从虚应力原理出发建立了最小余能原理后，也可以用类似的步骤得到包括胡海昌-鹫津久变分原理和最小位能原理在内的一系列变分原理。表 8.1 中给出了弹性小位移理论中各变分原理间的关系。

还需指出，最小位能原理和最小余能原理是独立场函数(u_i 和 ε_{ij}或 σ_{ij})的具有附加条件的极值原理。而 H-W 变分原理和 H-R 变分原理则分别是三个独立场函数($u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}$)和二个独立场函数($u_i,\sigma_{ij}$)的没有附加条件的驻值原理。

表8.3　线弹性理论的变分原理



8.4　弹性力学修正变分原理

本节讨论的弹性力学修正变分原理从本质上说也是一种广义变分原理。上节所讨论的弹性力学广义变分原理的实质是利用拉格朗日乘子将最小位能原理和最小位能原理的场函数事先在域内和边界上应予满足的附加条件引入泛函的结果，目的使之成为无附加条件的变分原理。我们知道，当应用变分原理作为理论基础建立有限元分析格式时，因为插值函数是按单元建立的，为使泛函存在，还提出了分片插值函数定义的场函数在单元交界面上连续性的要求。本节讨论的是如何利用约束变分原理修正泛函从而达到放松场函数在单元交界面上的连续性要求，以构造更多类型的单元、扩大有限元方法应用的领域。或更有效地解决一些利用常规单元解决起来比较困难的问题。为和上节讨论的广义变分原理有所区别，所以命名为修正变分原理。

8.4.1　修正的位能原理

在第二章中我们已知道对于应用于弹性力学的位移有限元，在单元交界面上是要求位移保持连续，这是由于作为位移有限元格式的理论基础——最小位能原理中位移函数的导数的最高次数等于1而提出的要求。现讨论此要求在构造单元位移模式时不能满足情况下如何对位能原理进行修正。

设求解域 V 被划分为 N 个单元，分别用 $V_1,V_2,\cdots,V_N$ 表示。用 V_a 和 V_b 表示任意二个相邻的单元，S_{ab}表示这二个单元的交界面。必要时用 S_{ab}^*和 S_{ba}^*表示分属 ∂V_a 和 ∂V_b 的交界面（∂V_a 和 ∂V_b 分别表示 V_a 和 V_b 的全部界面）。用 $\sigma_{ij}^{(a)},\varepsilon_{ij}^{(a)},u_i^{(a)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(b)},\varepsilon_{ij}^{(b)},u_i^{(b)}$ 分别表示单元 V_a 和 V_b 内的应力、应变和位移。单元交界面上位移连续性的要求是

$$u_i^{(a)} = u_i^{(b)} \qquad (\text{在 } S_{ab} \text{ 上}) \tag{8.4.1}$$

如果在构造单元位移场的插值函数时、上述连续性条件未能满足，则可以利用拉格朗日乘子将它们引入泛函，这样我们就得到一个修正的泛函如下

$$\Pi_{mp1} = \Pi_p - \sum H_{ab1} \tag{8.4.2}$$

其中 Π_p 是未经修正的原来意义上的总位能：

$$\Pi_p = \sum_e \left\{ \int_{V_e} \left(\frac{1}{2} D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \bar{f}_i u_i \right) \mathrm{d}V - \int_{S_{\sigma_e}} \bar{T}_i u_i \mathrm{d}S \right\} \tag{8.4.3}$$

而$\sum H_{ab1}$是引入的修正项，$\sum$表示在所有单元交界上求和，并有

$$H_{ab1} = \int_{S_{ab}} \lambda_i (u_i^{(a)} - u_i^{(b)}) \mathrm{d}S \tag{8.4.4}$$

其中 λ_i 是拉格朗日乘子，它是在 S_{ab}上定义的独立场变量。

通过变分并分部积分，可以得到 $\delta\Pi_{mp1}$在交界面 S_{ab}上的表达式

$$\delta\Pi_{mp1} = \cdots + \int_{S_{ab}^*} [T_i^{(a)}(u_j^{(a)}) - \lambda_i] \delta u_i^{(a)} \mathrm{d}S + \int_{S_{ba}^*} [T_i^{(b)}(u_j^{(b)}) + \lambda_i] \delta u_i^{(b)} \mathrm{d}S$$
$$- \int_{S_{ab}} (u_i^{(a)} - u_i^{(b)}) \delta\lambda_i \mathrm{d}S + \cdots \tag{8.4.5}$$

从上式可以得到在 S_{ab}上的驻值条件

$$T_i^{(a)}(u_j^{(a)}) = \lambda_i \qquad (\text{在 } S_{ab}^* \text{ 上})$$
$$- T_i^{(b)}(u_j^{(b)}) = \lambda_i \qquad (\text{在 } S_{ba}^* \text{ 上})$$

和

$$u_i^{(a)} = u_i^{(b)} \tag{8.4.6}$$

其中

$$T_i^{(a)}(u_j^{(a)}) = \sigma_{ij}^{(a)} n_j^{(a)} = D_{ijkl}^{(a)} \varepsilon_{kl}^{(a)} n_j^{(a)} = \frac{1}{2} D_{ijkl}^{(a)} (u_{k,l}^{(a)} + u_{l,k}^{(a)}) n_j^{(a)}$$

$$T_i^{(b)}(u_j^{(b)}) = \frac{1}{2} D_{ijkl}^{(b)} (u_{k,l}^{(b)} + u_{l,k}^{(b)}) n_j^{(b)} \tag{8.4.7}$$

并且

$$n_j^{(a)} = - n_j^{(b)}$$

通过(8.4.6)式、可以识别拉格朗日乘子的物理意义。但是因为在 S_{ab}^*和 S_{ba}^*上分别定义了 λ_i，而 $u_j^{(a)}$ 和 $u_j^{(b)}$ 是近似解，因此在 S_{ab}^*和 S_{ba}^*上分别定义的 $\lambda_i^{(a)}$ 和 $\lambda_i^{(b)}$ 在数值上一般并不相等。所以我们不能直接利用(8.4.6)式消去 Π_{mp1}中的 λ_i，以减少场变量数，即在利用 Π_{mp1}以放松单元交界面上位移连续性要求时，必须在修正泛函中保持拉格朗日乘子为在单元交界面上定义的独立场变量。

还需指出：修正泛函 Π_{mp1}不再具有极值性，而只保持驻值性。由于引入 Π_{mp1}的 $\sum\int_{S_{ab}} \lambda_i (u_i^{(a)} - u_i^{(b)}) \mathrm{d}S$ 是非平方的二次项，上述结论是很容易理解的。

现在讨论修正位能原理的另一种形式。首先在单元交界面 S_{ab}上设一位移函数 μ_i，这

样一来，S_{ab}上位移连续性条件(8.4.1)式可以等价地替换为

$$
\begin{aligned}
& u_i^{(a)} - \mu_i = 0 \qquad (\text{在 } S_{ab}^* \text{ 上}) \\
& u_i^{(b)} - \mu_i = 0 \qquad (\text{在 } S_{ba}^* \text{ 上})
\end{aligned}
\tag{8.4.8}
$$

现在再利用拉格朗日乘子将上述条件引入泛函。另一种形式的修正泛函表示如下

$$
\Pi_{mp2} = \Pi_p - \sum H_{ab2} \tag{8.4.9}
$$

其中

$$
H_{ab2} = \int_{S_{ab}^*} \lambda_i^{(a)} (u_i^{(a)} - \mu_i) \mathrm{d}S + \int_{S_{ba}^*} \lambda_i^{(b)} (u_i^{(b)} - \mu_i) \mathrm{d}S
$$

通过变分及分部积分，可以得到 $\delta\Pi_{mp2}$在 S_{ab}上的表达式

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi_{mp2} = \cdots & + \int_{S_{ab}^*} [T_i^{(a)}(u_j^{(a)}) - \lambda_i^{(a)}] \delta u_i^{(a)} \mathrm{d}S + \int_{S_{ba}^*} [T_i^{(b)}(u_j^{(b)}) - \lambda_i^{(b)}] \delta u_i^{(b)} \mathrm{d}S \\
& + \int_{S_{ab}^*} (u_i^{(a)} - \mu_i) \delta\lambda_i^{(a)} \mathrm{d}S + \int_{S_{ba}^*} (u_i^{(b)} - \mu_i) \delta\lambda_i^{(b)} \mathrm{d}S - \int_{S_{ab}} (\lambda_i^{(a)} + \lambda_i^{(b)}) \delta\mu_i \mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{8.4.10}
$$

从上式可以得到驻值条件

$$
\begin{aligned}
& \lambda_i^{(a)} = T_i^{(a)}(u_j^{(a)}), \quad \lambda_i^{(b)} = T_i^{(b)}(u_j^{(b)}) \\
& u_i^{(a)} = \mu_i, \qquad\qquad u_i^{(b)} = \mu_i \\
& \lambda_i^{(a)} + \lambda_i^{(b)} = 0
\end{aligned}
\tag{8.4.11}
$$

从上式的前二式可以识别乘子 $\lambda_i^{(a)}$ 和 $\lambda_i^{(b)}$ 的物理意义，并可以利用 $T_i^{(a)}(u_j^{(a)})$和 $T_i^{(b)}(u_j^{(b)})$替代 $\lambda_i^{(a)}$ 和 $\lambda_i^{(b)}$ 以减少泛函 Π_{mp2}中场变量数，从而得到另一种形式的修正位能原理，其泛函可表示如下

$$
\Pi_{mp3} = \Pi_P - \sum H_{ab3} \tag{8.4.12}
$$

其中：

$$
H_{ab3} = \int_{S_{ab}^*} T_i^{(a)}(u_j^{(a)})(u_i^{(a)} - \mu_i) \mathrm{d}S + \int_{S_{ba}^*} T_i^{(b)}(u_j^{(b)})(u_i^{(b)} - \mu_i) \mathrm{d}S
$$

Π_{mp3} 中独立变化的场函数是 $u_i^{(a)}$(V_a 内)，$u_i^{(b)}$(V_b 内)和 μ_i(对于 S_{ab}^*和 S_{ba}^*是共同的)。和 Π_{mp1}相同，Π_{mp2}和 Π_{mp3}都不再具有极值性质，而只保持驻值性。

8.4.2 修正的余能原理

在第一章和本章前一节中我们已经导出最小余能原理，它可表述为在所有满足平衡方程和力的边界条件的可能应力中，真正解的应力使系统的总余能

$$
\Pi_c(\sigma_{ij}) = \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \mathrm{d}V - \int_{S_u} T_i \bar{u}_i \mathrm{d}S \tag{8.3.15}
$$

取最小值。

为应用于有限元分析时，在单元交界面 S_{ab}上应力满足平衡的要求是按照 $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 定义的面力必须保持平衡，即

$$
T_i^{(a)} + T_i^{(b)} = 0 \tag{8.4.13}
$$

其中：

$$T_i^{(a)} = \sigma_{ij}^{(a)} n_j^{(a)}, \quad T_i^{(b)} = \sigma_{ij}^{(b)} n_j^{(b)}$$

且有

$$n_j^{(a)} = - n_j^{(b)}$$

实际上，在选择应力的试探函数时，可以先不考虑上式所表示的要求，而是利用拉格朗日乘子将此附加条件引入泛函。这样就得到修正的余能原理，其泛函是

$$\Pi_{mc} = \Pi_c - \sum G_{ab} \tag{8.4.14}$$

其中：Π_c 如(8.3.15)式所示，$\sum G_{ab}$ 是修正项，$\sum$ 表示对所有单元交界面求和，并有

$$G_{ab} = \int_{S_{ab}} \mu_i (T_i^{(a)} + T_i^{(b)}) \mathrm{d}S \tag{8.4.15}$$

μ_i 是拉格朗日乘子，它是在 S_{ab} 上定义的独立场变量。通过 Π_{mc} 的变分可以识别它的物理意义是交界面上的位移。

8.5 小　　结

本章首先讨论了两种将场变量应事先满足的附加条件引入泛函，使有附加条件的自然变分原理变成无附加条件的约束变分原理的方法——拉格朗日乘子法及罚函数法。理解和掌握各自的原理、方法及其特点对于进一步的数值分析工作是十分重要的。

应用约束变分原理、特别是拉格朗日乘子法，从最小位能原理和最小余能原理出发，导出了胡海昌-久津鹫变分原理以及 Hellinger-Reissner 变分原理，为有限元分析建立了更宽广的理论基础。在实际工作中，还可能建立其他形式的广义变分原理。基于各类广义变分原理的有限元法的共同特点是都包含二个或二个以上的场变量，可以统称为混合有限元法。

同样，应用约束变分原理，可以放松有限元在交界面上的连续条件，进而建立引入在单元交界面上定义的场变量的修正变分原理。在 8.4 节建立的几种形式的修正位能原理及修正余能原理是这类变分原理的代表性实例。它们的共同特点是除了在单元内部定义的场变量而外，还包含了在单元交界面上定义的场变量。基于修正变分原理的有限元法统称为杂交有限元法。

实际上，广义变分原理和修正变分原理还可以结合起来应用，即各种广义变分原理中的场变量在单元交界面的连续性要求，还可以通过修正变分原理引入泛函，从而得到各自修正的广义变分原理。因此上述两类变分原理及相应的两类有限元法的理论和方法在有限元法的发展过程中占有重要地位，特别是在板壳有限元法的研究工作中。在本书以后有关各章中将对它们作进一步的讨论。

习　　题

8.1 如有方程：$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\phi=x$，边界条件是：$\phi=0$，在 $x=0$；$\phi=1$ 在 $x=1$。导出和它等效的泛函。当采用近似函数 $\tilde{\phi}=a_0+a_1x_1+a_2x^2$ 求解时，如何用 Lagrange 乘子法修正泛函？并解出待定参数 a_0, a_1, a_2。

8.2 识别上题中 Lagrange 乘子的意义，并从修正泛函中消去 Lagrange 乘子后，再进一步解出参数 a_0, a_1, a_2，并和上题结果比较。

8.3 利用罚函数法求解题 1，并比较罚数取不同数值时的结果。

8.4 (8.2.27)式表示的修正泛函中，θ 和 w 各自独立插值，只要求具有 C_0 连续性，试导出基于此泛函的二结点单元的求解方程。

8.5 对于上题导出的和罚数 α 相关的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_2^{(e)}$，分别用精确积分和减缩积分(1点积分)计算出 $\boldsymbol{K}_2^{(e)}$ 的显式表达式，并检查它们是否满足奇异性要求。

8.6 由虚应力原理出发推导最小余能原理、H-R 变分原理，H-W 变分原理和最小位能原理，说明各个变分原理的驻值条件(即欧拉方程)和附加条件。

8.7 H-R 变分原理中的场变量在单元交界面上事先应满足什么条件？如这些条件未能事先满足，如何利用 Lagrange 乘子法将它们引入泛函？

8.8 H-W 变分原理中的场变量在单元交界面上事先应满足什么条件？如这些条件未能事先满足，如何利用 Lagrange 乘子法将它们引入泛函？

第 9 章　杆件结构力学问题的有限单元法

9.1　结构有限单元概论

结构单元是杆件单元和板壳单元的总称，杆件和板壳在工程中有广泛的应用，它们的力学分析属于结构力学范畴。我们知道，对于一般几何形状的三维结构或构件，即使限于弹性分析，要获得它的解析解也是很困难的。而对于杆件或板壳，由于它们在几何上分别具有二个方向和一个方向的尺度比其它方向小得多的特点，在分析中可以在其变形和应力方面引入一定的假设，使杆件和板壳分别简化为一维问题和二维问题，从而方便问题的求解。这种引入一定的假设，使一些典型构件的力学分析成为实际可能，是结构力学的基本特点。但是即使如此，对于杆件和板壳组成的结构系统，特别是它们在一般载荷条件的作用下，解析求解仍然存在困难，因此在有限单元法开始成功地应用于弹性力学的平面问题和空间问题以后，很自然地、人们将杆件和板壳问题的求解作为它的一个重要发展目标。

从前面几章我们已经知道，有限单元法用于二维、三维连续体，特别是它们的线性分析，已经发展得相当成熟。从原则上说，我们也可以利用二维、三维实体单元分析杆件和板壳结构问题，并可以避免结构力学引入的简化，但是这样做在实际分析中也遇到了困难。这是由于在用实体单元对结构进行离散时，如果网格适应结构的几何特点，即单元的二个方向或一个方向比其它方向小得多，这将使单元不同方向的刚度系数相差过大，从而导致求解方程的病态或奇异，最后将使解丧失精度或根本失败。反之、为避免上述问题，保持单元在各个方向尺度相近，将导致单元总数过分庞大，而使实际分析无法进行。下面可以引入一个简单的算例，以加深对此困难的理解，并引出克服此困难的可能途径。

图 9.1 所示是一由三个弹簧单元组成的系统。单元刚度：$K_1=K_2=100000, K_3=1$。直接施加于结点的轴向力：$P_1=P_3=1, P_2=0$。利用 5 位有效数字的算法求解结点位移 u_1, u_2, u_3。

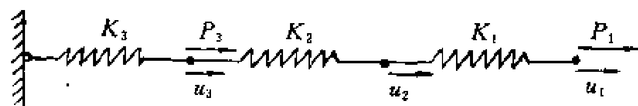


图 9.1　弹簧单元组成的系统

系统的平衡方程式是 $\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{P}$，即

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2+K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \tag{9.1.1}$$

将单元刚度和轴向力的已知值代入，则有

$$\begin{bmatrix} 100000 & -100000 & 0 \\ -100000 & 200000 & -100000 \\ 0 & -100000 & 100000 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix} \tag{9.1.2}$$

用高斯消去式求解，经消去后上式成为

$$\begin{bmatrix} 100000 & -100000 & 0 \\ 0 & 100000 & -100000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 2.0 \end{Bmatrix} \tag{9.1.3}$$

由于三角化系数矩阵的第三个主元等于0，所以无法回代求出解答，即求解失败。其原因就是由于各个弹簧刚度相差过大，超过了算法的有效位数。克服此问题的最简单的方法是采用有更多有效位数的算法，例如改用双精度的算法或改用有更多有效位的计算机。现假设求解已改用6位以上的算法，则(9.1.2)式和(9.1.3)式系数矩阵的第3个主元将分别是100001和1.0。这样一来，继续进行回代，就可得到精确的答案。

$$u_1 = 2.00002,\ u_2 = 2.00001,\ u_3 = 2.00000 \tag{9.1.4}$$

但应指出，上述改用有更多有效位数的算法，常常是不经济或是做不到的，因此应在改进数学模型或数值分析方法上寻找克服上述困难的方法。对此可以引出以下二种方法。

1. 主从自由度(master-slaver degrees of freedom)方法

分析弹簧系统的物性特点，由于 $K_1=K_2\gg K_3$，可以近似地认为

$$u_1 = u_2 = u_3 \tag{9.1.5}$$

即认为 u_3 是主自由度，u_2 和 u_1 是从自由度。这样一来，只要对结点3建立平衡方程(将 $u_1=u_2=u_3$ 和 $P_1=P_3=1, P_2=0$，代入(9.1.1)式，并将三式相加)，于是得到

$$K_3u_3 = P_1 + P_3 \tag{9.1.6}$$

将具体数值代入，从上式得到 $u_3=2.0$，再根据主从自由度假设(9.1.5)式，就得到系统的答案

$$u_1 = u_2 = u_3 = 2.0$$

和(9.1.4)式给出的精确解比较，主从自由度方法给出的解答是近似的。但是此近似解仍然基本上预测了系统的响应，误差是可以忽略的，而计算效率的提高是显著的。

2. 相对自由度(relative degrees of freedom)方法

在相对自由度方法中，引入 u_1 和 u_2 及 u_2 和 u_3 之间的相对位移 Δ_1 和 Δ_2，并以 Δ_1，Δ_2 和 u_3 代替原自由度 u_1，u_2 和 u_3 对系统求解。即令

$$u_1 = u_2 + \Delta_1, \qquad u_2 = u_3 + \Delta_2$$

用矩阵表示，有以下关系式

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}=[\boldsymbol{T}]\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{9.1.7}$$

将上式代入(9.1.1)式，并用 $\boldsymbol{T}^T$ 前乘方程两端，即得以相对自由度表示的求解方程

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_1 \\ P_1 + P_3 \end{Bmatrix}$$

将具体数据代入，即可得到解答

$$\Delta_1 = 0.00001, \quad \Delta_2 = 0.00001, \quad u_3 = 2.0$$

如有必要，可以进一步算出实际位移的解答

$$u_1 = 2.00002, \quad u_2 = 2.00001, \quad u_3 = 2.0$$

从以上简单算例的讨论得到启示，对于结构力学有限单元分析，也可以采用基于上述两种方法的原理，构造适合杆件和板壳分析的单元，以避免刚度系数之间相差过大而造成的数值困难。

1. 基于主从自由度原理的梁单元和板壳单元。结构力学中的梁弯曲理论和板壳理论所引入的变形方面的基本假设实际上正是应用了主从自由度的原理，将问题归结为求解中面位移函数（主自由度），而中面以外任一点的位移（从自由度）都可以通过中面位移来表示。因此也可以说基于梁弯曲理论和板壳理论构造的梁单元和板壳单元是采用了主从自由度的原理，正如前述简例中，忽略 u_1、u_2 和 u_3 之间的差别，而统一用 u_3 表示那样。从此还可以认识到，利用梁单元和板壳单元去离散杆系或板壳结构，不仅是为了减少求解方程的自由度，从而降低计算费用。更为重要的是为了克服由于求解方程刚度系数间的巨大差别而引起的数值上的困难。

还应指出的是，由于经典梁和板壳理论中应用了中面的法线在变形后仍保持和中面垂直的直法线假设（即 Kirchhoff 假设），因此对于基于这理论建立的梁单元和板壳单元，在单元交界面上提出了变形前的法线在变形后保持连续的要求。我们知道，在经典梁弯曲及板壳理论中、法线的转动是由挠度的导数表示的，因此要求单元交界面的法线变形后保持连续，实际上就是要求挠度的一阶导数保持连续（这表现在梁和板壳的能量泛函中包含挠度的二阶导数），这样一来，梁、板壳单元在单元交界面应满足 C_1 连续性，这和二维、三维单元在单元交界面上只要求满足 C_0 连续性是有重要区别的。满足 C_1 连续性对单元的构造带来不小的困难，也可以说提出一种挑战。它吸引了众多的有限元工作者从事这类单元的研究，导致了各种不同类型单元竞相出现的局面。当然作为以教材性质为主的本书，在今后有关各章中只能讨论在实际应用中比较成熟、比较普遍的代表性单元。

2. 基于相对自由度原理的梁单元和板壳单元。这类单元本质上就是二维、三维实体单元。为使中面的法线变形后仍保持直线（不一定仍和中面垂直），在高（厚）度方向只设置二个结点。其中一个结点的自由度仍保持为原来意义上自由度（如前述简例中的 u_3），另一个结点的自由度用它和上述结点的相对位移来代替（如前例中的 Δ_1 和 Δ_2）。从前例中可以得到启示，此时只要对原实体单元形成的求解方程进行适当的自由度变换，即可得到新的包含相对自由度系统的求解方程，从而避免系数矩阵出现病态或奇异而带来的困难。因为这种单元只是原来的实体单元引入简单的自由度变换而得到，所以仍是 C_0 型单元，即在单元交界面上仍只要求保持 C_0 连续性。这种单元相对于基于梁、板壳理论的单元还有表达格式简单等优点，我们准备在板壳单元的讨论中加以简要的介绍。

本章讨论杆件单元和由它们组成的平面和空间杆件系统。杆件从构造上说是长度远

大于其截面尺寸的一维构件。在结构力学中常常将承受轴力或扭矩的杆件称为杆，而将承受横向力和弯矩的杆件称为梁。在有限单元法中将上述两种情况的单元分别称为杆单元和梁单元。由于在由杆件组成的实际工程结构中，同一构件上，上述几种受力状态往往同时存在，为方便起见，常常仍统称之为杆单元。尽管如此，只承受轴力和扭矩的杆单元和只承受横向力及弯矩的梁单元在单元构造上仍有重要的差别，即它们分属 C_0 型单元和 C_1 型单元。前者可以看成第 3 章一维 Lagrange 单元的一种应用，本章只作简单的讨论。后者在采用经典梁弯曲理论的情况下，可以看成是第 3 章一维 Hermite 单元的一种应用。但在考虑横向剪切变形影响的情况下，也能够构造出一种 C_0 型单元，并由之引入了一些新的概念和方法，对于以后板壳的讨论也很有用，因此本章需要作较详细的讨论。

正如在上面已提到的，在由杆件组成的平面或空间的杆件系统中，通常每一杆件同时承受轴力、扭矩、横向力及弯矩的共同作用，同时杆件的轴线方向也是相互交错的，因此要对杆件系统进行分析，则涉及到杆单元和梁单元在同一个构件中的组合，以及单元矩阵从局部坐标到总体坐标的转换和单元矩阵在总体坐标中的集成。这是杆件系统有限元分析的两个重要问题，也是本章内容的另一重点。

9.2 等截面直杆-梁单元

9.2.1 轴力杆单元

承受轴向载荷的等截面直杆如图 9.2 所示，其中 $f(x)$ 是轴向的分布载荷（例如重力，离心力等），$P_1,P_2,\cdots,P_j,\cdots$ 是轴向的集中载荷。对此杆件进行应力和变形分析时，可以假定应力在截面上均匀分布，原来垂直于轴线的截面变形后仍保持和轴线垂直，因此问题可以简化为一维问题。如以位移为基本未知量，则问题归结为求解轴向位移函数 $u(x)$。

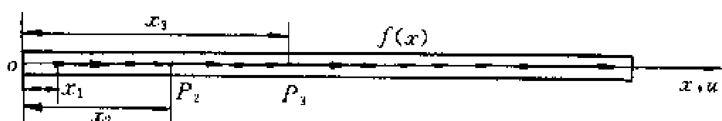


图 9.2 受轴向载荷作用的等截面直杆

从上述基本假设出发，可以导出承受轴向载荷等截面直杆的基本方程如下：

几何关系
$$\varepsilon_x=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{9.2.1}$$

应力应变关系
$$\sigma_x=E\varepsilon_x=E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{9.2.2}$$

平衡方程
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A\sigma_x)=f(x) \tag{9.2.3}$$

或
$$AE\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x)$$

端部条件
$$u=\bar{u}\quad（端部给定位移） \tag{9.2.4}$$
$$A\sigma_x=P\quad（端部给定载荷） \tag{9.2.5}$$

和上述方程相等效的，可以将问题转换为求解泛函 $\Pi_P(u)$ 的极值问题。其中

$$\Pi_P(u) = \int_0^l \frac{EA}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x - \int_0^l f(x)u\mathrm{d}x - \sum_j P_j u_j \tag{9.2.6}$$

式中 l 是杆件长度，A 是截面面积，$u_j=u(x_j)$ 是集中载荷 $P_j(j=1,2,\cdots)$ 作用点 x_j 的位移。其实集中载荷 P_j 也可以看作是包含在分布载荷 $f(x)$ 中的特殊情况，为讨论方便起见，以后就不单独列出。在以后讨论其它杆单元时，也作此处理。

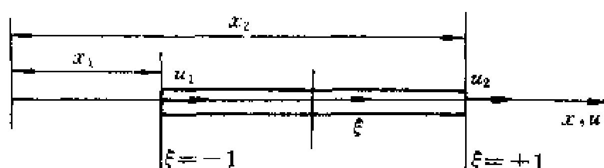


图 9.3　二结点杆单元

在用有限单元法对上述杆件进行分析时，首先用轴力杆单元对杆件进行离散，典型的轴力杆单元如图 9.3 所示。每个结点 i 只有一个位移参数 u_i，单元内位移 $u(x)$ 可以利用 3.2 节给出的一维 Lagrange 插值多项式通过结点位移 u_i 的插值表示如下：

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)u_i = \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}^e \tag{9.2.7}$$

其中　$\boldsymbol{N}=[N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_n]$，$\boldsymbol{u}^e=[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^{\mathrm{T}}$

n 是单元结点数，ξ 是单元内的自然坐标，它和杆件总体坐标 x 的关系如下

$$\xi = \frac{2}{l}(x - x_C), \quad x_C = \frac{x_1 + x_n}{2} \tag{9.2.8}$$

l 是单元长度，x_C 是单元中心点的总体坐标，$-1\leqslant\xi\leqslant 1$。$N_i$ 即一维 Lagrange 多项式，例如

$$2\text{ 结点单元}\qquad N_1=\frac{1}{2}(1-\xi),\ N_2=\frac{1}{2}(1+\xi) \tag{9.2.9}$$

$$3\text{ 结点单元}\qquad N_1=\frac{1}{2}\xi(\xi-1),\ N_2=1-\xi^2,\ N_3=\frac{1}{2}\xi(\xi+1) \tag{9.2.10}$$

将(9.2.7)式代入(9.2.6)式，进一步从 $\delta\Pi=0$ 可以得到有限元求解方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} \tag{9.2.11}$$

其中　$\boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{K}^e, \quad \boldsymbol{P} = \sum_e \boldsymbol{P}^e, \quad \boldsymbol{u} = \sum_e \boldsymbol{u}^e$

$$\boldsymbol{K}^{(e)} = \int_0^l EA\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{2EA}{l}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}\xi}\right)\mathrm{d}\xi \tag{9.2.12}$$

$$\boldsymbol{P}^{(e)} = \int_0^l \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} f(\xi)\,\frac{2}{l}\mathrm{d}\xi \tag{9.2.13}$$

前面曾指出，分布载荷 $f(x)$ 中可以包含集中载荷。但是在实际分布中，通常在集中载荷作用处设置结点，这时集中载荷可以直接施加在结点上，而不在(9.2.13)式的积分中进行计算。另外可以指出，$\boldsymbol{K}^e$ 通常可以显式积分出具体数值，而不必采用数值积分。例如 2 结点单元的 $\boldsymbol{K}^e$ 表示式如下

$$K^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.2.14}$$

对于有 3 个及 3 个以上结点的单元,内部结点自由度可以在单元层次凝聚掉,而只保持端结点自由度参加系统方程的集成,以提高计算效率。

9.2.2 扭转杆单元

受扭矩作用的等截面直杆单元和受轴力直杆单元同属一维 C_0 型单元。9.2.1 节的各个方程和表达式,只要各个变量的物理意义和符号用扭转问题的相应量和符号替换,就可以用于现在的情况。现再表达如下:

几何关系 $\alpha=\frac{d\theta_x}{dx}$ (9.2.15)

应力应变关系 $M=GJ\alpha=GJ\frac{d\theta_x}{dx}$ (9.2.16)

平衡方程 $\frac{dM}{dx}=GJ\frac{d^2\theta_x}{dx^2}=m_t(x)$ (9.2.17)

端部条件 $\theta_x=\bar{\theta}_x$ (端部给定转角)
$M=\bar{M}$ (端部给定扭矩) (9.2.18)

其中 θ_x 是截面绕杆的中心轴线的转角;α 是截面的扭转率,即单位长度的转角变化;M 是扭矩;J 是截面的扭转惯性矩,不同截面形状的 J 可以在有关手册中查到;$m_t(x)$是外加的分布扭矩。通常 $m(x)$为 0;$\bar{\theta}_x$ 和 $\bar{M}$ 分别是在端部给定的转角和扭矩,如是固定端,则 $\bar{\theta}_x=0$,如是自由端,则 $\bar{M}=0$。

最小位能原理的泛函:

$$\Pi_p(\theta_x) = \int_0^l \frac{1}{2}GJ\left(\frac{d\theta_x}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l m(x)\theta_x dx \tag{9.2.19}$$

单元的插值函数和单元刚度矩阵及载荷向量也完全和轴力杆单元相类似,例如

$$K^e = \int_{-1}^{1} \frac{2GJ}{l}\left(\frac{dN}{d\xi}\right)^{T}\left(\frac{dN}{d\xi}\right) d\xi \tag{9.2.20}$$

其他就不一一列出。

需要指出的是:以上列出的扭转方程严格地说只适用于自由扭转情况。因为除圆截面杆而外,扭转变形后,截面不再保持平面,即发生翘曲。在实际结构中,这种翘曲将受到限制,要精确分析此种情况下的扭转问题,需要应用约束扭转理论。无疑,最后得到的解答将和自由扭转理论的结果有一定差别。因为应用约束扭转理论将使问题复杂化,在通常的有限元分析中仍采用上述自由扭转的理论。还应指出,只有在截面有两个对称轴(例如圆、椭圆、矩形等)的情况下,截面才是绕形心(即杆的中心线)转动的。这在以后讨论空间杆系,涉及轴向力、扭矩、弯矩共同作用时,注意到这一点是必要的。

9.2.3 弯曲梁单元

承受横向载荷和弯矩作用的等截面梁如图 9.4 所示,其中 $q(x)$是横向作用的分布载荷,$P_1,P_2,\cdots;M_1,M_2,\cdots$分别是横向集中载荷和弯矩。经典的梁弯曲理论中,假设变形前垂直梁中心线的截面,变形后仍保持为平面,且仍垂直于中心线。从而使梁弯曲问题简化

为一维问题。基本未知函数是中面挠度函数 $w(x)$。梁弯曲问题的基本方程如下：

几何关系
$$\kappa=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} \tag{9.2.21}$$

应力应变关系
$$M=EI\kappa=-EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} \tag{9.2.22}$$

平衡方程
$$Q=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=-EI\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3} \tag{9.2.23}$$

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=EI\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}=q(x) \tag{9.2.24}$$

端部条件 $w=\bar{w},\quad \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\bar{\theta}$

或 $w=\bar{w},\quad M=\bar{M}$ (9.2.25)

或 $Q=\bar{Q},\quad M=\bar{M}$

以上各式中 κ 是梁中面变形后的曲率；M 和 Q 分别是截面上的弯矩和横向剪力；I 是截面弯曲惯性矩；$\bar{w},\bar{\theta},\bar{M},\bar{Q}$ 分别是在端部给定的挠度、转动、弯矩和剪力，当它们等于 0 时，则以上三类端部条件分别对应于固支端、简支端和自由端。

和上列基本方程相等效的最小位能原理是以下泛函 $\Pi_p(w)$ 取最小值

$$\Pi_p(w)=\int_0^l\frac{1}{2}EI\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^l q(x)\mathrm{d}x-\sum_j P_jw_j+\sum_k M_k\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_k \tag{9.2.26}$$

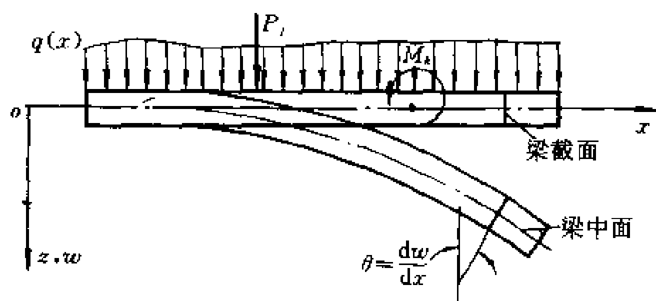


图 9.4 承受横向载荷作用的等截面梁

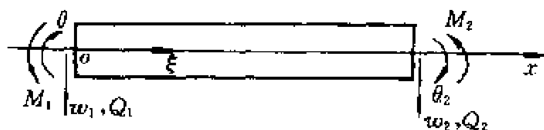


图 9.5 二结点梁单元

用有限单元法分析梁弯曲问题时，通常采用 3.2 节的二结点 Hermite 单元(如图 9.5 所示)。单元内挠度函数 $w(\xi)$ 的插值表示如下：

$$w(\xi)=\sum_{i=1}^{2}H_i^{(0)}(\xi)w_i+\sum_{i=1}^{2}H_i^{(1)}(\xi)\theta_i \tag{9.2.27}$$

或
$$w(\xi)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi)a_i=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e$$

其中
$$\boldsymbol{N}=[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4]$$

$$a^e = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T, \quad \theta_i = \left(\frac{dw}{dx}\right)_i \quad (i = 1,2)$$

$$N_1(\xi) = H_1^{(0)}(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2(\xi) = H_1^{(1)}(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l$$

$$N_3(\xi) = H_2^{(0)}(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_4(\xi) = H_2^{(1)}(\xi) = (\xi^3 - \xi^2)l$$

$$\left(\xi = \frac{x - x_1}{L} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1\right)$$

将梁用上述单元离散，并将上列挠度函数代入泛函 $\Pi_p(w)$后，从 $\delta\Pi_p = 0$，可以得到有限元求解方程

$$Ka = P \tag{9.2.28}$$

其中 $\quad K = \sum_e K^e \quad P = \sum_e P^e \quad a = \sum_e a^e$

$$K^e = \int_0^1 \frac{EI}{l^3}\left(\frac{d^2N}{d\xi^2}\right)^T\left(\frac{d^2N}{d\xi^2}\right)d\xi = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{9.2.29}$$

$$P^e = \int_0^1 N^T q l d\xi + \sum_j N^T(\xi_j)P_j - \sum_k \frac{dN^T(\xi_k)}{d\xi}\frac{M_k}{l} \tag{9.2.30}$$

上式中 $\sum\limits_j$ 和 $\sum\limits_k$ 分别表示对作用于单元内的横向集中载荷和弯矩求和，ξ_j 和 ξ_k 分别是它们作用点的自然坐标。和受轴力杆分析的情况相同，在离散梁时，通常在集中载荷作用点处划分单元，这时集中载荷可以直接施加于结点。这样一来 P^e 中只考虑分布载荷 q 的作用。对于常见的均匀分布载荷

$$P^e = \frac{ql}{12}[6 \quad l \quad 6 \quad -l]^T \tag{9.2.31}$$

9.2.4 考虑剪切变形的梁单元

以上讨论的梁单元基于变形前垂直于中面的截面变形后仍保持垂直的 Kirchhoff 假设。通常所述的梁单元，即是指这种单元。它在实际中得到广泛的应用，一般情况下也能得到满意的结果。但是应该指出，它是以梁的高度远小于跨度为条件的。因为只有在此条件下，才能忽略横向剪切变形的影响。但是在工程实际中，也常常会遇到需要考虑横向剪切变形影响的情况。例如高度相对跨度不太小的高梁即属此情况。此时梁内的横向剪切力 Q 所产生的剪切变形将引起梁的附加挠度，并使原来垂直于中面的截面变形后不再和中面垂直，且发生翘曲。但在考虑剪切变形的梁弯曲理论中，仍假设原来垂直于中面的截面变形后仍保持为平面。根据此理论，梁变形的几何描述如图 9.6 所示。

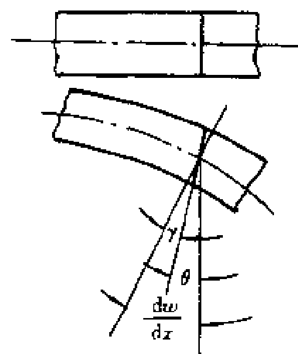


图 9.6 包括剪切影响的梁变形几何描述

图中 γ 表示截面和中面相交处的剪切应变，并且有如下关系式

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \theta \tag{9.2.32}$$

θ是截面的转动。在经典的梁弯曲理论中,忽略剪切应变,即认为$\gamma=0$,所以$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\theta$,即截面的转动等于挠度曲线切线的斜率,从而使截面保持和中面垂直。

在现在的情况下,梁的曲率变化κ按几何学定义仍表示为

$$\kappa = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \tag{9.2.33}$$

只是不能进一步表示为$\kappa=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}$。

在考虑剪切变形的影响以后,梁弯曲问题最小位能原理的泛函可表示如下:

$$\Pi_p = \int_0^l \frac{1}{2}EI\kappa^2\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{1}{2}\frac{GA}{k}\gamma^2\mathrm{d}x - \int_0^l qw\mathrm{d}x - \sum_j P_j w_j + \sum_k M_k\theta_k \tag{9.2.34}$$

式中符号k是截面剪切校正因子。如前所述,在考虑剪切影响的梁弯曲理论中仍保持截面为平面的假设。实际上这也就同时引入了剪应力和剪应变在截面上均匀分布的假设。据此假设,截面上均匀分布的剪应力:$\tau=Q/A$,均匀剪应变:$\gamma=\tau/G=Q/(GA)$,全截面的剪切应变能:$U=(1/2)\gamma Q=(1/2)GA\gamma^2$。但是实际上剪应力和剪应变在截面上不是均匀分布,截面也不再是平面。因此需要引入校正因子,将剪应变和剪切应变能改写成$\gamma=\frac{\tau k}{G}=\frac{Qk}{GA}$, $U=\frac{1}{2k}GA\gamma^2$。在已有的研究工作中,有不同的修正方法。例如一种理论认为γ应取中面处的实际剪应变(也是截面上的最大剪应变)。据此、对于矩形截面,$k=3/2$;对于圆形截面,$k=\frac{4}{3}$。再如另一种理论认为应使按$U=\frac{1}{2k}GA\gamma^2$计算出的应变能等于按实际剪应力及剪应变分布计算出的应变能。据此,对于矩形截面,$k=\frac{6}{5}$,对于圆形截面,$k=10/9$。当然还有其他校正的方法。在有限元分析中,较多的是采用能量等效的校正方法。

基于最小位能原理的考虑剪切影响的梁单元和不考虑剪切影响的梁单元相同,仍以w,θ为结点参数,但在刚度矩阵中引入了剪切的影响。在引入剪切影响的方法上有以下二种方案:

1. 在经典梁单元基础上引入剪切变形影响

考虑剪切变形影响时,梁的法向位移(挠度)可表示为两部分的叠加,即

$$w = w^b + w^s \tag{9.2.35}$$

其中w^b是由弯曲变形引起的法向位移,w^s是由剪切变形引起的附加法向位移。单元的结点位移参数相应地也表示为两部分,分别表示为$\boldsymbol{a}_b^e$和$\boldsymbol{a}_s^e$。由于w^s只代表由于剪切变形引起的附加横向位移,所以

$$\boldsymbol{a}_b^e = \begin{Bmatrix} w_1^b \\ \theta_1 \\ w_2^b \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_s^e = \begin{Bmatrix} w_1^s \\ w_2^s \end{Bmatrix} \tag{9.2.36}$$

上式中 $\theta_1=\left(\frac{\mathrm{d}w^b}{\mathrm{d}x}\right)_1$，$\theta_2=\left(\frac{\mathrm{d}w^b}{\mathrm{d}x}\right)_2$；$\theta_1,\theta_2$ 用作结点参数以保证单元间的连续性，同时也表明 w^b 将仍采用和不考虑剪切变形影响梁单元的 w 相同的 Hermite 插值表示。$\boldsymbol{a}_s$ 中只有两个结点参数：w_1^s 和 w_2^s，表明 w^s 将应采用 2 结点的 Lagrange 插值表示式，即线性插值表示式。这将导致在单元内剪切力为常数，这是一合理的选择。因为单元中 w^b 是三次式，利用平衡方程从它导出的剪切力也是常数。单元内 w^b 和 w^s 具体表达式如下：

$$\begin{aligned} w^b &= N_1 w_1^b + N_2\theta_1 + N_3 w_2^b + N_4\theta_2 = \boldsymbol{N}_b\boldsymbol{a}_b^e \\ w^s &= N_5 w_1^s + N_6 w_2^s = \boldsymbol{N}_s\boldsymbol{a}_s^e \end{aligned} \tag{9.2.37}$$

其中

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{N}_b = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4],\ \boldsymbol{N}_s = [N_5 \quad N_6] \\ &\boldsymbol{a}_b^{(e)} = [w_1^b \quad \theta_1 \quad w_2^b \quad \theta_2]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{a}_s^{(e)} = [w_1^s \quad w_2^s]^{\mathrm{T}} \\ &N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad N_2 = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l \\ &N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad N_4 = (\xi^3 - \xi^2)l \\ &N_5 = 1 - \xi, \quad N_6 = \xi, \quad \xi = \frac{x - x_i}{l} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1) \end{aligned}$$

将(9.2.37)式代入(9.2.34)式，从 $\delta\Pi=0$ 可得如下方程

$$\boldsymbol{K}_b\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{P}_b,\ \boldsymbol{K}_s\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{P}_s \tag{9.2.38}$$

上式的前一式和(9.2.28)式所表示的不包含剪切变形影响的梁弯曲问题有限元求解方程完全相同。$\boldsymbol{K}_b,\boldsymbol{P}_b$ 即(9.2.28)式中的 $\boldsymbol{K},\boldsymbol{P}$，只是 $\boldsymbol{a}_b$ 中用 w_1^b,w_2^b 代替了(9.2.28)式中的 w_1，w_2。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{K}_s^e &= \frac{GA}{kl}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{P}_s^e &= \int_0^1 \boldsymbol{N}_s^{\mathrm{T}} q l d\xi + \sum_j \boldsymbol{N}_s^{\mathrm{T}}(\xi_j)P_j \end{aligned}\right\} \tag{9.2.39}$$

其中 $\boldsymbol{N}_s=[N_5 \quad N_6]$

从(9.2.37)式看到，此单元每个结点有 3 个位移参数：$w_i^b,w_i^s,\theta_i(i=1,2)$。实际上可以在单元层次利用平衡方程，使每个结点只保留 2 个独立的位移参数。首先从弹性关系可得

$$\begin{aligned} Q &= \frac{GA}{k}\gamma = \frac{GA}{k}\frac{\mathrm{d}w^s}{\mathrm{d}x} = \frac{GA}{k}\left(\frac{\mathrm{d}N_5}{\mathrm{d}x}w_1^s - \frac{\mathrm{d}N_6}{\mathrm{d}x}w_2^s\right) = \frac{GA}{kl}(w_2^s - w_1^s) \\ M &= -EI\kappa = -EI\frac{\mathrm{d}^2 w^b}{\mathrm{d}x^2} \\ &= -\frac{EI}{l^2}[(6 - 12\xi)(w_2^b - w_1^b) + l(6\xi - 4)\theta_1 + l(6\xi - 2)\theta_2] \end{aligned} \tag{9.2.40}$$

再则利用平衡方程可得

$$Q = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = \frac{6EI}{l^3}[2(w_2^b - w_1^b) - l(\theta_1 + \theta_2)] \tag{9.2.41}$$

还有几何关系

$$w_2 - w_1 = w_2^b - w_1^b + w_2^s - w_1^s \tag{9.2.42}$$

从以上各式，经过简单的运算，则得到

$$w_2^b - w_1^b = \frac{1}{1+b}(w_2 - w_1) + \frac{lb}{2(1+b)}(\theta_1 + \theta_2)$$
$$w_2^s - w_1^s = \frac{1}{1+b}(w_2 - w_1) - \frac{lb}{2(1+b)}(\theta_1 + \theta_2) \tag{9.2.43}$$

式中 $b=\dfrac{12EIk}{GAl^2}$

将上式代入方程(9.2.38)式，经化简并将第1和第5，第3和6式合并，就得到最后的求解方程

$$\boldsymbol{Ka} = \boldsymbol{P} \tag{9.2.44}$$

其中
$$\boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{K}^e \quad \boldsymbol{P} = \sum_e \boldsymbol{P}^e, \quad \boldsymbol{a} = \sum_e \boldsymbol{a}^e$$

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{EI}{(1+b)l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+b)l^2 & -6l & (2-b)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-b)l^2 & -6l & (4+b)l^2 \end{bmatrix} \tag{9.2.45}$$

$$\boldsymbol{P}^e = \int_0^1 \overline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} ql\mathrm{d}\xi + \sum_j \overline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}(\xi_j)P_j - \sum_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}_b^{\mathrm{T}}(\xi_l)}{\mathrm{d}\xi}\frac{M_k}{l} \tag{9.2.46}$$

$$\overline{\boldsymbol{N}} = \left[\frac{1}{2}(N_1 + N_5) \quad N_2 \quad \frac{1}{2}(N_3 + N_6) \quad N_4\right]$$

对比(9.2.29)式和(9.2.45)式可以看到，剪切变形的影响通过系数 b 反映在刚度矩阵中，它使梁的刚度减弱。$b=\dfrac{12EIk}{GAl^2}$，例如对于矩形截面，$b=\dfrac{6Eh^2}{5Gl^2}$。从此可见，当高度 h 相对跨度 l 很小时，剪切变形的影响可以忽略。此时(9.2.45)式就退化为通常不考虑剪切变形影响的(9.2.29)式。另外顺便指出，对于均匀分布的 q，由于 $\int_0^l N_1ql\mathrm{d}\xi = \int_0^l N_3ql\mathrm{d}\xi = \int_0^l N_5ql\mathrm{d}\xi = \int_0^l N_6ql\mathrm{d}\xi$，所以在不计及集中载荷 P_j 和 M_k 作用的情况下，$\boldsymbol{P}^{(e)}$ 仍是(9.2.31)式给出的结果，即

$$\boldsymbol{P}^e = \frac{ql}{12}[6 \quad l \quad 6 \quad -l]^{\mathrm{T}}$$

2. Timoshenko 梁单元

从前面的讨论中可以看出，在经典梁理论的基础上引入剪切变形影响的梁单元仍属 C_1 型单元。因为其中 θ 并非独立插值，而是由 $\dfrac{\mathrm{d}w^b}{\mathrm{d}x}$ 导出，所以对于二结点梁单元，w^b 应采用 Hermite 插值函数。虽然这样做对于梁单元并无困难，但不便于推广到板壳单元。这在今后将可看到，构造 C_1 型板壳单元是相当棘手的问题。为此在此引入另一种考虑剪切变形影响的梁单元，这就是 Timoshenko 梁单元，它是 C_0 型单元，便于推广应用于板壳情况。

Timoshenko 梁单元的基本特点是挠度 w 和截面转动 θ 各自独立插值。即采用如下插值表示

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \qquad \theta = \sum_{i=1}^n N_i\theta_i \tag{9.2.47}$$

其中 n 是单元的结点数，N_i 是 Lagrange 插值多项式。

将上式代入泛函(9.2.34)式，从 $\delta\Pi_p=0$ 可以得到有限元求解方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P} \tag{9.2.48}$$

其中 $\boldsymbol{K}=\sum_e \boldsymbol{K}^e,\ \boldsymbol{P}=\sum_e \boldsymbol{P}^e,\quad \boldsymbol{a}=\sum_e \boldsymbol{a}^e$

$$\boldsymbol{K}^e=\boldsymbol{K}_b^e+\boldsymbol{K}_s^e \tag{9.2.49}$$

$$\boldsymbol{K}_b^e=\frac{EIl}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_b\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{K}_s^e=\frac{kGAl}{2}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_s\mathrm{d}\xi$$

$$\boldsymbol{B}_b=[\boldsymbol{B}_{b1}\quad \boldsymbol{B}_{b2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{B}_{bn}]$$

$$\boldsymbol{B}_s=[\boldsymbol{B}_{s1}\quad \boldsymbol{B}_{s2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{B}_{sn}]$$

$$\boldsymbol{B}_{bi}=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{si}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\\ -N_i\end{bmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{P}^e=\frac{l}{2}\int_{-1}^{1}[q\ 0]\boldsymbol{N}\mathrm{d}\xi+\sum_j[p_j\ 0]\boldsymbol{N}(\xi_j)-\sum_k[0\ M_k]\boldsymbol{N}(\xi_k) \tag{9.2.50}$$

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{N}_1\quad \boldsymbol{N}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{N}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{N}_i=\begin{bmatrix}N_i & 0\\ 0 & N_i\end{bmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{a}^e=[\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}] \tag{9.2.51}$$

$$\boldsymbol{a}_i=\begin{Bmatrix}w_i\\ \theta_i\end{Bmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

从以上各式可见，Timoshenko 梁单元的表达格式相当简单，和轴力单元很类似。但是正如在 8.2 节中所指出的，剪切变形能在泛函中起着罚函数的作用。在 w 和 θ 采用同阶插值函数(如(9.2.47)式所示)情况下，如用精确积分计算剪切应变能项，对于低阶单元可能不能保证 $\boldsymbol{K}_s$ 的奇异性。这样一来，在梁变薄时，即 $l/h\to\infty$ 时，问题只能得到零解。现以二结点单元为例

$$w=\sum_{i=1}^{2}N_iw_i,\quad \theta=\sum_{i=1}^{2}N_i\theta_i \tag{9.2.52}$$

其中

$$N_1=\frac{1}{2}(1-\xi),\quad N_2=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$\xi=\frac{2(x-x_c)}{l},\quad x_c=\frac{x_1+x_2}{2}\quad (-1\leqslant\xi\leqslant 1)$$

代入(9.2.49)式，按精确积分将得到

$$\boldsymbol{K}_b^e=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{9.2.53}$$

$$K_s^e = \frac{GA}{kl}\begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} \\ -1 & -\frac{l}{2} & 1 & -\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{6} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix} \tag{9.2.54}$$

可以验证，$\boldsymbol{K}_s^e$ 的秩是 2(存在非零的二阶子行列式)。而对于此单元，每增加一个单元，增加的自由度数也是 2，因此 $\boldsymbol{K}_s$ 是非奇异的。这样一来，当板很薄，即$\frac{l}{h}\to\infty$时，问题只能得到零解。现还可对产生此问题的根源作进一步地阐述。因为挠度和转动采用同阶的插值表示式，所以剪切应变 γ 中的$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$和 θ 两项是不同阶的。仍以 2 结点单元为例，它们分别为常数和一次式。这样一来，约束条件 $\gamma=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta=0$ 不可能到处满足，除非 θ 也等于常数。这将意味着梁不能发生弯曲，因此问题只能是零解。这是由于约束条件未能精确满足，在梁很薄时导致不确当地夸张了剪切应变能项的量级而造成的，所以在梁、板、壳的有限元分析中，将这种现象称为剪切锁死(Shear Locking)。

为避免剪切锁死，现已提出多种不同的方案，它们的基本点都是在计算剪切应变时，使$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$和 θ 预先就保持同阶。具体有以下几种方案。

(1) 减缩积分(reduced integration)

所谓减缩积分就是数值积分采用比精确积分要求少的积分点数。仍以上述二结点 Timoshenko 梁单元为例，为精确积分剪切应变能项需要采用 2 点积分。减缩积分方案是采用一点积分。这样一来，θ 项就不能被精确积分，实际上是以该积分点(一点积分在单元中点)θ 的数值代替了在单元内的线性变化，从而使它和$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$保持同阶，因之使约束条件$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta=0$ 有可能到处满足。这样做的结果，表现为 $\boldsymbol{K}_s^e$ 是秩 1 矩阵，也即使 $\boldsymbol{K}_s$ 保持奇异性。二结点单元采用减缩积分后的 $\boldsymbol{K}_s^e$ 具体表示如下

$$K_s^e = \frac{GA}{kl}\begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \\ -1 & -\frac{l}{2} & 1 & -\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \end{bmatrix} \tag{9.2.55}$$

可以检验，现在的 $\boldsymbol{K}_s^e$ 中的任一二阶子行列式都等于零，因此它是秩 1 矩阵。而每增加一个单元，增加二个自由度，所以 $\boldsymbol{K}_s$ 是奇异的。

需要指出：当采用减缩积分方案时，还应注意检查 $\boldsymbol{K}$ 是否仍满足非奇异性的要求。因为 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_b+\boldsymbol{K}_s$，$\boldsymbol{K}^e=\boldsymbol{K}_b^e+\boldsymbol{K}_s^e$。对于现在研究的单元，当采用减缩积分方案时，$\boldsymbol{K}_b^e$ 和 $\boldsymbol{K}_s^e$ 的秩

都等于 1，所以 $\boldsymbol{K}^e$ 的秩为 2。而每增加一个单元，增加 2 个自由度，正好等于 $\boldsymbol{K}^e$ 的秩，因此 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性得到保证。

(2) 假设剪切应变(assumed shear strains)

泛函(9.2.34)式中的剪切应变不是从(9.2.47)式所定义的位移插值表达式代入几何关系 $\gamma=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta$ 而得到，而是替代以另行假设的剪切应变，通常它可以表示如下插值形式：

$$\bar{\gamma}=\sum_{j=1}^{m}\bar{N}_j(\xi)\bar{\gamma}_j \tag{9.2.56}$$

其中 $\bar{\gamma}_j=\gamma(\xi_j)=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta\right)\Big|_{\xi=\xi_j}=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\mathrm{d}N_j(\xi)}{\mathrm{d}x}w_i-N_i(\xi)\theta_i\right)\Big|_{\xi=\xi_i}$，$\xi_j$ 是插值点位置，$\bar{N}_i(\xi)$ 是插值函数，它根据插值点数 m 及其位置 $\xi_j(j=1,2,\cdots,m)$ 而定。如前面已指出的，在 w 和 θ 采用同阶插值时，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ 总是比 θ 低一阶，为使在梁很薄时，γ 能趋于 0，必须使 $\bar{\gamma}$ 保持和 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ 同阶，所以插值点数应比 w 和 θ 的插值点数少 1 个，即应取 $m=n-1$。对于 2 结点 Timoshenko 梁单元 $m=1,\xi_1=\frac{1}{2},\bar{N}_1=1$，这时

$$\bar{\gamma}=\gamma(\xi_1)=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta\right)\Big|_{\xi=\frac{1}{2}}=\frac{1}{l}(w_2-w_1)-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2) \tag{9.2.57}$$

在采用另行假设剪切应变情况，泛函(9.2.34)式应改写成(为讨论和表达方便，未包括集中力和集中力弯矩项)

$$\Pi_p^*=\int_0^l\frac{1}{2}EI\kappa^2\mathrm{d}x+\int_0^l\frac{1}{2}\frac{GA}{k}\bar{\gamma}^2\mathrm{d}x-\int_0^l qw\mathrm{d}x \tag{9.2.58}$$

可以证明，上列修正泛函 Π_p^* 在理论上和混合变分原理的泛函 $\Pi_{\text{H-R}}$ 相等价。(9.2.34)式表达的 Π_p 中第一项弯曲应变能保持不变，第二项剪切应变能项用 $\Pi_{\text{H-R}}$ 中相应项代替，且其中剪应力项改用假设剪切应变 $\bar{\gamma}$ 代替，则可以得到 $\Pi_{\text{H-R}}$ 的表达式

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{H-R}}=&\int_0^l\frac{1}{2}EI\kappa^2\mathrm{d}x+\int_0^l\frac{GA}{k}\bar{\gamma}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta\right)\mathrm{d}x\\&-\int_0^l\frac{1}{2}\frac{GA}{k}\bar{\gamma}^2\mathrm{d}x-\int_0^l qw\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{9.2.59}$$

为讨论方便，上式未列入与集中力和与集中力矩的有关项。经有限离散，并采取高斯积分，则上式可以改写成

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{H-R}}=\sum_{e=1}^{M}\sum_{i=1}^{m}\Big(&\frac{1}{2}EIlH_i\kappa_i^2+\frac{GAl}{k}H_i\bar{\gamma}_i\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta\right)\Big|_{\xi_i}\\&-\frac{1}{2}\frac{GAl}{k}H_i\bar{\gamma}_i^2-lH_iq_iw_i\Big)\end{aligned} \tag{9.2.60}$$

式中 M 是单元数，m 是积分点数($m=n-1$，n 是单元结点数)，l 是单元长度，H_i，ξ_i 分别是高斯积分的权系数和积分点位置。因为 κ^2，$\bar{\gamma}$ 是 $2(m-1)$ 次函数，$\bar{\gamma}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta\right)$ 是 $2m-1$ 次

函数，所以式中前三项的积分都是精确的。并因为$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta\right)\bigg|_{\xi_i}=\bar{\gamma}_i$，所以

$$\bar{\gamma}_i\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}-\theta\right)\bigg|_{\xi_i}=\bar{\gamma}_i^2 \tag{9.2.61}$$

代回(9.2.60)式，并写成离散前形式，则有

$$\Pi_{\text{H-R}}=\int_0^l\frac{1}{2}EI\kappa^2\mathrm{d}x+\int_0^l\frac{GA}{2k}\bar{\gamma}^2\mathrm{d}x-\int_0^l qw\mathrm{d}x=\Pi_p^* \tag{9.2.62}$$

这样就证明了采用假设剪切应变，在理论上是和采用混合变分原理相等价的。只是应注意到 Π_p^* 不再具有极值性，在解的附近只具有驻值。

(3) 替代插值函数(substitutive interpolation function)

在计算泛函的剪切应变能时，θ 采用低一阶，即和$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$同阶的插值函数以代替原来的插值函数。例如二结点单元，计算剪切应变时，θ 表示如下

$$\bar{\theta}=\bar{N}_1\theta_1+\bar{N}_2\theta_2 \tag{9.2.63}$$

其中　$\bar{N}_1=\bar{N}_2=\frac{1}{2}$

可以指出：对于 Timoshenko 梁单元，以上三种方法，实际上是完全等价的。其实质都是使$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$和 θ 在计算剪切应变能时保持同阶，进而保证 $\boldsymbol{K}_s$ 的奇异性，以避免 $h/l\to0$ 时出现的剪切锁死现象。但是在今后讨论的考虑剪切影响在内的 Mindlin 型板壳单元中，这三种方法在应用中可以是有区别的，因此也可能产生不尽相同的效果。

现在讨论 Timoshenko 梁单元的收敛性问题。因为 Π_p 中导数的最高阶数为 1，因此只要求 w 和 θ 的 0 阶导数在单元交界面上保持连续，即单元只要求 C_0 连续性。现在结点参数中包含了 w 和 θ，显然连续性得到了满足。至于完备性要求，单元应包含能够描述图 9.7 所示刚体运动和常应变状态的位移模式。刚体运动包含刚体横向位移和刚体转动两种模式；常应变状态包含常剪切应变和常弯曲应变两种模式。图 9.7 上还分别给出了对应上述四种模式的 w 和 θ 的函数表示。从这些函数表达式可以看到，只包含 w 一次函数的 2 结点单元缺少描述 $w=\frac{1}{2}cx^2$ 的常弯曲状态的位移模式。从以后算例中将可以看到，如

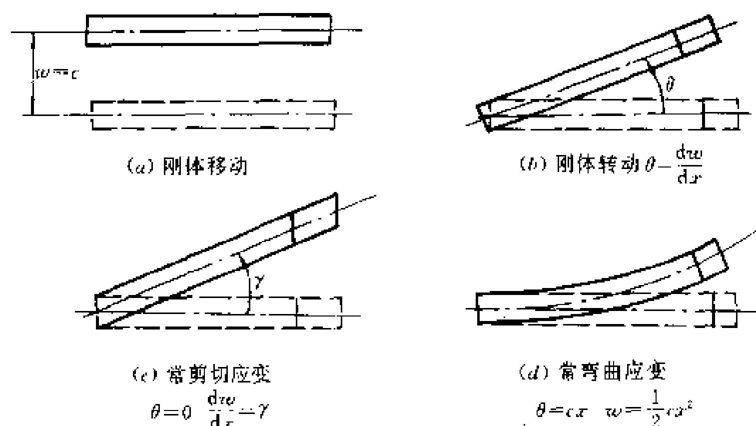


图 9.7　Timoshenko 梁完备性的要求

用 2 结点单元分析纯弯状态，必然伴生出剪切应变。其实我们在 5.5 节讨论 Wilson 非协调元时，即已指出，4 结元平面单元不能描述纯弯应力状态的缺点，而 2 结点 Timoshenko 梁单元从本质上可看成是在 4 结点平面单元中引入主从自由度而得到的，因此它也同样缺乏描述纯弯状态的能力。为此通常推荐采用 3 结点或 4 结点的 Timoshenko 梁单元，因为它们具有 2 次或 3 次的 w 函数，包含了描述纯弯应力状态的位移模式。

算例 分别利用经典梁单元和 Timoshenko 梁单元（各 1 个单元）计算图 9.8 所示悬臂梁在承受端部弯矩 M 和端部横向力 P 的端部挠度 δ。

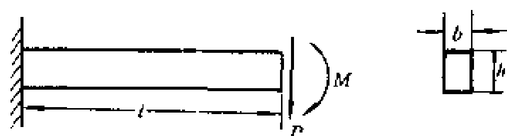


图 9.8 承受端部载荷的悬臂梁

1. 用经典梁单元求解

当用一个单元计算时，固定端条件是 $w_1=\left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_1=0$。只需要对载荷作用端的自由度 $w_2,\theta_2\left(=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)$ 形成求解方程。

(1) 端部受集中弯矩 M，求解方程是

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ M \end{Bmatrix}$$

从上式第 1 式，得到

$$\theta_2=\frac{2w_2}{l}$$

代回第 2 式，得到

$$\delta=w_2=\frac{Ml^2}{2EI}$$

(2) 端部受横向力 P，求解方程是

$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

从上式第 2 式，得到

$$\theta_2=\frac{3}{2}\frac{w_2}{l}$$

代回第 1 式，得到

$$\delta=w_2=\frac{Pl^3}{3EI}$$

从以上结果可以看出，利用一个单元求解，就可得到和材料力学的理论解完全相同的结果。这是由于经典梁单元中 w 是三次函数，它包含了上述两种受力状态所需要的位移函数。

2. 用 Timoshenko 梁单元求解

(1) 端部受集中弯矩 M，采用精确积分得到的求解方程是

$$\begin{bmatrix} \frac{GA}{kl} & -\frac{GA}{2k} \\ -\frac{GA}{2k} & \frac{GAl}{3k}+\frac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M \end{Bmatrix}$$

从上式第 1 式，得到

$$\theta_2 = \frac{2w_2}{l}$$

代回第 2 式得到

$$\delta = w_2 = \frac{Ml^2}{2EI\left(1+\frac{GAl^2}{kEI}\right)}$$

对于矩形截面，$k=\frac{6}{5}$，$A=bh$，$I=\frac{bh^3}{12}$。并有 $G=\frac{E}{12(1+\nu)}$，则

$$\delta = w_2 = \frac{Ml^2}{2EI\left(1+\frac{5}{1+\nu}\frac{l^2}{h^2}\right)}$$

(2) 端部受集中弯矩 M，采用减缩积分得到的求解方程是

$$\begin{bmatrix} \frac{GA}{kl} & -\frac{GA}{2k} \\ -\frac{GA}{2k} & \frac{GAl}{4k}+\frac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M \end{Bmatrix}$$

从上式第 1 式，得到

$$\theta_2 = \frac{2w_2}{l}$$

代回第 2 式，得到

$$\delta = w_2 = \frac{Ml^2}{2EI}$$

将以上结果和材料力学解答比较可见，当采用精确积分时，分母中增加了 $\frac{5}{1+\nu}\frac{l^2}{h^2}$ 因子，这是附加剪切应变的影响。虽然真实应力状态中并不存在剪切应变，但是由于 2 结点 Timoshenko 梁单元不能描述纯弯状态，导致虚假的附加剪切应变，此应变可表示如下

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \theta = \frac{w_2}{l} - \frac{x}{l}\theta_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)\frac{Ml}{EI}\frac{1}{\left(1+\frac{5}{1+\nu}\frac{l^2}{h^2}\right)}$$

虚假剪切应变对挠度 δ 的影响随着梁变薄而增大。当 $h/l \to 0$ 时 $\delta = w_2 \to 0$（这时 γ 也趋于 0）即发生剪切锁死现象。

而当采用减缩积分时，虽然 2 结点单元的 w 仍是线性分布，但是计算得到的 δ 仍和材料力学解答一致。

(3) 端部受横向力 P，精确积分计算结果是

$$\delta = w_2 = \frac{Pl^3}{3EI}\frac{\left(1+\frac{3(1+\nu)}{5}\frac{h^2}{l^2}\right)}{\left(1+\frac{5}{4(1+\nu)}\frac{l^2}{h^2}\right)}$$

(4) 端部受横向力 P,减缩积分计算结果是

$$\delta = w_2 = \frac{Pl^3}{4EI}\left(1 + \frac{4(1+\nu)}{5}\frac{h^2}{l^2}\right)$$

以上两个结果的分子中分别出现了$\frac{3(1+\nu)}{5}\frac{h^2}{l^2}$和$\frac{4(1+\nu)}{5}\frac{h^2}{l^2}$的因子,它们反映了剪切变形引起的附加挠度。当$\frac{h}{l}\to 0$时,这附加挠度也趋于零。这是合理的。不同的是在精确积分结果的分母中出现了$\frac{5}{4(1+\nu)}\frac{l^2}{h^2}$的因子。当 $h/l\to 0$ 时,它将使 $\delta\to 0$,即产生剪切锁死现象。而减缩积分则无附加因子,因此当 $h/l\to 0$ 时,不会产生剪切锁死。当然,计算结果和材料力学解答比较,仍存在 25%的误差。这是由于 2 结点 Timoshenko 单元,不像经典梁元在位移模式中精确地包含了三次函数所致。可通过增加单元数或改用高次单元来提高精度。

对于 3 结点以上的高次 Timoshenko 梁单元,虽然采用精确积分、不致发生剪切锁死,但是仍使单元偏于刚硬,所以仍建议采用减缩积分等方法以改善单元性能。

9.3 平面杆件系统

杆件系统是指由杆件组成的结构系统。如果组成结构的杆件不仅它们本身在几何上,而且所承受的载荷(因之它们的变形)都处于同一平面,则称之为平面杆件系统。反之,如不限于一个平面,则称之为空间杆件系统。杆件系统可以用杆-梁单元(以后简称杆单元)进行离散。但是一般情况,单元将不是单独以拉压、或扭转、或弯曲状态工作,而是以它们的共同作用工作。它们的单元特性矩阵将是几种不同单元特性矩阵的组合。再则,由于系统内各个杆单元通常不处于同一轴线,甚至不处于同一平面,进行结构分析时,首先要建立一个共用的总体坐标系,然后通过坐标转换将各个建立于单元局部坐标系的单元特性矩阵转换到总体坐标系。

为方便起见,首先在本节讨论平面杆件系统问题,而空间杆系问题则放在下一节讨论。

9.3.1 局部坐标系内平面杆单元的特性矩阵

图 9.9 所示是一平面杆系。其中每一杆件可能承受轴力和弯矩的共同作用。因此离散后单元的各个特性矩阵应是轴力单元和弯曲单元的组合。一般情况下,对于 n 个结点的单元在单元的局部坐标系中,结点位移参数可表示成

$$\boldsymbol{a}_i = [u_i \quad w_i \quad \theta_i]^{\mathrm{T}} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9.3.1}$$

单元刚度矩阵可以表示成

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^e & \boldsymbol{K}_{12}^e & \cdots & \boldsymbol{K}_{1n}^e \\ & \boldsymbol{K}_{22}^e & \cdots & \boldsymbol{K}_{2n}^e \\ \text{对} & & \ddots & \\ & \text{称} & & \boldsymbol{K}_{nn}^e \end{bmatrix} \tag{9.3.2}$$

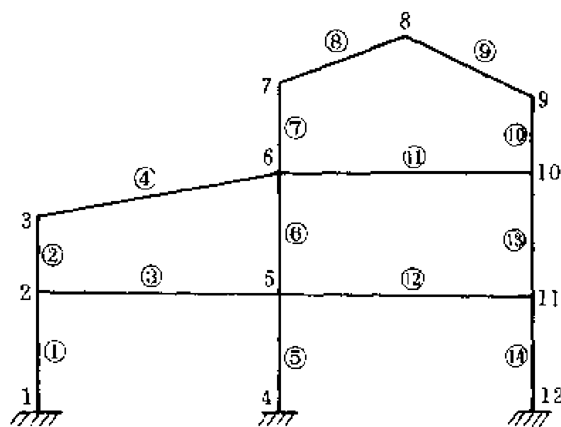


图 9.9 平面杆件系统

其中

$$K_{ij}^{e} = \begin{bmatrix} K_{ij}^{(a)} & 0 \\ 0 & K_{ij}^{(b)} \end{bmatrix} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{9.3.3}$$

$K_{ij}^{(a)}$，$K_{ij}^{(b)}$分别轴力单元和弯曲单元刚度矩阵的子矩阵。例如对于二结点单元，且弯曲单元采用经典梁单元的情况下，单元刚度矩阵可表示为

$$K^{e} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & 对 & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & 称 & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{9.3.4}$$

载荷向量可以有类似的表示

$$P^{e} = \begin{Bmatrix} P_1^{e} \\ P_2^{e} \\ \vdots \\ P_n^{e} \end{Bmatrix} \qquad P_i^{e} = \begin{Bmatrix} P_i^{(a)} \\ P_i^{(b)} \end{Bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9.3.5}$$

9.3.2 平面杆单元的坐标转换

如前所述，由于杆系内各单元的局部坐标 x，z 的方向各不相同，在进行结构分析时，需要建立统一的总体坐标系。图 9.10 所示为总体坐标系内的杆单元。总体坐标系用 $\bar{x}$，$\bar{z}$ 表示，前面已得到局部坐标系 x，z 内的单元特性矩阵，现在需要通过坐标转换，得到它们在总体坐标系内的表达式。

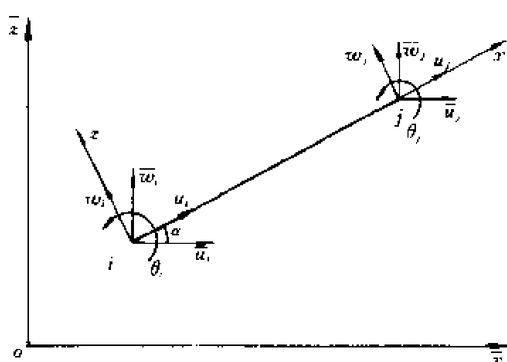


图 9.10　总体坐标内的杆单元

由于基本未知量是结点位移，我们只需要建立结点位移向量由局部坐标系到总体坐标系的转换关系，其它向量或矩阵的转换关系都可由它导出。

令总体坐标系中的结点位移向量表示为

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{a}}_n \end{Bmatrix}, \qquad \bar{\boldsymbol{a}}_i = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_i \end{Bmatrix} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{9.3.6}$$

局部坐标 x 轴和总体坐标 $\bar{x}$ 轴之间的夹角用 α 表示，以从 x 轴方向顺时针转到 $\bar{x}$ 轴方向为正，则 x 轴的方向余弦为

$$l_{x\bar{x}} = \cos(x,\bar{x}) = \cos\alpha \qquad l_{x\bar{z}} = \cos(x,\bar{z}) = \sin\alpha$$

z 轴的方向余弦是

$$l_{z\bar{x}} = \cos(z,\bar{x}) = -\sin\alpha \qquad l_{z\bar{z}} = \cos(z,\bar{z}) = \cos\alpha$$

线位移的转换关系是

$$\begin{aligned} u_i &= l_{x\bar{x}}\bar{u}_i + l_{x\bar{z}}\bar{w}_i \\ w_i &= l_{z\bar{x}}\bar{u}_i + l_{z\bar{z}}\bar{w}_i \end{aligned} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

截面转动在两个坐标中是相等的，即

$$\theta_i = \bar{\theta}_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

因此两个坐标系中单元结点位移向量的转换关系是

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{a}}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_0 & & 0 & \\ & \boldsymbol{\lambda}_0 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda}_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{a}}_n \end{Bmatrix} \tag{9.3.7}$$

其中：

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & l_{x\bar{z}} & 0 \\ l_{z\bar{x}} & l_{z\bar{z}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.3.8}$$

λ 称为坐标转换矩阵，λ_0 称为结点转换矩阵。反之我们可以写出总体坐标系中结点位移向量用局部坐标系中结点位移向量表示的表达式

$$\bar{a}^e = \lambda^{-1} a^e \tag{9.3.9}$$

因为

$$\lambda^{-1} = \lambda^T$$

所以(9.3.9)式又可写成

$$\bar{a}^e = \lambda^T a^e = \begin{bmatrix} \lambda_0^T & & & \\ & \lambda_0^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \tag{9.3.9$'$}$$

$$\lambda_0^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将(9.3.7)式代入有限元求解方程，并用 λ^T 前乘两端，就可得到总体坐标系内的单元刚度矩阵和载荷向量表达式如下

$$\bar{K}^e = \lambda^T K^e \lambda \tag{9.3.10}$$

$$\bar{P}^e = \lambda^T P^e \tag{9.3.11}$$

9.3.3 铰结点的处理

在杆件系统中会遇到一些杆件通过铰结点和其它杆件相联结，如图 9.11 中的杆件组成的框架结构，有 4 根杆件汇交于结点 4，其中杆件②与结点 4 铰接，其它杆则为刚接。在这种结点上应该注意到：

(1) 结点上各杆具有相同的线位移，但截面转动不相同。刚接于结点上的各杆具有相同的截面转动，而与之铰接的杆件却具有另外的截面转动。例如在图示结构中，在受载后，在结点 4，杆件③，④，⑥将具有相同的截面转动，而杆件②则具有与其它杆件不同的截面转动。

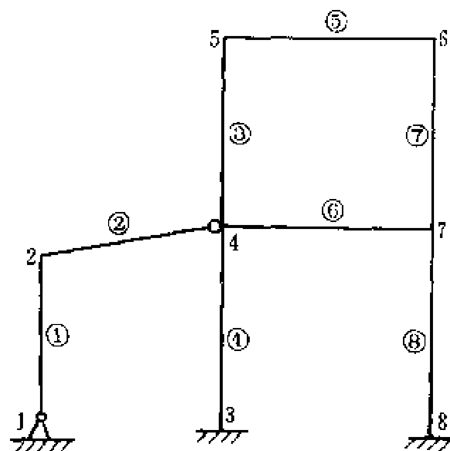


图 9.11 有铰结点的杆件系统

(2) 结点上具有铰接的杆端不承受弯矩，因此在结点上只有刚接的各杆杆端弯矩参与结点的力矩平衡。例如在图示结构中，杆件②在铰接端的杆端弯矩为零，只有杆件③，④，⑥在结点 4 上与外弯矩保持平衡。

这时单元②的铰接端，只有位移自由度参加总体集成，而转动自由度是不参加集成的。因此对于单元②来说，此自由度属于内部自由度性质，为算法上的方便起见，在总体集成前，应在单元层次上将此自由度凝聚掉(结构力学中称之为自由度释放)。具体方法和以前有关章、节中已采用过的凝聚自由度方法相同。现以二结点平面杆单元、且弯曲单元采用经典梁单元的情况为例将凝聚自由度方法具体化。此单元参加系统集成前、在自身局部

坐标系内的有限元方程可以表示如下：

$$\begin{bmatrix} K_0 & K_{0c} \\ K_{c0} & K_{cc} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_c \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_c \end{Bmatrix}^e \tag{9.3.12}$$

其中 a_c 是单元中需要凝聚掉的自由度，a_0 是单元中需要保留、也即将参加系统总体集成的自由度。单元刚度矩阵和结点载荷列阵也表示成了相应的分块形式。

从以上方程的第 2 式，可以得到

$$a_c = K_{cc}^{-1}(P_c - K_{c0}a_0) \tag{9.3.13}$$

将上式代回(9.3.12)式的第 1 式，就可以得到凝聚后的单元方程

$$K^* a_0 = P_0^* \tag{9.3.14}$$

其中

$$K^* = K_0 - K_{0c}K_{cc}^{-1}K_{c0}$$

$$P_0^* = P_0 - K_{0c}K_{cc}^{-1}P_c \tag{9.3.15}$$

现回到图 9.11 所示结构的单元②，经凝聚后在单元局部坐标系内的单元刚度矩阵 K^* 可以表示如下：

$$K^* = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \tag{9.3.16}$$

凝聚前的单元刚度矩阵 K^e 是 6×6 矩阵，经凝聚后单元刚度矩阵 K^* 是 5×5 矩阵。为便于统一程序，K^* 可仍保留原来的阶数。对于现在的情况，可在 K^* 上增加上全部为零元素的第 6 行和第 6 列。

凝聚后的结点载荷列阵 P_0^* 也可按(9.3.15)式算出，并为使之仍保留为凝聚前的阶数，增加零元素在它的第 6 个元素位置。

在结构系统中，两端都为铰接的单元，也可按上述方法处理，在参加系统集成前，先将单元两端的转动自由度凝聚掉，并在相关的行和列上补充以零元素，使单元刚度矩阵仍保留原来的阶数，以利于程序的统一。仍以上述单元为例，经凝聚并保留原来阶数的单元刚度矩阵可以表示如下

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.3.14}$$

以上讨论是以经典梁单元为例进行的，实际上对 Timoshenko 梁单元，包括对它的多结点形式，也可以按同样的方法处理，这里不一一列举，读者可以作为习题加以练习。

9.4 空间杆件系统

9.4.1 局部坐标系内空间杆单元的特性矩阵

空间杆单元和平面杆单元的区别在于：杆件除了可能承受轴力和弯矩的作用而外，还可能承受扭矩的作用。而且弯矩可能同时在两个坐标面内存在。图 9.12 所示是一 2 结

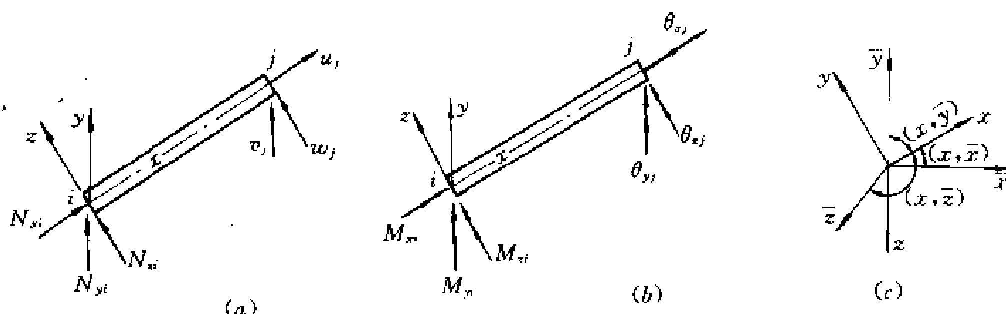


图 9.12 二结点空间杆单元

(a)力和线位移 (b) 力矩和截面转动 (c) 局部坐标系和总体坐标系

点空间杆单元的结点位移和结点力。每个结点有 6 个自由度，即有 6 个广义位移和 6 个广义力，它们是

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \end{Bmatrix} \tag{9.4.1}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_i &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^{\mathrm{T}} \qquad (i = 1,2) \\ \boldsymbol{P}_i &= [N_{xi} \quad N_{yi} \quad N_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi}]^{\mathrm{T}} \qquad (i = 1,2) \end{aligned} \tag{9.4.2}$$

式中 u_i,v_i,w_i 为结点 i 在局部坐标系中三个方向的线位移；$\theta_{xi},\theta_{yi},\theta_{zi}$为结点 i 处截面绕三个坐标轴的转动；θ_{xi}代表截面的扭转，θ_{yi},θ_{zi}分别代表截面在 xz 和 xy 坐标面内的转动；N_{xi}是结点 i 的轴向力，$N_{yi}N_{zi}$是结点 i 在 xy 及 xz 面内的剪力；M_{xi}是结点 i 的扭矩，M_{yi}，M_{zi}是结点 i 在 xz 及 xy 面内的弯矩。

杆单元横截面面积为 A，在 xz 面内截面惯性矩为 I_y，在 xy 面内的截面惯性矩为 I_z，单元的扭转惯性矩为 J。长度为 l，材料弹性模量和剪切模量分别为 E 和 G 的 2 结点空间杆单元(弯曲采用经典梁理论)在单元局部坐标系内的刚度矩阵可以表示如下

$$
\boldsymbol{K}^e=\left[\begin{array}{cccccc:cccccc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\
 & & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
 & & & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\
 & & & & & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\
\hdashline
 & & & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \text{对} & & & & & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\
 & & & & & & & & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & \\
 & & & & \text{称} & & & & & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{l}
\end{array}\right]
\tag{9.4.3}
$$

当空间杆单元的一端或两端是铰接情况时，可按上节中凝聚自由度的方法，对有关的自由度进行凝聚处理，并为算法上的方便，在相关的行和列上补充以零元素，使单元刚度矩阵仍保持为 12×12 阶矩阵。例如两端都是铰接的空间杆单元经上述凝聚和扩充处理以后，单元刚度矩阵将是如下形式

$$
\boldsymbol{K}^e=\left[\begin{array}{cccccc:cccccc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
 & \text{对} & & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \text{称} & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0
\end{array}\right]
\tag{9.4.4}
$$

9.4.2 空间杆单元的坐标转换

为分析空间杆件系统，需要将上节在单元局部坐标系内建立的单元特性矩阵转换到系统的总体坐标系，转换的原理和方法和平面杆单元的坐标转换相同。只是对应于(9.3.8)式所表示的结点坐标转换矩阵 λ_0，现在应改写成

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{01} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda}_{01} \end{bmatrix} \tag{9.4.5}$$

其中

$$\boldsymbol{\lambda}_{01} = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & l_{x\bar{y}} & l_{x\bar{z}} \\ l_{y\bar{x}} & l_{y\bar{y}} & l_{y\bar{z}} \\ l_{z\bar{x}} & l_{z\bar{y}} & l_{z\bar{z}} \end{bmatrix}$$

式中 $l_{x\bar{x}}, l_{x\bar{y}}, l_{x\bar{z}}$是局部坐标 x 对总体坐标 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 的三个方向余弦，即

$$l_{x\bar{x}} = \cos(x,\bar{x}),\ l_{x\bar{y}} = \cos(x,\ \bar{y}),\ l_{x\bar{z}} = \cos(x,\bar{z}) \tag{9.4.6}$$

其余 $l_{y\bar{x}}, l_{y\bar{y}}, \cdots, l_{z\bar{z}}$分别局部坐标 y, z 对总体坐标的方向余弦。

本节空间杆单元是以弯曲基于经典梁理论的二结点单元为例进行讨论的，但其原理和方法完全适用于弯曲基于 Timoshenko 梁理论的单元，包括它的多结点形式。

9.5 小 结

本章在结构有限单元概论一节对于杆(梁)、板壳一类结构力学单元特点的分析，以及通过主从自由度方法或相对自由度方法克服实际分析中的数值上困难的原理，不仅在本章杆件单元得到体现和应用，而且在今后几章关于板壳有限元的讨论中将得到进一步的应用。

本章讨论了基于经典梁弯曲理论的梁单元和基于 Timoshenko 梁理论的梁单元，后者不仅使梁单元降低了交界面上的连续性要求，即从 C_1 连续性降低为 C_0 连续性，而且考虑了横向剪切变形的影响，从而扩大了它的应用范围。但是应注意到为满足完备性要求应避免使用 2 结点的 Timoshenko 单元，更为重要的是应避免用于 h/l 很小情况时可能出现的剪切锁死。为克服后一问题，本章初步讨论了减缩积分、假设剪切应变、替代剪切插值函数等几种方法。这些方法在今后几章关于板壳单元讨论中将得到应用，并将作进一步的讨论。

本章关于杆件系统的讨论所涉及两个基本问题：不同受力状态单元特性矩阵的组合，以及单元集成为结构系统时的坐标转换，同样对今后空间板壳结构的讨论是有普遍意义的。

最后应指出：本章讨论只限于等截面的直杆，同时在扭转单元的讨论中忽略约束扭转的影响，在空间杆系的讨论中假设截面弯曲中心和扭转中心重合(即截面有二个相互垂直对称面情况)。在实际结构分析中可能会遇到不满足上述条件的情况，例如变截面杆件、平面或空间曲杆，非规则截面杆件等，对本章所讨论的各种单元的表达格式和分析方法尚需作必要的修正和补充，现已有相当多的文献可以查阅，在此不可能一一涉及，但是本章

的讨论仍是提供了足够的比较系统的基础。

习　题

9.1 用经典梁单元计算以下问题：

(1) 求受均布载荷 q 悬臂梁的端部挠度(用 1,2 个单元)。

(2) 求受均布载荷 q 两端简支梁的中点挠度(用 1,2 个单元)。

(3) 求受均布载荷 q 两端固支梁的中点挠度(用 2,4 个单元)。

列表将计算结果和材料力学解答进行比较,并分析产生误差的原因。

9.2 根据剪切应变能等效的原理,计算圆形截面和矩形截面的剪切校正因子。

9.3 导出考虑剪切梁单元的刚度矩阵(9.2.45)式。

9.4 分别用精确积分和减缩积分计算 3 结点 Timoshenko 梁单元的 $\boldsymbol{K}_s^{(e)}$,并检查它们是否能避免剪切锁死,并分析其原因。

9.5 如采用假设剪切应变或替代剪切插值函数的方法于 3 结点 Timoshenko 梁单元,列出各自的有关表达式,并论证它们和减缩积分方法的等价性。

9.6 分别用 2 个 2 结点和 1 个 3 结点 Timoshenko 梁单元计算悬臂梁承受(1)端部弯矩 M；(2) 端部横向力 P；(3) 均布载荷 q 时的端点挠度，将结果和材料力学解比较，并分析误差的原因。

9.7 导出(9.3.16)式,如何理解此式的力学意义。

9.8 如何利用凝聚转动自由度的方法计算承受均布载荷 q 的两端简支梁的中点挠度,并将用 1 个和 2 个单元进行计算的步骤和结果和习题 1 的步骤和结果进行比较。

9.9 在杆件系统中,如不采用凝聚自由度的方法,如何实现铰接端条件,并比较算法上的利弊。

9.10 对于平面杆系中一端铰接和二端铰接的 2 结点 Timoshenko 梁单元,导出它经凝聚和扩展后的单元刚度矩阵。

9.11 如何采用相对自由度方法避免图 9.13 所示 4 结点和 6 结点平面元分析梁弯曲问题时可能出现的数值困难,并列出它的表达格式(提示：以顶面和底面结点对的位移平均值和相差值作为新的自由度)。



图 9.13　用于梁弯曲分析的平面元

9.12 试应用主从自由度的原理将上题所列的二维元蜕化为 Timoshenko 梁单元。

附录　平面杆件系统的有限元分析程序

本程序是一个教学程序，适用于计算平面刚架和平面框架。由于采用了释放自由度的概念，单元库中只有一种单元却能适应平面杆系各种刚、铰结单元的计算。

程序结构和特点：

(1) 主程序采用模块结构，各子程序功能清晰，便于改进或增加程序功能。

(2) 用各种输出参数控制一些中间结果的输出，如单元特性、单元刚度矩阵、总刚度矩阵、载荷向量等，便于教学使用。

(3) 在主程序中采用定界数组，便于初学者理解①。

(4) 可连续计算多个结构，每个结构可连续计算多种工况的载荷。一次准备数据，运行迅速，使用方便，运行过程有屏幕监控。

Ⅰ．平面刚架主程序框图及主要子程序功能

平面刚架 FRAME 主程序框图　如附图 9.1。

框图中主要符号意义见Ⅱ平面刚架程序的使用说明。

主要子程序的功能

1. Subroutine LAI

计算单元参数如杆长，单元对整体坐标倾角的正、余弦，单元的刚度系数 EI/l 及 EA/l。

计算带宽 ND。

2. Subroutine SKK

计算单元刚度矩阵并形成结构总刚度矩阵。

3. Subroutine PP

形成结构等效结点载荷列阵。

4. Subroutine BC

引入给定位移，消除结构总刚度矩阵的奇异性。

5. Subroutine Gauss

高斯半带宽顺序消去法求解线性代数方程组。

6. Subroutine MNQ

求各杆杆端内力 M,N,Q。

7. Subroutine RELK

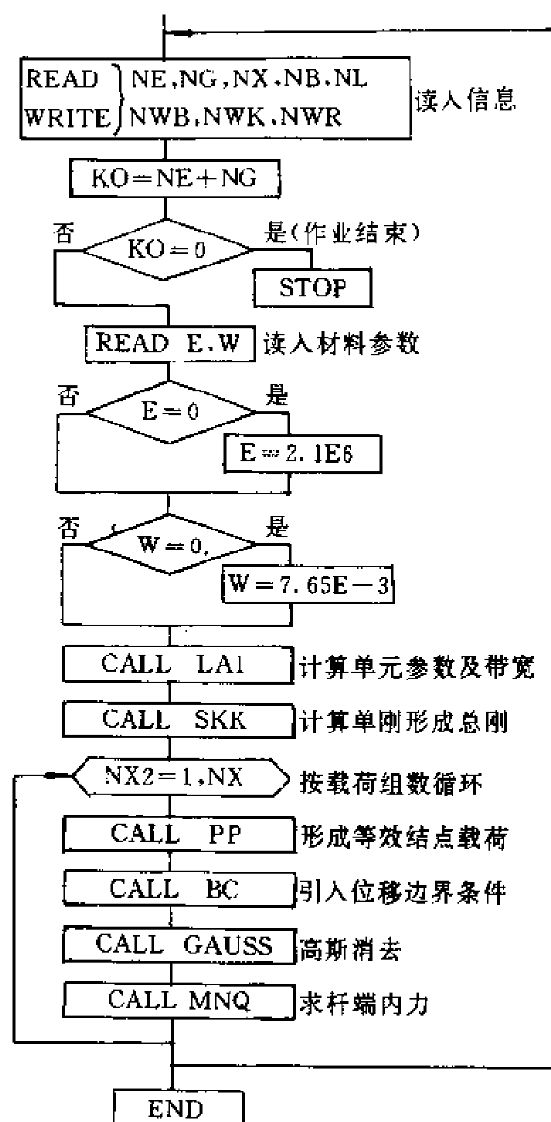
对单元刚度矩阵进行铰结点的自由度释放。

8. Subroutine RELF

对单元等效结点载荷进行相应的自由度释放。

---

① 主程序中可调数组的使用见 7.2 节有限元分析的本体程序



附图 9.1 FRAME 主程序框图

Ⅱ. 平面刚架程序的使用说明及源程序

《FRAME 程序使用说明》

一、输入数据格式说明——输入数据依次如下：

1. NE,NG,NX,NB,NL,NWB,NWK,NWR

NE：结构的单元总数

NG：结构的结点总数

NX：作用载荷的组数

NB：给定约束的总个数

NL：有铰结点的单元总数

NWB：几何尺寸的输出控制参数

NWK：单元刚度矩阵与总刚度矩阵的输出控制参数

NWR：固端力与等效结点载荷列阵的输出控制参数

输出控制参数 =1 输出

=0 不输出

2. E,W——材料参数

E：弹性模量

W：比重

3. XY(2,NG)——结点坐标数组

XY(1, I)：第 I 个结点的 X 坐标

XY(2, I)：第 I 个结点的 Y 坐标

按照结点编码顺序填写。

4. IJ(2,NE)——单元结点编码数组

IJ(1, I)：第 I 个单元起始结点号

IJ(2, I)：第 I 个单元末端结点号

按照单元编码顺序填写。

5. AI(2,NE)——单元几何参数数组

AI(1, I)：第 I 个单元的横截面面积 A

AI(2, I)：第 I 个单元的横截面惯性矩 I

按照单元编码顺序填写。

若 NL>0，则填 6

6. LN(2,NL)——具有铰结点单元的信息数组

LN(1, I)：　第 I 个具有铰结点的单元号

LN(2, I)=1：第 I 个单元上起始结点为铰结点

=2：第 I 个单元上末端结点为铰结点

=3：第 I 个单元上两端皆为铰结点

按照单元编码顺序填写。

7. NBC(2,NB)——给定位移的信息数组

NBC(1, I)：　第 I 个给定位移所在的结点号

NBC(2, I)=0：给定水平位移

=1：给定垂直位移

=2：给定转角

=3：固定端

=4：铰支座

8. ZBC(NB)——给定位移值数组

ZBC(I)：第 I 个约束的给定位移值(以坐标正向为正)

9. NP,NQ,NF,NW——载荷信息

NP：作用于结构所有单元上的集中载荷的总个数

(不包括结点上的集中载荷。单元上非坐标方向的集中载荷应分解为坐

标方向的集中载荷并以分解后的个数计算）

NQ：作用于结构所有单元上的均布载荷的总个数

NF：作用于结构结点上的集中载荷个数

NW：=1　考虑结构的自重

=0　不考虑结构的自重

若 NP>0，则填 10，11

10. MP(2，NP)——作用于单元上的集中载荷信息数组

MP(1，I)：　第 I 个集中载荷作用的单元号

MP(2，I)=0　局部坐标中的垂直载荷

=1　局部坐标中的水平载荷

=2　整体坐标中的垂直载荷　（见附图 9.2）

=3　整体坐标中的水平载荷

=4　局部坐标中的弯矩

11. ZMP(2，NP)——集中载荷的作用位置与值数组

ZMP(1，I)：附图 9.2 中 A 的值

ZMP(2，I)：附图 9.2 中 P(或 H 或 M)的值，与图中力的方向一致时填正值

若 NQ>0，则填 12，13

12. MQ(2，NQ)——作用于结构单元上的均布载荷信息数组

MQ(1，I)：　第 I 个均布载荷作用的单元号

MQ(2，I)=0：局部坐标中的垂直均布载荷

=1：整体坐标中的垂直均布载荷

=2：整体坐标中的水平均布载荷　（见附图 9.3）

=3：整体坐标中的垂直均布载荷

=4：整体坐标中沿杆轴作用的水平均布载荷

13. ZMQ(2，NQ)——均布载荷的作用位置与值数组

ZMQ(1，I)：附图 9.3 中 A 的值

ZMQ(2，I)：附图 9.3 中 Q 的值，凡均布力与图中力的方向一致时填正值

若 NF>0，则填 14，15

14. MNF(2，NF)——结点上的集中载荷信息数组

MNF(1，I)：作用结点力的结点号

MNF(2，I)：=0　水平力(取总体坐标 X 方向)

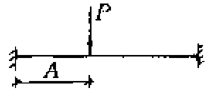
=1　垂直力(取总体坐标 Y 方向)

=2　力偶矩

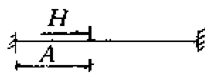
15. ZMF(NF)——结点上集中载荷的值数组

垂直力以总体坐标 Y 轴负向(向下)为正，水平力与总体坐标 X 轴正向一致为正，力偶矩以顺时针方向为正(见附图 9.4)。

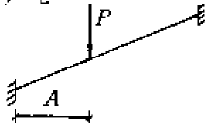
MP(2,I)=0



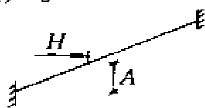
MP(2,I)=1



MP(2,I)=2



MP(2,I)=3

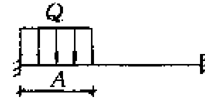


MP(2,I)=4

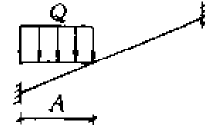


附图 9.2

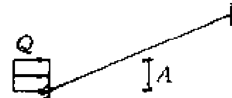
MQ(2,I)=0



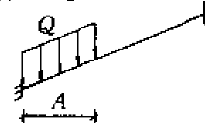
MQ(2,I)=1



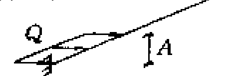
MQ(2,I)=2



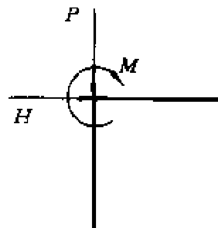
MQ(2,I)=3



MQ(2,I)=4



附图 9.3



附图 9.4

二、输入数据格式——建立DATA文件：

1. NE,NG,NX,NB,NL,NWB,NWK,NWR———————— 8 个整型数
2. E,W———————————————— 2 个实型数
3. XY(2,NG)———————————————— 2×NG 个实型数
4. IJ(2,NE)———————————————— 2×NE 个整型数
5. AI(2,NE)———————————————— 2×NE 个实型数

当 NL>0 时,填 6

6. LN(2,NL)———————————————— 2×NL 个整型数
7. NBC(2,NB)———————————————— 2×NB 个整型数
8. ZBC(NB)———————————————— NB 个实型数
9. NP,NQ,NF,NW———————————————— 4 个整型数

当 NP>0 时，填 10，11

10. MP(2,NP)--2×NP 个整型数

11. ZMP(2,NP)--2×NP 个实型数

当 NQ>0 时，填 12，13

12. MQ(2,NQ)--2×NQ 个整型数

13. ZMQ(2,NQ)--2×NQ 个实型数

当 NF>0 时，填 14，15

14. MNF(2,NF)--2×NF 个整型数

15. ZMF(NF)--NF 个实型数

若 NX>1，即多组载荷情况，重复 9～15，若为多个结构则重复 1～15。

16. 当全部数据填完后，应加 8 个零(整型)以结束计算。

0,0,0,0,0,0,0,0---8 个整型数

```
C**********************************************************************C
C                                                                      C
C                    FR ------- PROGRAM OF FRAME          96.2         C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
C
C---THE INPUT DATAS(IN SEQUENCE)---
C 1.NE,NG,NX,NB,NL,NWB,NWK,NWR
C    NE          TOTAL NUMBER OF ELEMENTS IN THE STRUCTURE
C    NG          TOTAL NUMBER OF NODAL POINTS IN THE STRUCTURE
C    NX          TOTAL NUMBER OF LOAD GROUPS
C    NB          TOTAL NUMBER OF RESTRAINED BOUNDARY FREEDOMS
C    NL          TOTAL NUMBER OF ELEMENTS WHICH HAS HINGED NODAL POINTS
C    NWB         OUTPUT CONTROL NUMBER FOR THE GEOMETRICAL PROPERTY
C                ARRAY BNE(5,NE)
C                NWB=1------OUTPUT
C                NWB=0------NO OUTPUT
C    NWK         OUTPUT CONTROL NUMBER FOR THE STRUCTURE STIFFNESS
C                MATRIX K(3*NG,ND) AND ELEMENT STIFFNESS MATRIX SK(10,NE)
C                NWK=1------OUTPUT
C                NWK=0------NO OUTPUT
C    NWR         OUTPUT CONTROL NUMBER FOR THE LOAD DATA PQ(6,NE) AND
C                THE LOAD VECTOR P(NT)
C                NWR=1------OUTPUT
C                NWR=0------NO OUTPUT
C 2.E,W
C    E           YOUNG'S MODULUS
C    W           POSSION'S RATIO
C 3.XY(2,NG)     THE COORDINATES OF THE NODAL POINTS
C 4.IJ(2,NE)     THE ELEMENT NODAL CODES
C                IJ(1,I)------THE FIRST NODAL CODE OF I-TH ELEMENT
C                IJ(2,I)------THE SECOND NODAL CODE OF I-TH ELEMENT
```

```
C 5.AI(2,NE)      THE GEOMETRIC VALUES OF ELEMENTS
C                 AI(1,I)------THE CROSS-SECTION AREA OF I-TH ELEMENT
C                 AI(2,I)------THE CROSS-SECTION INERTIA MOMENT OF I-TH ELEMENT
C 6.LN(2,NL)      THE INFORMATION OF ELEMENTS HAVING HINGED NODAL POINTS
C                 LN(1,I)------THE ELEMENT CODE
C                 LN(2,I)=1----LEFT HINGE
C                 LN(2,I)=2----RIGHT HINGE
C                 LN(2,I)=3----BOTH LEFT AND RIGHT HINGES
C 7.NBC(2,NB)     THE INFORMATION OF RESTRAINED BOUNDARY
C                 NBC(1,I)------THE NODAL CODE
C                 NBC(2,I)=0----HORIZONTAL DISPLACEMENT IS PRESCRIBED
C                 NBC(2,I)=1----VERTICAL DISPLACEMENT IS PRESCRIBED
C                 NBC(2,I)=2----ROTATING ANGLE IS PRESCRIBED
C                 NBC(2,I)=3----FIXED END
C                 NBC(2,I)=4----HINGED END
C 8.ZBC(NB)       THE PRESCRIBED VALUES OF RESTRAINED BOUNDARY
C 9.NP,NQ,NF,NW
C    NP           TOTAL NUMBER OF CONCENTRATED LOADS APPLIED TO THE
C                 ELEMENTS
C    NQ           TOTAL NUMBER OF UNIFORM LOADS APPLIED TO THE ELEMENTS
C    NF           TOTAL NUMBER OF CONCENTRATED LOADS APPLIED TO NODES
C    NW           NW=1------THE WEIGHT OF ELEMENTS IS CONSIDERED
C                 NW=0------THE WEIGHT OF ELEMENTS IS NEGLECTED
C 10.MP(2,NP)     THE INFORMATION OF CONCENTRATED LOADS APPLIED TO THE
C                 ELEMENTS
C                 MP(1,I)------THE ELEMENT CODE
C                 MP(2,I)=0----VERTICAL CONCENTRATED LOAD IN LOCAL
C                              COORDINATES
C                 MP(2,I)=1----HORIZONTAL CONCENTRATED LOAD IN LOCAL
C                              COORDINATES
C                 MP(2,I)=2----VERTICAL CONCENTRATED LOAD IN GLOBAL
C                              COORDINATES
C                 MP(2,I)=3----HORIZONTAL CONCENTRATED LOAD IN GLOBAL
C                              COORDINATES
C                 MP(2,I)=4----CONCENTRATED MOMENT
C 11.ZMP(2,NP)    THE VALUES OF THE LOADS AND THEIR POSITIONS
C                 ZMP(1,I)-----THE HORIZONTAL OR VERTICAL PROJECTIVE
C                              DISTANCE FROM LEFT NODAL POINT TO THE POINT
C                              AT WHICH THE CONCENTRATED LOAD IS APPLIED
C                 ZMP(2,I)-----THE VALUE OF THE CONCENTRATED LOAD
C 12.MQ(2,NQ)     THE INFORMATION OF UNIFORM FORCES APPLIED TO THE
C                 ELEMENTS
C                 MQ(1,I)------THE ELEMENT CODE
C                 MQ(2,I)=0----VERTICAL UNIFORM LOAD IN LOCAL COORDINATES
C                 MQ(2,I)=1----VERTICAL UNIFORM LOAD IN GLOBAL COORDINATES
C                 MQ(2,I)=2----HORIZONTAL UNIFORM LOAD IN GLOBAL COORDINATES
C                 MQ(2,I)=3----VERTICAL SLOPE UNIFORM LOAD IN GLOBAL
C                              COORDINATES
C                 MQ(2,I)=4----HORIZONTAL SLOPE UNIFORM LOAD IN GLOBAL
```

```
C                           COORDINATES
C 14.ZMQ(2,NQ) THE INFORMATION OF THE LOADS AND THEIR POSITIONS
C              ZMQ(1,I)----THE HORIZONTAL OR VERTICAL PROJECTIVE
C                          DISTANCE FROM LEFT NODAL POINT IN WHICH THE
C                          UNIFORM LOAD IS APPLIED
C              ZMQ(2,I)-----THE VALUE OF THE UNIFORM LOAD
C 14.MNF(2,NF) THE INFORMATION OF CONCENTRATED LOADS APPLIED TO
C              THE NODAL POINTS
C              MNF(1,I)-----THE NODAL POINT CODE
C              MNF(2,I)=0---HORIZONTAL LOAD
C              MNF(2,I)=1---VERTICAL LOAD
C              MNF(2,I)=2---CONCENTRATED MOMENT
C 15.ZMF(NF)   THE VALUES OF THE CONCENTRATED NODAL LOADS

C------------------------------------------------------------------------------
C
C   ARRANGEMENT OF ADJUSTABLE ARRAYS
C
C      ARRAY    A(10000)              ARRAY    IB(5000)
C      A(1)       XY(2,NG)            IB(1)       IJ(2,NE)
C      A(NN1)     AI(2,NE)            IB(II1)     LN(2,NL)
C      A(NN2)     ZBC(NB)             IB(II2)     NBC(2,NB)
C      A(NN3)     BNE(5,NE)           IB(II3)     MPQ(2,NPQ)
C      A(NN4)     SK(10,NE)           IB(II4)     MNF(2,NF)
C      A(NN5)     K(NT,ND)            IB(II5)     LIMIT NEEDED
C      A(NN6)     P(NT)
C      A(NN7)     ZPQ(NPQ)
C      A(NN8)     ZMF(NF)
C      A(NN9)     PQ(6,NE)
C      A(NN10)    LIMIT NEEDED
C
C   MAIN PROGRAM
C
      DIMENSION A(10000),IB(5000)
      COMMON /NN/NE,NG,NT,ND
      COMMON /FFF/NF,NP,NQ,NW,NX
      COMMON /EW/E,W
      COMMON /NWW/NWB,NWK,NWR
      CHARACTER*12 IN,OUT
      WRITE(*,*)'     '
      WRITE(*,*)'   PLEASE INPUT THE INPUT-FILE   NAME (A<12)'
      WRITE(*,*)'     '
      READ(*,5) IN
      WRITE(*,*)'     '
      WRITE(*,*)'   PLEASE INPUT THE OUTPUT-FILE NAME (A<12)'
      WRITE(*,*)'     '
      READ(*,5) OUT
    5 FORMAT(A12)
      OPEN(2,FILE=IN, STATUS='OLD')
      OPEN(1,FILE=OUT,STATUS='UNKNOWN')
```

```
      IA=10000
      IBB=5000
10    READ (2,*)NE,NG,NX,NB,NL,NWB,NWK,NWR
      K0=NE+NG
      IF(K0.EQ.0) STOP 0000
      WRITE (1,40)
      WRITE (1,50)NE,NG,NX,NB,NL,NWB,NWK,NWR
      NT=3*NG
      NX1=NX
      NL1=NL
      READ (2,*)E,W
      IF (E.LT.1E-5) E=2.1E7
      IF (W.LT.1E-10) W=7.85
      WRITE (1,60) E,W
      IF(NL.EQ.0) NL1=1
      II1=2*NE+1
      II2=II1+2*NL1
      II3=II2+2*NB
      NN1=2*NG+1
      NN2=NN1+2*NE
      NN3=NN2+NB
      NN4=NN3+5*NE
      CALL LAI(NE,NG,ND,NL,NL1,A(NN3),A(1),IB(1),A(NN1),IB(II1),NB,
     *          IB(II2),A(NN2))
      NN5=NN4+10*NE
      NN6=NN5+NT*ND
      NN7=NN6+NT
      CALL SKK(NT,ND,NE,NL,NL1,A(NN3),A(NN5),A(NN4),IB(1),IB(II1))
20    NX2=NX-NX1+1
      WRITE (1,70) NX2
      READ (2,*) NP,NQ,NF,NW
      WRITE(1,30) NP,NQ,NF,NW
30    FORMAT(/10X,'NP=',I3,5X,'NQ=',I3,5X,'NF=',I3,5X,'NW=',I3/)
      NP1=NP
      NQ1=NQ
      NF1=NF
      IF(NP1.EQ.0) NP1=1
      IF(NQ1.EQ.0) NQ1=1
      IF(NF1.EQ.0) NF1=1
      NQP=2*(NP1+NQ1)
      II4=II3+NQP
      II5=II4+NF1-1
      NN8=NN7+NQP
      NN9=NN8+NF1
      NN10=NN9+6*NE-1
      IF(II5.GT.IBB) GOTO 80
      IF(NN10.GT.IA)  GOTO 90
      CALL PP(NT,NE,NL,NL1,NPQ,NF1,A(NN3),A(NN6),A(NN9),
```

```
     *           IB(1),IB(II1),IB(II3),A(NN7),IB(II4),A(NN8))
      CALL BC(NT,ND,NB,NX,NX1,A(NN5),A(NN6),IB(II2),A(NN2))
      CALL GAUSS(NT,ND,NX,NX1,A(NN5),A(NN6))
      CALL MNQ(NE,NT,IB(1),A(NN3),A(NN4),A(NN6),A(NN9))
      NX1=NX1-1
      IF (NX1.EQ.0) GO TO 10
      GO TO 20
 40   FORMAT (//3X,'******************************'
     *         '   FRAME    ******************************',/)
 50   FORMAT (/10X,'NE=',I2,5X,'NG=',I2,5X,'NX=',I2,5X,'NB=',I2,5X,
     *           'NL=',I2,/10X,'NWB=',I1,5X,'NWK=',I1,5X,'NWR=',I1)
 60   FORMAT (/10X,'E=',1PE13.5,20X,'W=',1PE13.5)
 70   FORMAT (/10X,'EXTERNAL LOAD (',I3,' )')
 80   WRITE(1,85) II5,IBB
 85   FORMAT(/2X,'EXCEED THE LIMIT OF ARRAY IB ',I5,5X,'>IBB=',I5)
      STOP 9999
 90   WRITE(1,95) NN10,IA
 95   FORMAT(/2X,'EXCEED THE LIMIT OF ARRAY A ',I5, 5X,'>IA=',I5)
      STOP 8888
      END

      SUBROUTINE LAI(NE,NG,ND,NL,NL1,BNE,XY,IJ,AI,LN,NB,NBC,ZBC)
C**********************************************************************C
C       1                                                              C
C           CALCULATE PARAMETERS OF ELEMENTS                           C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
C
C   BNE(5,NE): THE MATERIAL AND GEOMETRICAL PROPERTY ARRAY
C              BNE(1,I):THE LENGTH OF I-TH ELEMENT
C              BNE(2,I):THE SIN OF I-TH ELEMENT AXIS
C              BNE(3,I):THE COS OF I-TH ELEMENT AXIS
C              BNE(4,I):THE VALUE OF (EA/L) FOR I-TH ELEMENT
C              BNE(5,I):THE VALUE OF (EI/L) FOR I-TH ELEMENT
C
      DIMENSION BNE(5,NE),IJ(2,NE),NBC(2,NB),ZBC(NB)
      DIMENSION XY(2,NG),LN(2,NL1),AI(2,NE)
      COMMON /EW/E,W
      COMMON /NWW/NWB,NWK,NWR
      REAL L
      ND=0
      READ (2,*) XY
      READ (2,*) IJ
      READ (2,*) AI
      WRITE (1,30)
      WRITE (1,40) XY
      WRITE (1,50)
      WRITE (1,60) IJ
      WRITE (1,70)
```

```
      WRITE (1,40) AI
      IF (NL.EQ.0) GO TO 10
      READ (2,*) LN
      WRITE (1,80)
      WRITE (1,90) LN
10    CONTINUE
      READ (2,*) NBC
      READ (2,*) ZBC
      WRITE (1,100)
      WRITE (1,110)
      WRITE (1,120) NBC
      WRITE (1,130)
      WRITE (1,140) ZBC
      DO 20 I=1,NE
       IE=IJ(1,I)
       JE=IJ(2,I)
       K=IABS(IE-JE)
       IF (K.GT.ND) ND=K
       X=XY(1,JE)-XY(1,IE)
       Y=XY(2,JE)-XY(2,IE)
       L=SQRT(X*X+Y*Y)
       Z=E/L
       BNE(1,I)=L
       BNE(2,I)=Y/L
       BNE(3,I)=X/L
       BNE(4,I)=Z*AI(1,I)
       BNE(5,I)=Z*AI(2,I)
20    CONTINUE
      ND=3*(ND+1)
      WRITE (1,150) ND
      IF (NWB.EQ.0) GO TO 170
      WRITE (1,160)
      WRITE (1,140) BNE
30    FORMAT (/10X,'XY (NODAL COORDINATES)')
40    FORMAT (2(7X,1PE13.5,2X,1PE13.5))
50    FORMAT (/10X,'IJ (NODAL CODES OF ELEMENTS)')
60    FORMAT (5(4X,2I5))
70    FORMAT (/10X,'AI (AREA AND INERTIA MOMENT OF ELEMENTS)')
80    FORMAT (/10X,'LN (SPECIAL ELEMENT MATRIX)')
90    FORMAT (4(5X,2I5))
100   FORMAT (/10X,'BOUNDARY CONDITIONS OF DISPLACEMENTS')
110   FORMAT (/10X,'NBC')
120   FORMAT (5X,15I5)
130   FORMAT (/10X,'ZBC')
140   FORMAT (5X,1P5E13.5)
150   FORMAT (/10X,'ND=',I3,)
160   FORMAT (/10X,'BNE (PARAMETERS OF ELEMENTS)',)
170   WRITE(*,180)
180   FORMAT(/10X,'LAI PASSED')
      RETURN
```

```
      END

      SUBROUTINE SKK(NT,ND,NE,NL,NL1,BNE,K,SK,IJ,LN)
C*******************************************************************C
C      2                                                            C
C          CALCULATE STIFFNESS MATRIX OF STRUCTURE                  C
C                                                                   C
C*******************************************************************C
      DIMENSION K(NT,ND),IJ(2,NE)
      DIMENSION BNE(5,NE),LN(2,NL1)
      DIMENSION SK(10,NE)
      COMMON /NWW/NWB,NWK,NWR
      REAL K
      DO 10 I=1,NT
       DO 10 J=1,ND
        K(I,J)=0.0
   10 CONTINUE

      IF (NL.GT.0) GO TO 20
      N=2
      GO TO 30
   20 M=1
      N=1
   30 DO 60 I=1,NE
       RL=BNE(1,I)
       S=BNE(2,I)
       C=BNE(3,I)
       A1=BNE(4,I)
       RI=BNE(5,I)
       CALL KE(RL,RI)
       GO TO (40,50) N
   40  IF (M.GT.NL) GO TO 50
       IF (I.NE.LN(1,M)) GO TO 50
       K1=LN(2,M)
       CALL RELK(K1,RL)
       M=M+1
   50  CALL SKE(I,NE,SK)
       CALL SUM(I,A1,NT,ND,NE,K,IJ,S,C)
   60 CONTINUE
      DO 70 I=1,NT
       IF(K(I,1).GT.1E-10) GO TO 70
       WRITE (1,80) I,K(I,1)
       K(I,1)=1.0
   70 CONTINUE
      IF(NWK.EQ.0) GO TO 130
      WRITE (1,90)
      WRITE (1,100) K
      WRITE (1,110)
      WRITE (1,120) SK
```

```
 80     FORMAT (/10X,'MAIN ELEMENT IS NONPOSITIVE',/10X,'NT=',I4,20X,
    *           'K=',1PE18.9)
 90     FORMAT (/10X,
    *   'STIFFNESS MATRIX OF STRUCTURE K IN GLOBAL COORDINATES')
100     FORMAT (2X,1P6E13.5)
110     FORMAT (/10X,
    *           'STIFFNESS MATRIX OF ELEMENT SK IN LOCAL COORDINATES')
120     FORMAT (5X,1P5E13.5)
130     WRITE(*,140)
140     FORMAT(10X,'SKK PASSED')
        RETURN
        END

        SUBROUTINE KE(RL,RI)
C***********************************************************************C
C       3                                                               C
C           CALCULATE STIFFNESS MATRIX OF ELEMENT                       C
C                                                                       C
C***********************************************************************C
        COMMON /EK/EK(4,4)
        B1=2*RI
        B2=3*B1/RL
        B3=2*B2/RL
        EK(1,1)=B3
        EK(1,2)=-B2
        EK(1,3)=-B3
        EK(1,4)=-B2
        EK(2,2)=2*B1
        EK(2,3)=B2
        EK(2,4)=B1
        EK(3,3)=B3
        EK(3,4)=B2
        EK(4,4)=2*B1
        DO 10 J=2,4
         J1=J-1
         DO 10 K1=1,J1
         EK(J,K1)=EK(K1,J)
 10     CONTINUE
        RETURN
        END

        SUBROUTINE RELK(M,L)
C***********************************************************************C
C       4                                                               C
C           RELEASE DEGREES OF FREEDOM IN K                             C
C                                                                       C
C***********************************************************************C
        DIMENSION C(4),EKK(4)
        COMMON /EK/EK(4,4)
```

```
      REAL L
      IF(M.EQ.3) GO TO 40
      C(1)=1.5/L
      C(3)=-C(1)
      IF(M.EQ.1) GO TO 10
      C(2)=-0.5
      C(4)=-1.0
      GO TO 20
10    C(2)=-1.0
      C(4)=-0.5
20    M=M*2
      DO 25 I=1,4
       EKK(I)=EK(M,I)
25    CONTINUE
      DO 30 I=1,4
       DO 30 J=1,4
       EK(I,J)=EK(I,J)+C(I)*EKK(J)
30    CONTINUE
      GO TO 60
40    DO 50 I=1,4
       DO 50 J=1,4
        EK(I,J)=0.0
50    CONTINUE
60    RETURN
      END

      SUBROUTINE SKE(I,NE,SK)
C**********************************************************************C
C       5                                                              C
C            STORE STIFFNESS MATRIX OF ELEMENTS                        C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
      DIMENSION SK(10,NE)
      COMMON /EK/EK(4,4)
      DO 10 J=1,4
       DO 10 K1=J,4
        K2=K1-(J*J-9*J+8)/2
        SK(K2,I)=EK(J,K1)
10    CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SUM(I,B1,NT,ND,NE,K,IJ,S,C)
C**********************************************************************C
C       6                                                              C
C           TRANSFORMATION OF COORDINATES AND ASSEMBLAGE               C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
      DIMENSION B(6,6),IJ(2,NE),K(NT,ND)
```

```
      COMMON /EK/EK(4,4)
      REAL K
      DO 20 J=1,2
       DO 20 K1=1,2
        A1=B1
        IF(J+K1.EQ.3) A1=-B1
        B(3*J-2,3*K1-2)=A1*C*C+EK(2*J-1,2*K1-1)*S*S
        B(3*J-2,3*K1-1)=(A1-EK(2*J-1,2*K1-1))*S*C
        B(3*J-2,3*K1)=-EK(2*J-1,2*K1)*S
        B(3*J-1,3*K1-2)=(A1-EK(2*J-1,2*K1-1))*S*C
        B(3*J-1,3*K1-1)=A1*S*S+EK(2*J-1,2*K1-1)*C*C
        B(3*J-1,3*K1)=EK(2*J-1,2*K1)*C
        B(3*J,3*K1-2)=-EK(2*J,2*K1-1)*S
        B(3*J,3*K1-1)=EK(2*J,2*K1-1)*C
        B(3*J,3*K1)=EK(2*J,2*K1)
20    CONTINUE
      DO 30 J=1,2
       DO 30 K1=1,2
        IF(IJ(J,I).GT.IJ(K1,I)) GO TO 30
        M=3*IJ(J,I)-2
        N=3*(IJ(K1,I)-IJ(J,I))+1

        M0=3*J-2
        N0=3*K1-2
        K(M,N)=K(M,N)+B(M0,N0)
        K(M,N+1)=K(M,N+1)+B(M0,N0+1)
        K(M,N+2)=K(M,N+2)+B(M0,N0+2)
        K(M+1,N)=K(M+1,N)+B(M0+1,N0+1)
        K(M+1,N+1)=K(M+1,N+1)+B(M0+1,N0+2)
        K(M+2,N)=K(M+2,N)+B(M0+2,N0+2)
        IF(IJ(J,I).EQ.IJ(K1,I)) GO TO 30
        K(M+1,N-1)=K(M+1,N-1)+B(M0+1,N0)
        K(M+2,N-2)=K(M+2,N-2)+B(M0+2,N0)
        K(M+2,N-1)=K(M+2,N-1)+B(M0+2,N0+1)
30    CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE PP(NT,NE,NL,NL1,NPQ,NF1,BNE,A,PQ,IJ,LN,MPQ,ZPQ,
     *              MNF,ZMF)
C*******************************************************************C
C      7                                                            C
C         CALCULAT NODAL LOAD VECTOR                                C
C                                                                   C
C*******************************************************************C
      DIMENSION IJ(2,NE),A(NT)
      DIMENSION BNE(5,NE),LN(2,NL1),PQ(6,NE)
      DIMENSION MNF(2,NF1),ZMF(NF1),MPQ(NPQ),ZPQ(NPQ)
      COMMON /FFF/NF,NP,NQ,NW,NX
      COMMON /NWW/NWB,NWK,NWR
```

```
      DO 10 I=1,NT
       A(I)=0.0
  10  CONTINUE
      NP1=2*NP+1
      CALL FF(NP,NE,NQ,NW,BNE,PQ,MPQ(1),ZPQ(1),MPQ(NP1),ZPQ(NP1))
      IF (NL.GT.0 ) CALL RELF(NE,NL,LN,PQ,BNE)
      IF (NP+NQ+NW.EQ.0) GO TO 20
      CALL STF(NE,NT,BNE,PQ,IJ,A)
  20  IF (NF.GT.0) CALL GNF(NF,NT,A,MNF,ZMF)
      IF (NWR.EQ.0) GO TO 50
      NP2=6*NE
      WRITE (1,25)
      WRITE (1,30) (A(I),I=1,NT)
      WRITE (1,40)
      WRITE (1,30) ((PQ(I,J),I=1,6),J=1,NE)
  25  FORMAT(/10X,'NODAL LOAD VECTOR',/,18X,'FX',14X,'FY',14X,'M')
  30  FORMAT (8X,1P3E16.4)
  40  FORMAT (/10X,'PQ (FORCES OF FIXED ENDS)')
  50  WRITE(*,60)
  60  FORMAT(10X,'PP PASSED')
      RETURN
      END

      SUBROUTINE FF(NP,NE,NQ,NW,BNE,PQ,MP,ZMP,MQ,ZMQ)
C**********************************************************************C
C     8                                                                C
C          CALCULATE FORCES OF FIXED END                               C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
      DIMENSION BNE(5,NE)
      DIMENSION PQ(6,NE)
      DIMENSION MP(2,NP)
      DIMENSION ZMP(2,NP)
      DIMENSION MQ(2,NQ)
      DIMENSION ZMQ(2,NQ)
      DIMENSION F(6)
      COMMON /NWW/NWB,NWK,NWR
      REAL L
      DO 10 I=1,NE
       DO 10 J=1,6
        PQ(J,I)=0.0
  10  CONTINUE
      IF (NP.EQ.0) GO TO 35
      READ (2,*) MP
      READ (2,*) ZMP
      WRITE (1,60)
      WRITE (1,70)
      WRITE (1,75)MP
      WRITE (1,80)
```

```
      WRITE (1,85) ZMP
      DO 30 I=1,NP
       N=MP(1,I)
       A=ZMP(1,I)
       P=ZMP(2,I)
       L=BNE(1,N)
       S=BNE(2,N)
       C=BNE(3,N)
       K=MP(2,I)+1
       GO TO (20,21,22,23,24),K
20     CALL LP(A,P,L,F)
       GO TO 25
21     CALL LH(A,P,L,F)
       GO TO 25
22     CALL GP(A,P,L,F,S,C)
       GO TO 25
23     CALL GH(A,P,L,F,S,C)
       GO TO 25
24     CALL LM(A,P,L,F)
25     CONTINUE
       IF (NWR.EQ.0) GO TO 27
       WRITE (1,90)
       WRITE (1,95) F
27     DO 30 M=1,6

         PQ(M,N)=PQ(M,N)+F(M)
30     CONTINUE
35     IF (NQ.EQ.0)GO TO 55
       READ (2,*)MQ
       READ (2,*)ZMQ
       WRITE (1,100)
       WRITE (1,110)
       WRITE (1,75) MQ
       WRITE (1,120)
       WRITE (1,85) ZMQ
       DO 50 I=1,NQ
        N=MQ(1,I)
        A=ZMQ(1,I)
        Q=ZMQ(2,I)
        L=BNE(1,N)
        S=BNE(2,N)
        C=BNE(3,N)
        K=MQ(2,I)+1
        GO TO (40,41,42,43,44),K
40      CALL LQ(A,Q,L,F)
        GO TO 45
41      CALL GQ1(A,Q,L,F,S,C)
        GO TO 45
42      CALL GQ2(A,Q,L,F,S,C)
        GO TO 45
```

```
 43       CALL GQ3(A,Q,L,F,S,C)
          GO TO 45
 44       CALL GQ4(A,Q,L,F,S,C)
 45       CONTINUE
          IF (NWR.EQ.0) GO TO 47
          WRITE (1,130)
          WRITE (1,95) F
 47        DO 50 M=1,6
           PQ(M,N)=PQ(M,N)+F(M)
 50      CONTINUE
 55      IF (NW.EQ.1) CALL WW(NE,PQ,BNE)
 60      FORMAT (/10X,'EXTERNAL CONCENTRATED FORCES P')
 70      FORMAT (13X,2HMP)
 75      FORMAT (8X,4I10)
 80      FORMAT (13X,3HZMP)
 85      FORMAT (12X,1P4E13.5)
 90      FORMAT (/13X,'FP (EQUIVALENCE FORCES OF FIXED ENDS)')
 95      FORMAT (8X,1P3E16.4)
100      FORMAT (/10X,'EXTERNAL UNIFORM FORCES Q')
110      FORMAT (13X,2HMQ)
120      FORMAT (13X,3HZMQ)
130      FORMAT (/13X,'FQ (EQUIVALENCE FORCES OF FIXED ENDS)')
         WRITE(*,140)
140      FORMAT(10X,'FF PASSED')
         RETURN
      END

      SUBROUTINE RELF(NE,NL,LN,PQ,BNE)
C**********************************************************************C
C     9                                                                C
C         RELEASE DEGREES OF FREEDOM IN NODAL LOAD VECTOR              C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
      DIMENSION P(6),LN(2,NL),PQ(6,NE),BNE(5,NE)
      DO 60 I=1,NL
       N=LN(1,I)
       M=LN(2,I)
       A1=0.0
       DO 10 J=1,6
        A1=A1+ABS(PQ(J,N))
 10    CONTINUE
       IF(A1.LT.1E-10) GO TO 60
       C=1.5/BNE(1,N)
       DO 20 J=1,6
        P(J)=PQ(J,N)
 20    CONTINUE
       IF (M.EQ.1) GO TO 30
       P(2)=P(2)+C*P(6)
       P(3)=P(3)-0.5*P(6)
       P(5)=P(5)-C*P(6)
```

```
       P(6)=0.0
       IF(M.NE.3) GO TO 40
       C=C/1.5
       P(2)=P(2)+C*P(3)
       P(5)=P(5)-C*P(3)
       P(3)=0.0
       GO TO 40
 30    P(2)=P(2)+C*P(3)
       P(5)=P(5)-C*P(3)
       P(6)=P(6)-0.5*P(3)
       P(3)=0.0
 40    CONTINUE
       DO 50 J=1,6
        PQ(J,N)=P(J)
 50    CONTINUE
 60   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE   LP(A,P,L,F)
C*********************************************************************C
C        10                                                           C
C             CALCULATE FORCES OF FIXED END                           C
C             PRODUCED BY CONCENTRATED   LOADS                        C
C             P IN LOCAL COORDINTAES                                  C
C                                                                     C
C*********************************************************************C
      DIMENSION F(6)
      REAL L
      B=L-A
      F(1)=0.0
      F(2)=P*(L+2*A)*B*B/(L*L*L)
      F(3)=-P*A*B*B/(L*L)
      F(4)=0.0
      F(5)=P*(L+2*B)*A*A/(L*L*L)
      F(6)=P*A*A*B/(L*L)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE LH(A,H,L,F)
C*********************************************************************C
C        11                                                           C
C             CALCULATE FORCES OF FIXED END                           C
C             PRODUCED BY CONCENTRATED LOADS                          C
C             H IN LOCAL COORDINTAES                                  C
C                                                                     C
C*********************************************************************C
      DIMENSION F(6)
      REAL L
```

```
      B=L-A
      F(1)=-H*B/L
      F(2)=0.0
      F(3)=0.0
      F(4)=-H*A/L
      F(5)=0.0
      F(6)=0.0
      RETURN
      END

      SUBROUTINE LM(A,M,L,F)
C**********************************************************************C
C     12                                                               C
C           CALCULATE FORCES OF FIXED END                              C
C           PRODUCED BY CONCENTRATED MOMENTS                           C
C           M IN LOCAL COORDINATES                                     C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
      DIMENSION F(6)
      REAL L,M
      F(1)=0.0
      F(2)=-6*M*A*(L-A)/(L*L*L)
      F(3)=M*(L-A)*(3*A-L)/(L*L)
      F(4)=0.0
      F(5)=-F(2)
      F(6)=M*A*(2*L-3*A)/(L*L)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE  LQ(A,Q,L,F)
C**********************************************************************C
C     13                                                               C
C           CALCULATE FORCES OF FIXED END                              C
C           PRODUCED BY UNIFORM LOAD                                   C
C           IN LOCAL COORDINATES                                       C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
      DIMENSION F(6)
      REAL L
      IF (ABS(A-L).LT.1E-10) GO TO 10
      F(1)=0.0
      F(2)=Q*A/2*(2-2*A*A/(L*L)+A*A*A/(L*L*L))
      F(3)=-Q*A*A/12*(6-8*A/L+3*A*A/(L*L))
      F(4)=0.0
      F(5)=Q*A-F(2)
      F(6)=Q*A*A*A/(12*L)*(4-3*A/L)
      GO TO 20
 10   F(1)=0.0
      F(2)=Q*L/2
      F(3)=-Q*L*L/12
```

```
      F(4)=0.0
      F(5)=F(2)
      F(6)=-F(3)
 20   RETURN
      END

      SUBROUTINE GP(A,P,L,F,S,C)
C*********************************************************************C
C      14                                                             C
C           CALCULATE FORCES OF FIXED END                             C
C           PRODUCED BY CONCENTRATED LOADS                            C
C           P IN GLOBAL   COORDINATES                                 C
C                                                                     C
C*********************************************************************C
      DIMENSION F(6),F1(6),F2(6)
      REAL L
      A=A/ABS(C)
      PO=P*C
      HO=-P*S
      CALL LP(A,PO,L,F1)

      CALL LH(A,HO,L,F2)
      DO 10 I=1,6
       F(I)=F1(I)+F2(I)
 10   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GH(A,H,L,F,S,C)
C*********************************************************************C
C      15                                                             C
C           CALCULATE FORCES OF FIXED END                             C
C           PRODUCED BY CONCENTRATED LOADS                            C
C           H IN GLOBAL COORDINATES                                   C
C                                                                     C
C*********************************************************************C
      DIMENSION F(6),F1(6),F2(6)
      REAL L
      A=A/ABS(S)
      PO=H*S
      HO=H*C
      CALL LP(A,PO,L,F1)
      CALL LH(A,HO,L,F2)
      DO 10 I=1,6
       F(I)=F1(I)+F2(I)
 10   CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE GQ1(A,Q,L,F,S,C)
C*********************************************************************C
C     16                                                              C
C           CALCULATE FORCES OF FIXED END                             C
C           PRODUCED BY UNIFORM LOAD                                  C
C           QV IN GLOBAL COORDINATES                                  C
C                                                                     C
C*********************************************************************C
      DIMENSION F(6),F1(6),F2(6)
      REAL L
      QO=Q*C*ABS(C)
      A1=A/ABS(C)
      HO=-Q*A*S
      A2=0.5*A1
      CALL LQ(A1,QO,L,F1)
      CALL LH(A2,HO,L,F2)
      DO 10 I=1,6
       F(I)=F1(I)+F2(I)
 10   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GQ2(A,Q,L,F,S,C)
C*********************************************************************C
C     17                                                              C
C           CALCULATE FORCES OF FIXED END                             C
C           PRODUCED BY UNIFORM LOAD                                  C
C           QH IN GLOBAL COORDINATES                                  C
C                                                                     C
C*********************************************************************C
      DIMENSION F(6),F1(6),F2(6)
      REAL L
      QO=Q*S*ABS(S)
      A1=A/ABS(S)
      HO=Q*A*C
      A2=0.5*A1
      CALL LQ(A1,QO,L,F1)
      CALL LH(A2,HO,L,F2)
      DO 10 I=1,6
       F(I)=F1(I)+F2(I)
 10   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GQ3(A,Q,L,F,S,C)
C*********************************************************************C
C     18                                                              C
C           CALCULATE FORCES OF FIXED END                             C
```

```
C               PRODUCED BY UNIFORM LOAD                                C
C               QV IN GLOBAL COORDINATES                                C
C                                                                       C
C***********************************************************************C
      DIMENSION F(6),F1(6),F2(6)
      REAL L
      QO=Q*C
      A1=A/ABS(C)
      H=-Q*A1*S
      A2=0.5*A1
      CALL LQ(A1,QO,L,F1)
      CALL LH(A2,H,L,F2)
      DO 10 I=1,6
       F(I)=F1(I)+F2(I)
 10   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GQ4(A,Q,L,F,S,C)
C***********************************************************************C
C        19                                                             C
C               CALCULATE FORCES OF FIXED END                           C
C               PRODUCED BY UNIFORM LOAD                                C
C               QH IN GLOBAL COORDINATES                                C
C                                                                       C
C***********************************************************************C
      DIMENSION F(6),F1(6),F2(6)
      REAL L
      QO=Q*S
      A1=A/ABS(S)
      HO=Q*A1*C
      A2=A1/2
      CALL LQ(A1,QO,L,F1)
      CALL LH(A2,HO,L,F2)
      DO 10 I=1,6
       F(I)=F1(I)+F2(I)
 10   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE WW(NE,PQ,BNE)
C***********************************************************************C
C        20                                                             C
C             CALCULATE BODY FORCES                                     C
C                                                                       C
C***********************************************************************C
      DIMENSION PQ(6,NE)
      DIMENSION BNE(5,NE),F(6)
      COMMON /EW/E,W
      REAL L
```

```
      DO 20 I=1,NE
       L=BNE(1,I)
       S=BNE(2,I)
       C=BNE(3,I)
       Q=W*BNE(4,I)*L/E
       IF (ABS(C).LT.1E-6) GO TO 10
       A=L*ABS(C)
       CALL GQ3(A,Q,L,F,S,C)
       GO TO 15
10     A=L/2
       H=-Q*L*S
       CALL LH(A,H,L,F)
15     DO 20 J=1,6
        PQ(J,I)=PQ(J,I)+F(J)
20    CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GNF(NF,NT,B,MNF,ZMF)
C**********************************************************************C
C       21                                                             C
C             ASSEMBLAGE OF ACTUAL NODAL LOADS                         C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
      DIMENSION B(NT),MNF(2,NF),ZMF(NF)
      COMMON /NWW/NWB,NWK,NWR
      WRITE (1,50)
      READ (2,*) MNF
      READ (2,*) ZMF
      WRITE (1,55)
      WRITE (1,60) MNF
      WRITE (1,65)
      WRITE (1,70) ZMF
      DO 40 I=1,NF
       J=3*MNF(1,I)-2
       IF (MNF(2,I)-1) 10,20,30
10     B(J)=B(J)+ZMF(I)
       GO TO 40
20     J=J+1
       B(J)=B(J)-ZMF(I)
       GO TO 40
30     J=J+2
       B(J)=B(J)+ZMF(I)
40    CONTINUE
50    FORMAT (/10X,'NODAL EXTERNAL FORCES')
55    FORMAT (13X,'MNF')
60    FORMAT (5X,4I10)
65    FORMAT (13X,'ZMF')
70    FORMAT (12X,1P4E13.5)
      WRITE(*,80)
```

```
  80    FORMAT(10X,'GNF PASSED')
        RETURN
        END

        SUBROUTINE STF(NE,NT,BNE,PQ,IJ,B)
C**********************************************************************C
C       22                                                             C
C            TRANSFORMATION OF COORDINATES AND ASSEMBLAGE              C
C            OF THE NODAL LOADS                                        C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
        DIMENSION BNE(5,NE),B(NT),PQ(6,NE),IJ(2,NE),F(4)
        COMMON/NWW/NWB,NWK,NWR
        DO 10 I=1,NE
         S=BNE(2,I)
         C=BNE(3,I)
         F(1)=PQ(1,I)*C-PQ(2,I)*S
         F(2)=PQ(1,I)*S+PQ(2,I)*C
         F(3)=PQ(4,I)*C-PQ(5,I)*S
         F(4)=PQ(4,I)*S+PQ(5,I)*C
         M=3*IJ(1,I)-2
         N=3*IJ(2,I)-2
         B(M)=B(M)-F(1)
         B(M+1)=B(M+1)-F(2)
         B(M+2)=B(M+2)-PQ(3,I)
         B(N)=B(N)-F(3)
         B(N+1)=B(N+1)-F(4)
         B(N+2)=B(N+2)-PQ(6,I)
  10    CONTINUE
        WRITE(*,20)
  20    FORMAT(10X,'STF PASSED')
        RETURN
        END

        SUBROUTINE BC(NT,ND,NB,NX,NX1,A,B,NBC,ZBC)
C**********************************************************************C
C       23                                                             C
C           BOUNDARY CONDITIONS OF DISPLACEMENTS                       C
C                                                                      C
C**********************************************************************C
        DIMENSION A(NT,ND),B(NT),NBC(2,NB),ZBC(NB)
        DO 70 I=1,NB
         IF(NBC(2,I).GT.2) GO TO 15
         N=3*NBC(1,I)+NBC(2,I)-2
         M1=1
         IF(ABS(ZBC(I)).LT.1E-10) GO TO 25
         IF(NX.NE.NX1) GO TO 10
         A(N,1)=A(N,1)*1E+15
  10     B(N)=A(N,1)*ZBC(I)
```

```
      GO TO 70
 15   N=3*NBC(1,I)-2
      IF(NBC(2,I).EQ.3) GO TO 20
      M1=2
      GO TO 25
 20   M1=3
 25   DO 60 L=1,M1
       IF (NX.NE.NX1)GO TO 45
       A(N,1)=1.0
       DO 30 J=2,ND
        A(N,J)=0.0
 30    CONTINUE
       DO 40 K=2,ND
       IF (N.LT.K)GO TO 40
       M=N-K+1
       A(M,K)=0.0
 40    CONTINUE
 45    B(N)=0.0
       N=N+1
 60   CONTINUE
 70   CONTINUE
      WRITE(*,80)
 80   FORMAT(10X,'BC PASSED')
      RETURN
      END

      SUBROUTINE GAUSS (NT,ND,NX,NX1,A,B)
C***********************************************************************C
C     24                                                                C
C           GAUSS ELIMINATION                                           C
C                                                                       C
C***********************************************************************C
      DIMENSION A(NT,ND),B(NT)
      N=NT-1
      IF (NX.EQ.NX1) GO TO 10
      ASSIGN 45 TO M
      GO TO 20
 10   ASSIGN 30 TO M
 20   DO 50 K=1,N
       M1=ND-1
       IF (M1.GT.NT-K) M1=NT-K
       DO 50 L=1,M1
        C=A(K,L+1)/A(K,1)
        IF (ABS(C).LT.1E-18) GO TO 50
        GO TO M,(30,45)
 30     M2=ND-L
        DO 40 J=1,M2
         A(K+L,J)=A(K+L,J)-C*A(K,J+L)
 40     CONTINUE
```

```
 45       B(K+L)=B(K+L)-C*B(K)
 50     CONTINUE
        B(NT)=B(NT)/A(NT,1)
        DO 70 K=1,N
         I=NT-K
         M1=ND
         C=B(I)
         IF(K+1.LT.M1) M1=K+1
         DO 60 J=2,M1
          L=I+J-1
          C=C-A(I,J)*B(L)
 60      CONTINUE
         B(I)=C/A(I,1)
 70     CONTINUE
        WRITE (1,80)
 80     FORMAT (/10X,'NODAL DISPLACEMENTS')
        WRITE (1,90)
 90     FORMAT (/18X,'U',14X,'V',13X,'AG')
        WRITE (1,100) B
100     FORMAT (10X,1P3E15.5)
        WRITE(*,110)
110     FORMAT(10X,'GAUSS PASSED')
        RETURN
        END

        SUBROUTINE MNQ(NE,NT,IJ,BNE,SK,B,PQ)
C*********************************************************************C
C       25                                                            C
C            CALCULATE ENDS FORCES OF ELEMENTS                        C
C                                                                     C
C*********************************************************************C
        COMMON /EK/EK(4,4)
        DIMENSION F(6),P(4),B(NT)
        DIMENSION IJ(2,NE),BNE(5,NE),PQ(6,NE),SK(10,NE)
        WRITE(1,65)
        WRITE(1,70)
        DO 60 I=1,NE
         DO 10 J=1,6
          F(J)=0.0
 10      CONTINUE
         IE=IJ(1,I)
         JE=IJ(2,I)
         S=BNE(2,I)
         C=BNE(3,I)
         A1=BNE(4,I)
         M=3*IE-2
         N=3*JE-2
         UI=B(M)
         VI=B(M+1)
```

```
      UJ=B(N)
      VJ=B(N+1)
      X1=VI*S+UI*C
      X2=VJ*S+UJ*C
      P(1)=VI*C-UI*S
      P(2)=B(M+2)
      P(3)=VJ*C-UJ*S
      P(4)=B(N+2)
      DO 20 J=1,4
       DO 20 K1=J,4
        K2=K1-(J*J-9*J+8)/2
        EK(J,K1)=SK(K2,I)
20    CONTINUE
      DO 30 J=2,4
      K=J-1
       DO 30 K1=1,K
        EK(J,K1)=EK(K1,J)
30    CONTINUE
      DO 40 J=1,4
       DO 40 K1=1,4
        F(J+1)=F(J+1)+EK(J,K1)*P(K1)

40    CONTINUE
      F(6)=F(5)
      F(5)=F(4)
      F(1)=A1*(X1-X2)
      F(4)=-F(1)
      DO 50 J=1,6
       F(J)=F(J)+PQ(J,I)
50    CONTINUE
      WRITE (1,75) I,IE,F(1),F(2),F(3)
      WRITE (1,80) JE,F(4),F(5),F(6)
60    CONTINUE
65    FORMAT (/10X,'END FORCES OF ELEMENTS')
70    FORMAT(/10X,'ELM',7X,'NO.',10X,'N',15X,'Q',15X,'M')
75    FORMAT (/7X,I5,6X,I3,3(2X,F15.5))
80    FORMAT (18X,I3,3(2X,F15.5))
      WRITE(*,90)
90    FORMAT(10X,'MNQ PASSED')
      RETURN
      END
```

第10章　平板弯曲问题的有限单元法

10.1　引　言

在前一章已指出，在工程中有广泛应用的板壳结构，由于它在几何上有一个方向的尺度比其它两个方向小得多的特点，在结构力学中引入了一定的假设，使之简化为二维问题。这种简化不仅是为了便于用解析方法求解，而且从数值求解角度考虑也是必要的。它可以使计算费用得到很大的缩减，同时可以避免因求解方程系数矩阵的元素间相差过大而造成的困难。

也正如在前一章所提及的，基于 Kirchhoff 假设的板壳单元，由于在单元交界面上要保持 C_1 连续性，为单元的构造将带来相当大的困难。在本章的以后讨论中，我们将可看到，板壳单元的构造将比 C_0 型的实体单元复杂得多。因此板壳问题的有限单元法的中心问题是如何构造合乎要求的单元。至于求解的具体步骤则基本上和 C_0 型有限单元法的求解是相同的。

在讨论本章的具体内容以前，首先将弹性薄板理论的基本公式作一扼要的引述。

基于板的厚度比其它两个方向尺寸小得多，以及挠度比厚度又小得多的假设，弹性薄板理论在分析平板弯曲问题时，认为可以忽略厚度方向的正应力；薄板中面内的各点没有平行于中面的位移；薄板中面的法线在变形后仍保持为法线。利用上述假设将平板弯曲问题简化为二维问题，且全部应力和应变可用板中面的挠度 w 表示。

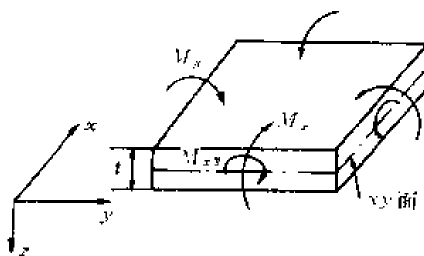


图 10.1　薄板弯曲的坐标和广义力

取板的中面为 $x\,y$ 平面，z 轴垂直于中面，如图 10.1 所示，则广义应变为

$$\kappa = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}w \tag{10.1.1}$$

其中

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

κ 中各个分量分别代表薄板弯曲后中面在 x 方向的曲率，y 方向的曲率以及在 x 和 y 方向的扭率。薄板的广义内力是

$$M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{10.1.2}$$

其中 M_x, M_y，分别是垂直 x 轴和垂直 y 轴的截面上单位长度的弯矩，$M_{xy}(-M_{yx})$ 是垂直于 $x(y)$ 轴截面上单位长度的扭矩。根据应力沿 z 方向成线性分布的性质由 M_x, M_y, M_{xy} 可以计算板内任一点的应力，设板的厚度为 t，则

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{t^3}z,\ \sigma_y = \frac{12M_y}{t^3}z,\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{t^3}z \tag{10.1.3}$$

广义的应力应变关系是

$$M = D\kappa \tag{10.1.4}$$

其中弹性关系矩阵 D，对于各向同性材料是

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = D_0\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{10.1.5}$$

其中 $D_0 = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 是板的弯曲刚度。

将广义应力应变关系(10.1.4)式和几何关系(10.1.1)式代入平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x,y) = 0 \tag{10.1.6}$$

可以得到求解挠度 w 的微分方程

$$D_0\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q(x,y) \tag{10.1.7}$$

式中 $q(x,y)$ 是作用板表面的 z 方向分布载荷。

板弯曲问题的边界条件有以下三种情况

(1) 在边界 S_1 上，给定位移 $\bar{w}$ 和截面转动 $\bar{\theta}$，即

$$w|_{S_1} = \bar{w},\quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{S_1} = \bar{\theta} \tag{10.1.8}$$

其中 n 表示边界的法线方向。

特例情况下，S_1 为固支边，则 $w|_{S_1}=0, \left.\dfrac{\partial w}{\partial n}\right|_{S_1}=0$。

(2) 在边界 S_2 上，给定位移 $\bar{w}$ 和力矩 $\bar{M}_n$，即

$$w|_{S_2} = \bar{w},\quad M_n|_{S_2} = \bar{M}_n \tag{10.1.9}$$

特例情况下，S_2 为简支边，则 $w|_{S_2}=0,\ M_n|_{S_2}=0$。

(3) 在边界 S_3 上给定力矩 $\bar{M}_n$ 和横向载荷 $\bar{V}_n$，即

$$M_n|_{S_3} = \bar{M}_n,\quad \left.\left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial S}\right)\right|_{S_3} = \bar{V}_n \tag{10.1.10}$$

式中 s 表示边界的切线方向，Q_n 是边界截面上单位长度的横向剪力

$$Q_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) \tag{10.1.11}$$

特例情况下，S_3 为自由边，则 $M_n|_{S_3}=0$，$\left(Q_n+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)_{S_3}=0$

和微分方程及边界条件相等效的最小位能原理的泛函表达式如下

$$\Pi_p = \iint_\Omega \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\kappa} - qw\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{S_3}\overline{V}_n w\mathrm{d}S + \int_{S_2+S_3}\overline{M}_n\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{10.1.12}$$

在平板弯曲问题的有限元分析中，我们首先将结构离散为单元，然后将各个单元内的挠度 w 表示成通常的插值形式

$$w = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e$$

其中插值函数 $\boldsymbol{N}$ 是直角坐标或自然坐标的函数，$\boldsymbol{a}^e$是单元的结点参数。

进一步执行有限元分析的标准化了的步骤，可以得到求解系统结点参数 $\boldsymbol{a}$ 的矩阵方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 分别为系统的刚度矩阵和载荷向量。

需要着重指出的是，现在泛函 Π_P 中出现的 w 的导数最高阶次是 2。根据收敛准则，在单元交界面上必须保持 w 及其一阶导数的连续性，即要求插值函数具有 C_1 连续性。

关于具有 C_1 连续性的插值函数的构造，除在一维问题(如梁弯曲问题，轴对称壳问题)中还比较简单外，在二维问题中，要比构造具有 C_0 连续性的插值函数复杂得多。基于平板弯曲问题的这种固有特性，从有限单元法的最早发展开始，大量的工作投入了构造板、壳单元的研究。根据所要分析的结构特点、分析的要求，发展了基于不同方法或不同变分原理的各式各样的板壳单元。尽管板、壳单元的研究工作仍在吸引着很多有限元工作者的注意和精力，但是从迄今为止的发展情况来看，平板单元大体上可以分为三类。

(1) 基于经典薄板理论的板单元，即基于(10.1.12)式所表述的位能泛函的、以 w 为场函数的板单元。

(2) 基于保持 Kirchhoff 直法线假设的其他薄板变分原理的板单元，如基于 Hellinger-Reissner 变分原理的混合板单元，基于修正 Hellinger-Reissner 变分原理或修正余能原理的应力杂交板单元等，以及在单元内或单元边界上的若干点，而不是到处保持 Kirchhoff 直法线假设的离散 Kirchhoff 假设单元等。

(3) 基于考虑横向剪切变形的 Mindlin 平板理论的板单元。此理论认为原来垂直于板中面的直线在变形后仍保持为直线，但因为横向剪切变形的结果，不一定再垂直于变形后的中面。基于此理论的板单元中，挠度 w 和法线转动 θ_x 及 θ_y 为各自独立的场函数。而 w 和 θ_x 及 θ_y 之间应满足的约束条件，根据约束变分原理的方法引入能量泛函，具体做法和考虑剪切的基于 Timoshenko 梁理论的梁单元相同。

上述第(2)，(3)类板单元的共同特点是将构造 C_1 连续性的插值函数转化为构造 C_0 连续性的插值函数，使问题得到简化。特别是第三类板单元，表达格式比较简单。并由于结点参数中只包含位移和转动，与其他实体单元联结也比较方便，易于组织在统一的计算

程序中，因此近年来受到人们更多的注意，特别是在动力分析和非线性分析中，更加强调单元矩阵计算的简洁性，这种单元的优点更具有吸引力。

以下几节将对上述不同类型的单元进行逐一的讨论。由于篇幅限制，对于其中的某些单元只能着重原理的介绍，而略去其详细的推导和列式。

10.2 基于薄板理论的非协调板单元

10.2.1 矩形单元

考虑图 10.2 所示矩形单元 1 2 3 4，每个角结点有 3 个参数：挠度 w、法线绕 x 轴的转动 θ_x 和绕 y 轴的转动 θ_y，即

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ -\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix} \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{10.2.1}$$

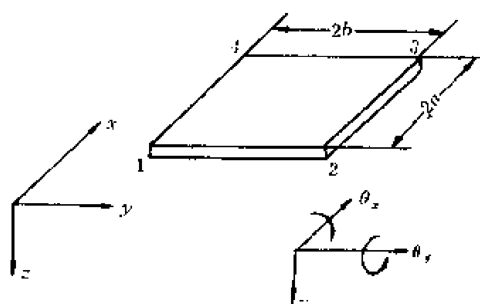


图 10.2 矩形板单元

单元的结点位移向量为

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{Bmatrix} \tag{10.2.2}$$

可以用含有 12 个待定系数的多项式来定义位移函数，这时 4 次完全多项式必须略去某些项，为保持对于 x, y 的对称性，可以方便地采用下式

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

或

$$w = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha} \tag{10.2.3}$$

其中 $\boldsymbol{P} = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3]$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_{12}]^T$$

为了确定待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{12}$，可将结点 1,2,3,4 的坐标代入 w 及其导数的表达式，则可得到下列方程组

$$\left.\begin{aligned} w_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 + \cdots \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i &= \theta_{xi} = \alpha_3 + \alpha_5 x_i + 2\alpha_6 y_i + \cdots \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i &= \theta_{yi} = -\alpha_2 - 2\alpha_4 x_i - \alpha_5 y_i + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2,3,4) \tag{10.2.4}$$

将上列方程组表示成矩阵形式，则有

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}^e \tag{10.2.5}$$

其中 C 是依赖于结点坐标的 12×12 矩阵，通过求逆可以决定待定参数

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{a}^e \tag{10.2.6}$$

将上式代回到(10.2.3)式，则可以得到 w 的插值表示形式

$$w = \boldsymbol{P\alpha} = \boldsymbol{PC}^{-1}\boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{Na}^e \tag{10.2.7}$$

其中插值函数 $\boldsymbol{N}$ 可表示成

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{N}_1\ \boldsymbol{N}_2\ \boldsymbol{N}_3\ \boldsymbol{N}_4] \tag{10.2.8}$$

而

$$\begin{aligned} N_i = \frac{1}{8}[(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2) \quad b\eta_i(\xi_0 \\ + 1)(\eta_0 + 1)^2(\eta_0 - 1) \quad - a\xi_i(\xi_0 + 1)^2(\xi_0 - 1)(\eta_0 + 1)] \end{aligned}$$

式中

$$\xi = (x - x_c)/a, \qquad \eta = (y - y_c)/b$$

$$\xi_0 = \xi\xi_i, \qquad \eta_0 = \eta\eta_i$$

x_c, y_c 是单元中心的坐标。

前面已阐明薄板的变形可以完全由中面挠度 w 所表征。(10.2.3)式中的前三项 $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ 代表薄板的刚体位移，其中 α_1 代表薄板在 z 方向的移动，$-\alpha_2$ 和 α_3 分别代表薄板单元绕 y 轴及 x 轴的刚体转动。式中 $\alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$ 代表薄板弯曲的常应变(常曲率和常扭率)项，因为将它们代入(10.1.1)式可以得到

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -2\alpha_4, \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2\alpha_6, \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2\alpha_5$$

从以上分析可见，(10.2.3)式所表达的 w 是满足完备性要求的，因为它包含了刚体位移及常应变。

现在来分析相邻单元之间的位移连续性，从(10.2.3)式可以看到 x=常数或 y=常数的边界上，w 是三次变化曲线，它可以由两端结点的 4 个参数唯一地决定。例如边界 1 2 上 w 可由 $w_1, (\partial w/\partial y)_1, w_2, (\partial w/\partial y)_2$ 唯一地决定，所以单元交界面上 w 是连续的。但从(10.2.3)式还可以看到在单元边界上 w 的法向导数也是三次变化的。仍以边界 1 2 为例，$\partial w/\partial x$ 是 y 的三次式，现在只有二个参数，即 $(\partial w/\partial x)_1$ 和 $(\partial w/\partial x)_2$ 不能唯一地决定沿边界 1 2 三次变化的 $\partial w/\partial x$，因此单元之间法向导数的连续性要求一般是不能满足的。也就是说这种单元是非协调的。但是可以验证这种非协调单元是能够通过分片试验的，所以当单元划分不断缩小时，计算结果还是能收敛于精确解答，实际计算证实了这一点。

在得到 w 的插值表示(10.2.7)式以后，其余步骤是标准化的。首先将它代入(10.1.1)式得到广义应变向量

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{L}w = \boldsymbol{LNa}^e = \boldsymbol{Ba}^e \tag{10.2.9}$$

再将上式代入(10.1.4)式得到广义内力向量

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{D\kappa} = \boldsymbol{DBa}^e \tag{10.2.10}$$

利用以上两式形成单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}^e = \iint_\Omega \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DB}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.2.11}$$

式中 Ω 是单元的面积，$\Omega = 4ab$，当单元厚度 t 是常数时，上式可以显式积分，因公式比较

冗长，这里从略。

当单元上作用分布载荷 q 时，单元载荷向量可按下式计算

$$P^e = \iint_\Omega N^T q \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.2.12}$$

下面给出 q 是常数时 P^e 的具体结果

$$P^e = 4qab[1/4 \quad b/12 \quad -a/12 \quad 1/4 \quad b/12 \quad a/12 \quad 1/4 \quad -b/12 \quad a/12 \quad 1/4 \quad -b/12 \quad -a/12]^T$$

上列结果表明，此时载荷向量的所有分量都不等于零，其中 1，4，7，10 分量是作用于结点的 z 方向集中力，各等于 1/4 的总载荷 $4qab$，这从直觉上也是可以预计的。其余分量是分别作用于结点的集中力矩，对于结构内部的结点，如果周围的四个单元面积相同，则各个单元在此结点的相应分量之和仍为零。

例 1 四边支承的方形薄板，支承包括四边固支和四边简支两种情况，承受均布载荷 q 或中央集中载荷。因为对称，只取 1/4 用不同密度的网格进行计算，用有限元法求得的中心点挠度和 Timoshenko 精确解的比较列于表 10.1。其中 L 是板的边长，$D=Et^3/12(1-\nu)^2$，计算中取 $\nu=0.3$。对于四边固支承受均布载荷 q 的情况，沿中线的 w 及弯矩 M_x 的结果如图 10.3 所示。

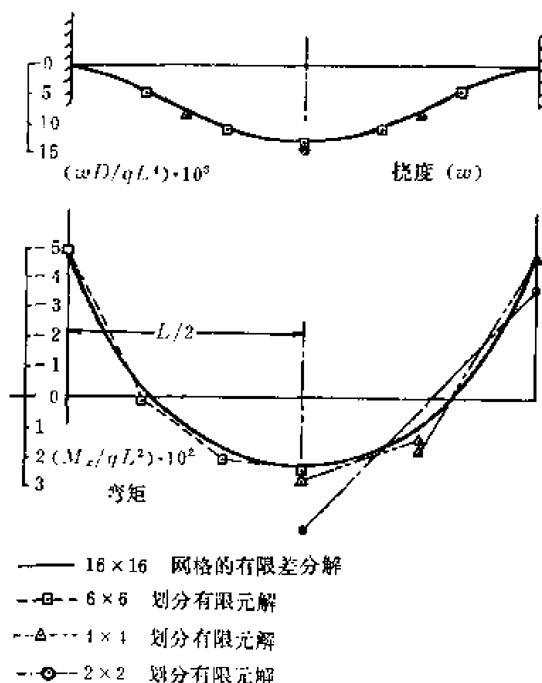


图 10.3 均匀载荷作用下四周固支方板的挠度和弯矩

例 2 角点用柱子支承的方形薄板承受均布载荷 q。由于对称，取其 1/4 进行有限元分析。此问题已有很多试验或解析研究结果。用有限元法求得的挠度和弯矩与差分解的比较见表 10.2。

从以上算例的结果可见，利用此种矩形板单元计算薄板弯曲问题，收敛性是很好的。甚至在角点支承的情况，角点附近存在应力集中，有限元的解答也是比较好的。

其次，从算例还可看到，虽然非协调矩形单元收敛性得到证实，但是收敛并非一定是单调的，即不一定是真实解的下界或上界。

表 10.1　正方形薄板的中点挠度(矩形单元)

网格	结点数	四边简支		四边固支	
		均布载荷	集中载荷	均布载荷	集中载荷
		$w_{max}D/qL^4$	$w_{max}D/PL^2$	$w_{max}D/qL^4$	$w_{max}D/PL^2$
2×2	9	0.003446	0.013784	0.001480	0.005919
4×4	25	0.003939	0.012327	0.001403	0.006134
8×8	81	0.004033	0.011829	0.001304	0.005803
16×16	289	0.004056	0.011671	0.001275	0.005672
精确解		0.004062	0.01160	0.00126	0.00560

表 10.2　角点支承正方形薄板的挠度和弯矩(矩形单元)

网格	板中心		边中点	
	wD/qL^4	M/qL^2	wD/qL^4	M/qL^2
2×2	0.0176	0.095	0.0126	0.139
4×4	0.0232	0.108	0.0165	0.149
6×6	0.0244	0.109	0.0173	0.150
差分解	0.0265	0.109	0.0170	0.140

需要指出，上述矩形单元不能推广到一般的四边形单元，因为经过坐标变换得到的一般四边形单元不能满足常应变准则，即单元不能通过分片试验，所以收敛性是很差的，不能用于实际计算。

唯一能满足常应变准则的是平行四边形，其原因是矩形和平行四边形之间坐标变换的雅可比行列式为常数。这时总体坐标 x,y 和局部坐标 ξ,η 的关系是(参见图 10.4)

$$\xi = (x - y\,\mathrm{ctg}\,\alpha)/a \qquad \eta = y\csc\alpha/b \tag{10.2.13}$$

其它所有计算公式也可导出，这里不一一列出。

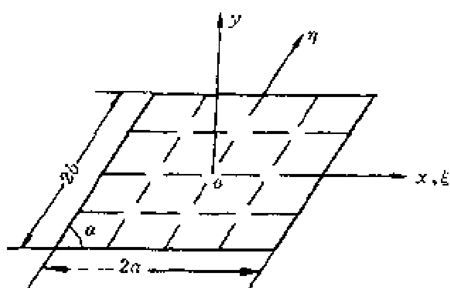


图 10.4　平行四边形单元和斜坐标

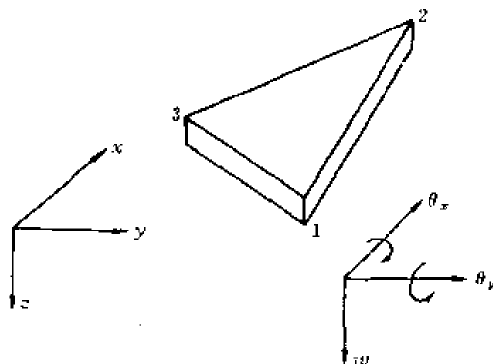


图 10.5　三结点三角形板单元

10.2.2 三角形单元

三角形单元能较好地适应复杂的边界形状，在实际分析中得到较多的应用。

首先考虑3结点三角形单元，如图10.5所示，每个结点有3个位移参数，即$w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ $(i=1,2,3)$，单元共有9个结点位移参数。

如果位移函数仍取x,y的多项式形式，则其中应包含9项，而一个完全三次多项式包含10项，即

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3$$

所以必须从上式中删去一项。如前所述，前6项代表刚体位移和常应变，是保证收敛所必需的。而三次方项删去任何一项，都不能保持对于x和y的对称性，因此有人建议令$\alpha_8=\alpha_9$，以达到减少一个待定系数并保持对称性的目的。可惜在此情况下，对于二个边界分别平行于x轴和y轴的等腰三角形单元，确定$\boldsymbol{\alpha}$的代数方程系数矩阵$\boldsymbol{C}$是奇异的，因此$\boldsymbol{\alpha}$不能确定，所以令$\alpha_8=\alpha_9$的方案是行不通的。还有一种方案是将单元中心挠度w也作为一个参数，但按此方案导出的单元是不收敛的。

上述困难可用引入面积坐标的方法加以克服。

我们在2.5.3节已介绍了面积坐标

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (i=1,2,3) \tag{2.5.27}$$

并有

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

其中a_i, b_i, c_i是由三角形单元几何形状决定的常数(见(2.2.6)式)。反之

$$x = \sum_{i=1}^{3} L_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{3} L_i y_i \tag{2.5.29}$$

其中x_i, y_i是三角形单元顶点的坐标值。

面积坐标的一次、二次、三次式分别有以下各项

一次式：L_1, L_2, L_3 (10.2.14)

二次式：$L_1^2, L_2^2, L_3^2, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1$ (10.2.15)

三次式：$L_1^3, L_2^3, L_3^3, L_1^2L_2, L_2^2L_3, L_3^2L_1, L_1L_2^2, L_2L_3^2, L_3L_1^2, L_1L_2L_3$ (10.2.16)

由(2.5.29)式可见x,y的一次完全多项式可用(10.2.14)式中三项的线性组合表示为

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 \tag{10.2.17}$$

x,y的二次完全多项式应至少包含(10.2.15)中的3项及(10.2.14)和(10.2.15)二式中的其他任取3项、共6项的线性组合。例如

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_1 L_2 + \alpha_5 L_2 L_3 + \alpha_6 L_3 L_1 \tag{10.2.18}$$

这表面上的任意性是由于L_1, L_2, L_3中只有两个是独立的而引起，它不影响x,y的二次完全多项式的实质。

同理，x,y的三次完全多项式应至少包含(10.2.16)式中的4项以及(10.2.14)，(10.2.15)和(10.2.16)三式中的6项、共10项的线性组合。

现在来研究构造3结点三角形板单元的插值函数，为此先了解一下(10.2.14)，(10.2.15)以及(10.2.16)式中某些项的几何性质，并表示于图10.6中。

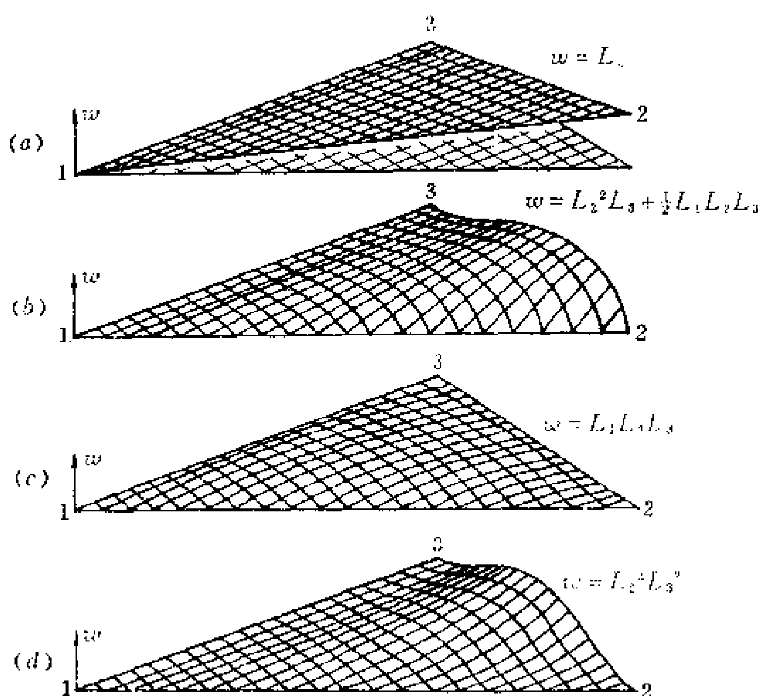


图 10.6　用面积坐标多项式表示的某些基本函数

图(a)表示 $w=L_2$，单元绕边 1 3 作刚体转动，$w_2=1$，$w_1=w_3=0$。所以 L_1,L_2,L_3 的线性组合可以表示单元的任意给定的刚体位移。

如 $w=L_2^2L_3$，则沿边 1 2 和 1 3，$w=0$，当然也包括 w 的所有结点值 $w_1=w_2=w_3=0$。再利用关系式

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{2A}\left(b_1\frac{\partial}{\partial L_1}+b_2\frac{\partial}{\partial L_2}+b_3\frac{\partial}{\partial L_3}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2A}\left(c_1\frac{\partial}{\partial L_1}+c_2\frac{\partial}{\partial L_2}+c_3\frac{\partial}{\partial L_3}\right)$$

可以证明在边 1 3(包括结点 1 和 3)上，$\partial w/\partial x=\partial w/\partial y=0$，而在结点 2 上，$\partial w/\partial x\neq 0$，$\partial w/\partial y\neq 0$。同理，可以证明 $w=L_2^2L_1$，具有和 $w=L_2^2L_3$ 相同的性质。所以由 $L_2^2L_3$ 和 $L_2^2L_1$ 的线性组合可以给出$(\partial w/\partial x)_2$ 和$(\partial w/\partial y)_2$ 的任意指定值。

再如 $w=L_1L_2L_3$，它在三个结点上，函数值及偏导数都等于 0，即 $w_i=(\partial w/\partial x)_i=(w/\partial y)_i=0\ (i=1,2,3)$，所以它不能由结点参数决定，因之在构造单元插值函数时不能单独应用。但它和 $L_2^2L_3$ 等项结合使用，如写成 $L_2^2L_3+CL_1L_2L_3$(C 是某个常数)形式，可增加函数的一般性。$L_1L_2L_3$ 和 $L_2^2L_3+1/2L_1L_2L_3$ 表示在图(c)和(b)中。$L_2^2L_3+CL_1L_2L_3$ 形式的函数共有 6 项。

对于现在要构造的三角形单元的位移函数可以先取为

$$w=\alpha_1L_1+\alpha_2L_2+\alpha_3L_3+\alpha_4(L_2^2L_1+CL_1L_2L_3)+\cdots+\alpha_9(L_1^2L_3+CL_1L_2L_3)\tag{10.2.19}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$ 是待定系数，上式对于自然坐标 L_1,L_2,L_3 在形式上是对称的。但是由于

它只包含 9 项并不能代表 x,y 的完全三次式，所以一般情况下不能保证 w 满足常应变要求，即当结点参数赋以和常曲率或常扭率相对应的数值时，w 不能保证给出和此变形状态相对应的挠度值。幸好，(10.2.19)式还有常数 C 可以调整，可以证明，当 $C=1/2$ 时(10.2.19)所表示的 w 正好满足常应变的要求。

(10.2.19)式中 $C=1/2$，并以结点的坐标代入其中以及它的导数表达式，应得到各个结点参数值

$$w_i,\ \theta_{xi}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i,\quad \theta_{yi}=\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \qquad (i=1,2,3)$$

利用以上方程可以决定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$。再回代到(10.2.19)式，就可最后得到 w 的插值表示式

$$w=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e \tag{10.2.20}$$

或

$$w=[\boldsymbol{N}_1\ \boldsymbol{N}_2\ \boldsymbol{N}_3]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_3\end{Bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}=\begin{Bmatrix}N_1\\ N_{x1}\\ N_{y1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}L_1+L_1^2L_2+L_1^2L_3-L_1L_2^2-L_1L_3^2\\ b_2\left(L_3L_1^2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3\right)-b_3\left(L_1^2L_2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3\right)\\ c_2\left(L_3L_1^2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3\right)-c_3\left(L_1^2L_2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3\right)\end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_3$ 可通过轮换下标1—2—3而得到。

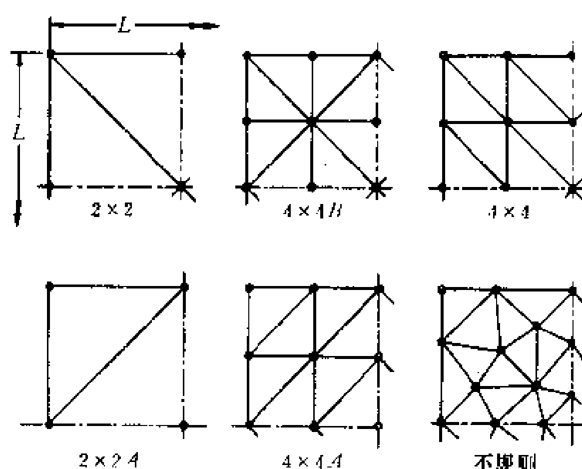


图 10.7 方板的三角形单元划分

将(10.2.20)式代入(10.1.1)式，可得到 $\boldsymbol{B}$，并进而按标准化的步骤计算单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$。应当指出，因为 $\boldsymbol{K}^e$ 的积分表达式是用面积坐标表示的，所以可利用公式(2.5.31)显式积出。也可以简单地利用数值积分计算 $\boldsymbol{K}^e$，因为 $\boldsymbol{K}^e$ 中仅包含面积坐标的二次项，故

对于一个三角形单元，仅需三点积分就可以给出精确积分的结果。

可以指出此种单元的协调性情况，在单元边界上，w 是三次变化，可由两端结点的 w，$\partial w/\partial s$ 值唯一地决定，所以 w 是协调的。但是由于单元边界上 $\partial w/\partial n$ 是二次变化，不能由二端结点的 $\partial w/\partial n$ 唯一地决定，所以单元边界上 $\partial w/\partial n$ 是不协调的。

图 10.8 不同支承方板的有限元结果

Irons 等已证明如果单元网格是由三组等间距直线产生的（如图 10.7 中的 4×4，4×

$4A$ 网格），此种单元能够通过分片试验，则有限元解能收敛于精确解。而 $4\times4B$ 网格，虽然解也收敛，但位移值大约有 1.5%的误差。

对于大多数工程问题，用非协调元得到的解的精度是足够的，常常还可给出比协调元更好一些的结果。这是因为利用最小位能原理求得的近似解一般使结构呈现过于刚硬，而非协调元实质上是未精确满足最小位能原理的要求，在单元交界面上有较多的适应性，使结构趋于柔软，正好部分地抵消上述过于刚硬带来的误差。

例 不同支承条件的方板承受分布载荷或集中载荷，按图 10.7 所示不同网格划分进行计算。沿板中心线的挠度和 M_x 的结果以及和精确解的比较表示于图 10.8 中。图中 M_x 取自单元中心的结果。结果表明精度和收敛性都是比较好的。

10.3 基于薄板理论的协调板单元

从上节的讨论中已知，在不少实际问题的分析中非协调板单元获得较好的结果，但是收敛性是以通过分片试验为条件的，使用范围受到限制。此外，即使收敛也并非单调的，不能对解的上界或下界做出估计。因此在板壳有限元分析的研究中，特别在其早期，协调板单元的研究受到相当的重视。

在经典薄板理论的范围内，使板单元满足协调性要求的方法有二，一是增加结点参数，即在结点参数中还包含 w 的二次导数项；另一是在保持每个结点有三个参数的前提下采取其他一些措施，如附加校正函数法、再分割法等。现选择其中有代表性的一、二种加以介绍。

10.3.1 3结点参数的协调元

前述的 3 结点三角形单元之所以是非协调的，是由于在每个边界上法向导数 $\partial w/\partial n$ 是二次变化，只由两端结点的 $\partial w/\partial n$ 值不足以唯一地决定它。现在设想能找到分别和各个边界相联系的校正函数，例如和边 2 3 相联系的校正函数 ϕ_{23}，它具有如下性质：

（1）在全部边界上 $\phi_{23}=0$；

（2）在边界 1 2 和 1 3 上法向导数 $\partial\phi_{23}/\partial n=0$；

（3）在边界 2 3 上 $\partial\phi_{23}/\partial n\neq0$，按二次变化；

并在边界 2 3 的中点 4 取单位值。

类似地可以有校正函数 ϕ_{31} 和 ϕ_{12}。这样一来，则可按一定比例将它们叠加到原来非协调的位移函数中，则有

$$w=w_0+\gamma_1\phi_{23}+\gamma_2\phi_{31}+\gamma_3\phi_{12} \tag{10.3.1}$$

其中 w_0 是非协调元的位移函数，即(10.2.20)式。γ_1、γ_2、γ_3 是待定常数，可以通过调整它们的大小，使得 $\partial w/\partial n$ 在各个边界中点的数值等于各个边界两端结点 $\partial w/\partial n$ 值的平均值，也即使 w 在各个边界的法向导数 $\partial w/\partial n$ 成线性变化，因此两端的法向导数值就能唯一地确定它了，从而使相邻单元交界面上的协调性得到实现。

按原来非协调位移函数计算得到的各个边界中点的 $\partial w_0/\partial n$ 值可表示如下：

$$\begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial n}\right)_4 \\ \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial n}\right)_5 \\ \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial n}\right)_6 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{a}^e \tag{10.3.2}$$

式中下标 4,5,6 分别表示边 2 3,3 1,1 2 的中点。

按原来位移函数计算得到的各个边界两端结点$\partial w_0/\partial n$ 的平均值可表示成

$$\begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial n}\right)_4^a \\ \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial n}\right)_5^a \\ \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial n}\right)_6^a \end{Bmatrix} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{a}^e \tag{10.3.3}$$

(10.3.1)式中校正函数项在各边界中点法向导数的数值是

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} \tag{10.3.4}$$

为使叠加校正函数后的位移函数在各边界中点的法向导数值等于两端结点的平均值,应有下列方程

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{a}^e + \boldsymbol{\gamma} \tag{10.3.5}$$

从上式得到

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z})\boldsymbol{a}^e \tag{10.3.6}$$

这样就得到经校正后的位移函数表达式

$$w = \boldsymbol{N}^e\boldsymbol{a}^e + [\phi_{23} \quad \phi_{31} \quad \phi_{12}](\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z})\boldsymbol{a}^e \tag{10.3.7}$$

上式所表示的位移函数是完全满足协调性要求的,而且对原来位移函数 w_0 的完全性是没有干扰的,因为在常应变(即常曲率和常扭率)的情况下,校正函数项恒为 0。

现在的问题是能否找到上述校正函数,回答是肯定的。例如

$$\varepsilon_{23} = \frac{L_1 L_2^2 L_3^2}{(L_1 + L_2)(L_1 + L_3)} \tag{10.3.8}$$

或

$$\varepsilon_{23} = \frac{L_1 L_2^2 L_3^2 (1 + L_1)}{(L_1 + L_2)(L_1 + L_3)} \tag{10.3.9}$$

可以检验,它们是满足校正函数要求的,即在全部边界上函数值等于 0;在边界 1 2 和 1 3 上一次导数等于 0;在边界 2 3 上$\partial\varepsilon_{23}/\partial n$ 是二次变化的。现在只要令

$$\phi_{23} = \frac{\varepsilon_{23}}{(\partial\varepsilon_{23}/\partial n)_4} \tag{10.3.10}$$

就达到我们的目的。其中$(\partial\varepsilon_{23}/\partial n)_4$ 是 ε_{23}在边界 23 中点 4 的法向导数值。

类似地,还可以得到 ϕ_{31}和 ϕ_{12}。

关于四边形协调板单元的构造，最简单方法是利用三角形单元的组合，如图 10.9 所示。也有直接建立的 3 结点参数的四边形协调元，这里就不一一列举了。



图 10.9　某些组合的四边形单元

关于这类协调单元的性能，可以指出，其优点是在保持三个结点参数的条件下单元协调性的要求可以完全满足，因而保证了有限元解的收敛性，即在单元尺寸不断减小时，解能单调收敛于精确解。但在实际计算中单元尺寸总是有限的，因此计算结果常常使结构表现得过于刚硬。现以简支方板承受中心集中载荷为例，采用不同的三角形单元（其中有些单元在讨论中未涉及到）进行计算，图 10.10 上给出中心挠度的误差和网格单元数的关系。其中误差是计算结果与解析解的相差，N 是 1/2 边长的单元数。从计算结果可见，对于同是 9 个自由度的三角形单元，非协调元(2)、(3)较之协调元(5)、(6)有更好的精度和收敛性。

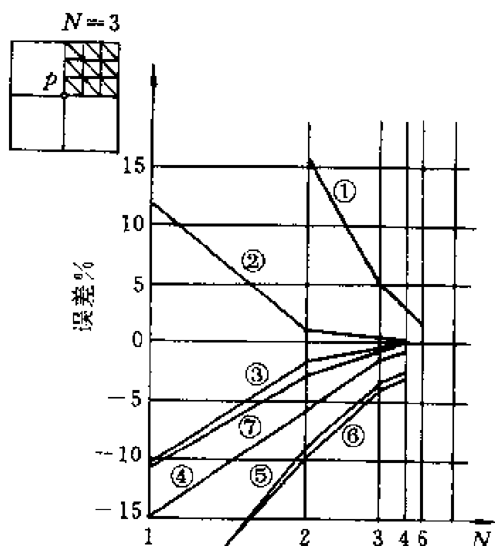


图 10.10　不同三角形单元的误差比较

① 6 自由度非协调元　② 9 自由度非协调元
③ 9 自由度非协调元　④ 12 自由度非协调元
⑤ 9 自由度协调元　⑥ 9 自由度协调元
⑦ 12 自由度协调元

10.3.2　多结点参数的协调元

多结点参数是指结点参数中除 w 和它的一阶导数 $\partial w/\partial x$，$\partial w/\partial y$ 而外，还包含 w 的二阶导数，甚至更高阶导数。这里仅以 21 个自由度和 18 个自由度的三角形单元为例，说明这种单元的一些特点。

图 10.11 所示的三角形板单元，与总体坐标平行的 x，y 坐标系的原点放在单元的中心。位移函数采用 x，y 的完全 5 次多项式，其中包含 21 个待定系数，可以用 21 个结点参数的条件决定。现在的情况是每个角结点包含有 6 个参数，即 w_i，$(\partial w/\partial x)_i$，$(\partial w/\partial y)_i$，$(\partial^2 w/\partial x^2)_i$，$(\partial^2 w/\partial y^2)_i$，$(\partial^2 w/\partial x\,\partial y)_i$，$(i=1,2,3)$，另外每个边界的中结点有一个参数，即 $(\partial w/\partial n)_k$，$(k=4,5,6)$，由此共有 21 个条件正好用以确定 21 个待定系数。单元刚度矩阵、载荷向量等计算步骤是标准化了的，但各个公式比较冗长，这里不一一列出。

可以检验这种单元是完全满足协调性要求的。在每个边界上 w 是 5 次变化，两端结点分别有 w，$\partial w/\partial s$，$\partial^2 w/\partial s^2$，即共有 6 个结点参数，可以唯一地确定边界上 5 次变化的 w，所以边界上位移是协调的。另外边界上 $\partial w/\partial n$ 是 4 次变化的，两端结点分别有 $\partial w/\partial n$ 和 $\partial^2 w/\partial n\,\partial s$，以及边界的中结点有 $\partial w/\partial n$，即共有 5 个结点参数，可以唯一地确定边界上 4 次变化的 $\partial w/\partial n$，所以边界上 $\partial w/\partial n$ 也是协调的。

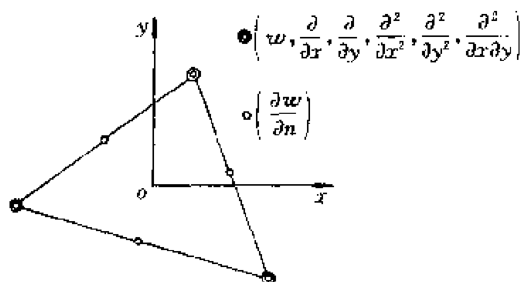


图 10.11　21 个自由度的三角形板单元

需要指出，边界中结点的出现一般是不希望的，这是因为通常都是采用直接法求解有限元的线性代数方程组，边界中结点的出现将较多地增加方程组的带宽，在计算上是不经济的，因此又出现 18 个自由度的板单元。它的位移函数仍是 5 次多项式，角结点仍各有 6 个结点参数，但是各个边界中结点的$\partial w/\partial n$ 值不再作为独立的参数，而是作为限制各个边界上$\partial w/\partial n$ 为三次变化的附加条件。这样一来仍是 21 个条件用以确定位移函数中的 21 个待定系数。计算实践表明这种单元可以取得较好的计算结果。

多结点参数的四边形协调板单元使用较少，因为只有矩形单元可以较方便地采用 Hermite 多项式作为位移函数（见 3.3.2 节，其中的场函数 ϕ 代表挠度 w），但是这种单元不能适应一般几何形状的结构。而一般四边形板单元除取三角形组合的方法而外，直接建立全单元的位移函数也比较复杂。

利用多结点参数的协调元，在某些情况下也可取得好的结果，但是由于总的自由度较多，表达格式复杂，故计算费用较大。使其应用受到限制的另一重要原因是由于结点参数中包含高阶导数，如果相邻单元材料性质不同或厚度不同，则保持结点位移高阶导数的连续性，就不可能保持结点上力矩的连续性，因而不可能得到很好的计算结果。

本节所述两种建立协调元的方法，都是以位移 w 作为唯一场函数来设计板单元的。总的来说位移函数比较复杂，且各自还存在一些固有的缺点，近年来的研究工作已提出很多不限于以 w 为唯一场函数的板单元。这些将在以下几节中进行讨论。

10.4　Mindlin 板单元
（位移和转动各自独立插值的板单元）

10.4.1　Mindlin 板单元的表达格式

在上一章已经讨论了位移和转动各自独立插值的 Timoshenko 梁单元，现在要讨论的单元实际上是同一原理在板弯曲问题中的应用。

当位移和转动是各自独立的场函数时，系统的总位能可以表示为

$$\bar{\Pi}_p = \Pi_p + \iint_\Omega \alpha_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_\Omega \alpha_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (10.4.1)$$

其中 Π_p 就是(10.1.12)式所表示的系统总位能。如果没有给定的边界外力作用，则

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \iint_\Omega \boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{\kappa} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_\Omega q w \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (10.4.2)$$

上式内 $\boldsymbol{D}_b$ 即(10.1.5)式表示的弹性关系矩阵 $\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{\kappa}$ 在位移和转动各自独立的情况下应表示为[①]

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\left(\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \tag{10.4.3}$$

如同 Timoshenko 梁单元的情况,对于各向同性材料的板单元,在(10.4.1)式中,可令

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = \frac{Gt}{2k} \tag{10.4.4}$$

其中 G 是材料剪切模量,t 是板厚,k 是考虑实际的剪应变沿厚度方向非均匀分布而引入的校正系数,按能量相当,应取 $k=6/5$。这样一来,(10.4.1)式表示的就是考虑剪切变形的 Mindlin 平板理论的泛函,根据它构造的板单元以及建立的有限元格式将可用于分析较厚的平板弯曲问题。而用于薄板时,(10.4.1)式的后两项起罚函数作用,使 Kirchhoff 直法线假设通过以下约束条件得到实现

$$\boldsymbol{C} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = 0 \tag{10.4.5}$$

由于位能表达式中 w 和转动 θ_x,θ_y 是各自独立插值的,所以它们的插值函数只要求 C_0 的连续性。可以利用第 3 章中所介绍的各种 C_0 型的二维插值函数将 w,θ_x,θ_y 表示为

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e \tag{10.4.6}$$

其中

$$\boldsymbol{N} = [N_1\boldsymbol{I} \quad N_2\boldsymbol{I} \quad \cdots \quad N_n\boldsymbol{I}]$$

$\boldsymbol{I}$ 是 3×3 单位矩阵,n 是单元结点数

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_i = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

将(10.4.6)式代入(10.4.3)和(10.4.5)式,可得

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{B}_b\boldsymbol{a}^e \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{a}^e \tag{10.4.7}$$

其中

---

① 应注意这里的 θ_x,θ_y 在定义上和前二节的 θ_x,θ_y 有所区别,现在的 θ_x,θ_y 是和 $\partial w/\partial x,\partial w/\partial y$ 方向一致的转动。

$$B_b = [B_{b1}\ B_{b2} \cdots B_{bn}] \qquad B_s = [B_{s1}\ B_{s2} \cdots B_{sn}]$$

$$B_{bi} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ -\dfrac{\partial N_i}{\partial y} & -\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{si} = \begin{bmatrix} -N_i & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -N_i & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

将上式及(10.4.6)式代入泛函(10.4.1)式，则由泛函的变分为0可以得到

$$Ka = (K_b + \alpha K_s)a = P \tag{10.4.8}$$

其中

$$K_b = \sum_e K_b^e,\ K_s = \sum_e K_q^e,\ P = \sum_e P^e$$

而

$$K_b^e = \iint_{\Omega_e} B_b^{\mathrm{T}} D_b B_b \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad K_s^e = \iint_{\Omega_e} B_s^{\mathrm{T}} B_s \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$P^e = \iint_{\Omega_e} N^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{Bmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

需要指出的是，由于Mindlin板理论中有三个各自独立的C_0型的场函数，因此在板边界的每一点上应有3个(而不是只有一个独立的C_1型场函数的薄板理论中的2个)边界条件。Mindlin板理论中三种类型的边界条件表述如下：

$$w = \overline{w},\ \theta_n = \bar{\theta}_n, \qquad \theta_s = \bar{\theta}_s \quad 在 S_1 上 \tag{10.4.9}$$

$$w = \overline{w},\ M_n = \overline{M}_n, \qquad M_s = \overline{M}_s \quad 在 S_2 上 \tag{10.4.10}$$

$$Q_n = \overline{Q}_n,\ M_n = \overline{M}_n, \qquad M_s = \overline{M}_s \quad 在 S_3 上 \tag{10.4.11}$$

其中下标n和s分别表示边界的法向和切向。上述三类边界条件的齐次形式分别代表固定边，简支边和自由边情况。给定位移和转动w,θ_n,θ_s属于强制边界条件，给定横向力和力矩Q_n,M_n,M_s属于自然边界条件。

从以上讨论可见，由于Mindlin板单元是C_0型单元，它的表达格式相当简单，基本上和平面应力单元的表达格式类似。如果已有平面问题程序，只要稍加修改，就可得到Mindlin板单元的程序，因此它和与它基于同一原理的超参壳元，在工程分析中得到广泛的应用。同时进一步完善Mindlin板单元和超参壳元的研究工作也受到很大的重视，并取得进展。

10.4.2 剪切锁死和零能模式问题

从以上讨论可见，Mindlin板的泛函中的剪切应变能项是利用罚函数法将位移和转动之间的约束条件引入薄板理论泛函的结果。正如Timoshenko梁单元的情况，为避免在板很薄(即$t/l \ll 1$)的情况发生剪切锁死，必须保证有限元求解方程的刚度矩阵中与罚函数相关的部分K_s的奇异性。但是，为保证K_s的奇异性，必然不能对单元刚度矩阵采用精确积分。但是采用减缩积分有可能导致系统刚度矩阵K的奇异性。从而使问题的解答中包含了除刚体运动以外的变形模式，即零能模式。因此，在保证K_s奇异性以避免在板变薄

时出现剪切锁死的同时，还必须保证 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性，以避免出现零能模式。这两个问题是保证 Mindlin 板单元具有良好性能的关键问题。

首先讨论保证 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性和 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性的条件，在第4章中讨论等参实体单元的数值积分时，曾提出保证 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性的必要条件是

$$Mn_g d \geqslant N \tag{4.6.5}$$

其中 M 是单元数，n_g 是每个单元的高斯积分点数，d 是应变分量数，N 是系统的独立自由度数，N=结点总数×每个结点数的位移参数数－给定约束数。

对于 Mindlin 板单元，保证 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性的必要条件可表示如下

$$Mn_b d_b + Mn_s d_s \geqslant N \tag{10.4.12}$$

其中 M 是单元数，n_b 和 n_s 分别是计算 $\boldsymbol{K}_b$ 和 $\boldsymbol{K}_s$ 时所采用的高斯积分点数，d_b 和 d_s 分别是弯曲应变和剪切应变的分量数，对于 Mindlin 板单元，$d_b=3$，$d_s=2$，N 是系统的独立自由度数。

在4.6节曾经指出，为保证 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性，理论上严格的方法是求解仅赋予刚体运动约束的一个单元刚度矩阵的特征值问题。如果不再有零特征解，则系统刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 必将是非奇异的。

关于保证 Mindlin 板单元所形成系统刚度矩阵中与剪切应变能项相关的部分 $\boldsymbol{K}_s$ 的奇异性，参照(4.6.5)式，可以给出它的充分条件如下

$$Mn_s d_s < N \tag{10.4.13}$$

由于在研究单元性质时，不可能事先规定今后应用中的单元数 M 和自由度数 N，还可建议用以下两个较易应用的公式

$$n_b d_b + n_s d_s \geqslant j \tag{10.4.14}$$

$$n_s d_s < j \quad 或 \quad s = j - n_s d_s > 0 \tag{10.4.15}$$

分别代替(10.4.12)式和(10.4.13)式对 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性和 $\boldsymbol{K}_s$ 的奇异性作出估计。其中 j 是在已形成部分网格的基础上再增加一个单元所增加的自由度数，s 称为奇异性指数，s 愈大表示 $\boldsymbol{K}_s$ 的奇异性愈高。但应强调指出，以上两式所提供的仅是关于 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性和 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性条件的一种估计，即(10.4.14)式已不像(10.4.12)式那样是 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性的必要条件，(10.4.15)式也不像(10.4.13)式那样是 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性的充分条件。因为用以上两式中的自由度数 j 去推算具有不同网格和边界约束情况的系统自由度 N 既可能小于 $M\times j$，也可能大于 $M\times j$。

以下具体介绍几种常见诸文献的、关于避免 Mindlin 板单元出现零能模式和发生剪切锁死的方法。

10.4.3 积分方案的选择

在前一章的讨论中，我们已经知道减缩积分方法在避免 Timoshenko 梁单元发生剪切锁死中的作用。但减缩积分方案有可能导致 $\boldsymbol{K}$ 奇异，故在分析中还有 $\boldsymbol{K}_b^e$ 和 $\boldsymbol{K}_s^e$ 采用不同阶的选择积分方案。例如8结点 Serendipity Mindlin 板单元，在 $|\boldsymbol{J}|$=常数(即单元形状为矩形或平行四边形)情况下，$\boldsymbol{K}^e$ 的精确积分和减缩积分分别为 3×3 和 2×2 积分，而所谓选择积分可以是对 $\boldsymbol{K}_b^e$ 和 $\boldsymbol{K}_s^e$ 分别采用 3×3 和 2×2 积分。E. Hinton 和 H. C. Huang 在文

[1]中对几种四边形 Mindlin 板单元在采用不同积分方案情况下的性能进行了研究。它们的性能估计和 0 特征值数的计算结果列于表 10.3。表中关于 $\boldsymbol{K}$ 奇异性估计是按(10.4.14)式作出的。如果按 $n_b d_b + n_s d_s \geqslant N_e$ 作估计，除 LLR 单元而外，结果也是相同的。

表 10.3　Mindlin 板单元采用不同积分方案时的性能检验

单元型式	N_e	j	单元名称	积分方案 $\boldsymbol{K}_b$	积分方案 $\boldsymbol{K}_s$	$n_s d_s$	$n_b d_b + n_s d_s$	$\boldsymbol{K}$ 奇异性 估计	$\boldsymbol{K}$ 奇异性 实际零特征数	$\boldsymbol{K}_s$ 奇异性 估计	$\boldsymbol{K}_s$ 奇异性 充分性检查	$\boldsymbol{K}_s$ 奇异性 计算结果
	9	3	LLR	1×1	1×1	2	5	√	4	√	√	√
			LLS	2×2	1×1	2	14	×	2	√	√	√
			LLF	2×2	2×2	8	20	×	0	×	×	×
	21	9	QSR	2×2	2×2	8	20	√	1	√	×	×
			QSS	3×3	2×2	8	35	×	0	√	×	×
			QSF	3×3	3×3	18	45	×	0	×	×	×
	24	12	QLR	2×2	2×2	8	20	√	4	√	√	√
			QLS	3×3	2×2	8	35	×	1	√	√	√
			QLF	3×3	3×3	18	45	×	0	×	×	√
	33	15	CSR	3×3	3×3	18	45	×	0	×	×	×
			CSS	4×4	3×3	18	66	×	0	×	×	×
			CSF	4×4	4×4	32	80	×	0	×	×	×
	45	27	CLR	3×3	3×3	18	45	×	4	√	√	√
			CLS	4×4	3×3	18	66	×	1	√	√	√
			CLF	4×4	4×4	32	80	×	0	×	×	√

1. 单元型式中各个单元的左边界和下边界加上固定边界标志仅是为了表示已形成部分网格再增加一个单元的情况，用以表明如何计算 j。
2. N_e 是一个单元仅给以刚体运动约束后的自由度数。
3. 单元名称的第一个字母 L，Q 和 C 分别表示线性、二次和三次；第二个字母 L 和 S 分别表示 Lagrange 和 Serendipity；第三个字母 R，S 和 F 分别表示减缩、选择和精确积分。
4. $\boldsymbol{K}$ 奇异性中，估计是按(10.4.14)式，实际零特征数是求解单个仅给以刚体运动约束的单元刚度矩阵特征值问题的结果。
5. $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性中，估计是按(10.4.15)式，充分性检查是对于图 10.12 算例给定网格和边界条件按(10.4.13)式，计算结果是该算例实际分析得到的。

但是求解仅给以刚体约束的单个单元矩阵($N_e \times N_e$ 阶)特征值问题的结果,对于 LLS,QLS,CLR,CLS 几种单元都和估计的结果不同。这说明(10.4.14)式给出的估计只能作为参考。无论对于仅给以刚体约束的单个单元来说,还是对于结构系统来说,它都不能作为保证刚度矩阵非奇异性的充分条件。而求解仅给以刚体约束的单个单元的矩阵特征值问题,如果不存在零特征值,则可保证系统刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是非奇异的。但这并不是 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性的必要条件。例如 QSR,QLS,CLS 几种单元在单个单元情况下虽然有 1 个零特征值,但是如果实际分析用的网有两个以上的单元,则 $\boldsymbol{K}$ 将不再是奇异的,即它将不再存在零特征值问题,也即问题的解答中不会包含对应于零特征值的零能模式。

文[1]还利用 8×8 网格对受均布载荷的固支方板进行分析的结果考查上述各种单元情况在板变薄时的性能。结果表示于图 10.12 中。对于图示各种情况,如采用精确积分方案,无论是用(10.4.15)式对 $\boldsymbol{K}_s$ 的奇异性进行估计,还是用(10.4.13)式对 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性的充分性作出评价,它们都将可能发生剪切锁死。而实际计算结果表明,LLF,QSF,CSF 三种情况确实发生了锁死,而 QLF,CLF 并未发生锁死。这也说明(10.4.15)式只是一种估计。而(10.4.13)式是 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性的充分而非必要条件。由于式中 Mn_sd_s 个约束关系不完全是相互独立的,而实际相互独立的约束关系数在现在的情况下是少于系统总自由度数 N。至于 QLF 的结果比精确解偏低,是由于单元性能稍偏刚硬的结果。关于减缩积分或选

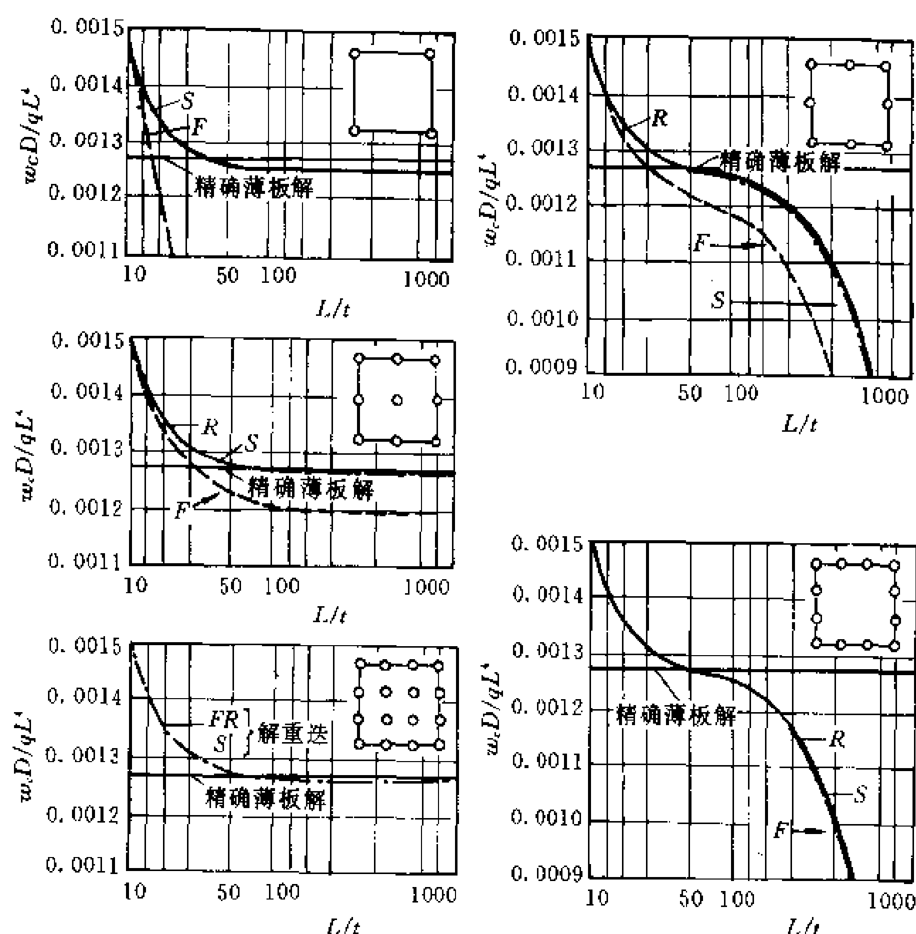


图 10.12 Lagrange 单元和 Serendipity 单元的锁死试验

择积分情况，如用(10.4.13)式进行检查。3 种 Lagrange 单元都满足，而 2 种 Serendipity 单元都不满足 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性的充分条件。实际计算结果和上述结论一致。只是 QSR 单元，如用(10.4.15)式进行估计，它是满足 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性条件的。这再次表明(10.4.15)式只能提供一种估计，在使用时应十分小心。因为它未考虑具体网格和边界条件等因素。上述算例和讨论还表明，在避免剪切锁死方面，Lagrange 单元通常比 Serendipity 单元具有较好的性能。

10.4.4 假设剪切应变方法

如同 Timoshenko 梁情况，为避免剪切锁死，可以从分析造成锁死的根源出发，另行假设剪切应变场以替代原泛函中按应变和位移的几何关系得到的剪切应变场。为讨论方便，先以图 10.13 所示四边形单元为例。

$$w = \sum_{i=1}^{4} N_i w_i,\ \theta_x = \sum_{i=1}^{4} N_i \theta_{xi},\ \theta_y = \sum_{i=1}^{4} N_i \theta_{yi} \tag{10.4.16}$$

其中 $$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

$$\xi = \frac{x-x_c}{a}, \qquad \eta = \frac{y-y_c}{b}$$

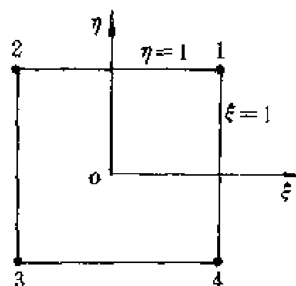


图 10.13 中结点 Mindlin 板单元

上式代入几何关系，可得

$$\begin{aligned}\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x &= \sum_{i=1}^{4}\Big[\Big(\frac{\xi_i}{4a}w_i + \frac{1}{4}\theta_{xi}\Big) + \Big(\frac{\xi_i\eta_i}{4a}w_i + \frac{\eta_i}{4}\theta_{xi}\Big)\eta \\ &\quad + \Big(\frac{\xi_i}{4}\theta_{xi}\Big)\xi + \Big(\frac{\xi_i\eta_i}{4}\theta_{xi}\Big)\xi\eta\Big] \\ &= \alpha_1(w_i,\theta_{xi}) + \alpha_2(w_i,\theta_{xi})\eta + \alpha_3(\theta_{xi})\xi + \alpha_4(\theta_{xi})\xi\eta\end{aligned} \tag{10.4.17}$$

其中 $$\alpha_1(w_i,\theta_{xi}) = \frac{1}{4a}(w_1 - w_2 + w_4 - w_3) + \frac{1}{4}(\theta_{x1}+\theta_{x2}+\theta_{x3}+\theta_{x4})$$

$$\alpha_2(w_i,\theta_{xi}) = \frac{1}{4a}[(w_1-w_2)-(w_4-w_3)] + \frac{1}{4}[(\theta_{x1}+\theta_{x2})-(\theta_{x3}+\theta_{x4})]$$

$$\alpha_3(\theta_{xi}) = \frac{1}{4}(\theta_{x1}-\theta_{x2}+\theta_{x4}-\theta_{x3})$$

$$\alpha_4(\theta_{xi}) = \frac{1}{4}(\theta_{x1}-\theta_{x2}-\theta_{x4}+\theta_{x3})$$

类似地可以得到 γ_y 的结点位移表达式。当板越来越薄时，通过罚函数迫使约束条件实现。即迫使 γ_x,γ_y 趋于零，这隐含着要求(对于 γ_x 项)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \tag{10.4.18}$$

从(10.4.17)式可见，要求 $\alpha_1=\alpha_2=0$，实际是结点挠度 w_i 和结点转动 θ_{xi} 之间满足一定线性关系，即

$$\frac{w_1 - w_2}{2a} = \frac{\theta_{x1} + \theta_{x2}}{2}$$
$$\frac{w_4 - w_3}{2a} = \frac{\theta_{x3} + \theta_{x4}}{2} \tag{10.4.19}$$

它们代表的分别正是薄板 1 2 边和 3 4 边中点的 Kirchhoff 假设。在计算中也是可以实现的。而 $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$，即要求

$$\theta_{x1} - \theta_{x2} + \theta_{x4} - \theta_{x3} = 0$$
$$\theta_{x1} - \theta_{x2} - \theta_{x4} + \theta_{x3} = 0 \tag{10.4.20}$$

从上式解出的是 $\theta_{x1} = \theta_{x2}$，$\theta_{x3} = \theta_{x4}$。如再考虑 γ_y 项，将又可解出 $\theta_{y2} = \theta_{y3}$，$\theta_{y1} = \theta_{y4}$。以上四个等式意味着只允许单元的四个边界保持直线的变形，也即纯扭的变形。无疑这将给变形过分的限制，使板过分刚硬。在一般情况下，使问题只能有零解。假设剪切变形方法即另行构造不包含 α_3 和 α_4 项的剪切应变 $\bar{\gamma}_x$ 和 $\bar{\gamma}_y$ 以代替原来泛函中的 γ_x 和 γ_y，即将新的泛函表示成

$$\pi_P^* = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_b \boldsymbol{\kappa} \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\frac{Gt}{k}\int \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega q w \mathrm{d}\Omega$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}$ 仍如(10.4.3)式不变，$\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ 可表示如下

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_x \\ \bar{\gamma}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \bar{N}_{xi} \bar{\gamma}_{xi} \\ \sum_{i=1}^{m} \bar{N}_{yi} \bar{\gamma}_{yi} \end{Bmatrix} = \bar{\boldsymbol{N}} \bar{\boldsymbol{\gamma}}^e \tag{10.4.21}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{x1} & \bar{N}_{x2} & \cdots & \bar{N}_{xm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{N}_{y1} & \bar{N}_{y2} & \cdots & \bar{N}_{ym} \end{bmatrix}$$
$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}^e = [\bar{\gamma}_{x1} \quad \bar{\gamma}_{x2} \quad \cdots \quad \bar{\gamma}_{xm} \quad \bar{\gamma}_{y1} \quad \bar{\gamma}_{y2} \quad \cdots \quad \bar{\gamma}_{ym}]^{\mathrm{T}}$$

即单元内的 $\bar{\gamma}_x$ 和 $\bar{\gamma}_y$ 由各自的 m 个取样点的 $\bar{\gamma}_{xi}$和 $\bar{\gamma}_{yi}$通过插值得到，$\bar{N}_{xi}$和 $\bar{N}_{yi}$是各自的插值函数。仍以上述 4 结点单元为例，可取(参看图 10.14)

$$\gamma_x = \sum_{i=1}^{2} \bar{N}_{xi} \bar{\gamma}_{xi}, \quad \gamma_y = \sum_{i=1}^{2} \bar{N}_{yi} \gamma_{yi} \tag{10.4.22}$$

其中

$$\bar{N}_{x1} = \frac{1}{2}(1+\eta) \quad \bar{N}_{x2} = \frac{1}{2}(1-\eta)$$
$$\bar{\gamma}_{x1} = \gamma_{xA} = \frac{w_1 - w_2}{2a} - \frac{\theta_{x1} + \theta_{x2}}{2}$$
$$\bar{\gamma}_{x2} = \gamma_{xB} = \frac{w_4 - w_3}{2a} - \frac{\theta_{x3} + \theta_{x4}}{2}$$
$$\bar{N}_{y1} = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad \bar{N}_{y2} = \frac{1}{2}(1-\xi)$$
$$\bar{\gamma}_{y1} = \gamma_{yC} = \frac{w_1 - w_4}{2b} - \frac{\theta_{y1} + \theta_{y4}}{2}$$

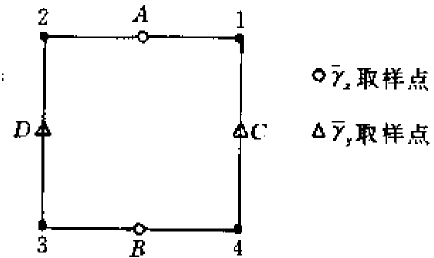


图 10.14　假设剪切应变取样点

$$\bar{\gamma}_{y2}=\gamma_{yD}=\frac{w_2-w_3}{2b}-\frac{\theta_{y2}+\theta_{y3}}{2}$$

可以验证，(10.4.22)式所表示的 $\bar{\gamma}_x$ 就是(10.4.17)式中舍去 $\alpha_3\xi$ 和 $\alpha_4\xi\eta$ 项所表达的结果。$\bar{\gamma}_y$ 也是在相应的 γ_y 表达式舍去包含的 η 和 $\xi\eta$ 项的结果。

正因为 $\bar{\gamma}_x$ 和 $\bar{\gamma}_y$ 中舍弃了除非导致问题零解而不可能实现的虚假约束。因此用它们替代原泛函中的 γ_x 和 γ_y，就不再会发生锁死现象。这样一来，单元刚度矩阵可以不区分 $\boldsymbol{K}_b^e$ 和 $\boldsymbol{K}_s^e$ 采用统一的积分方案进行计算。

另一方面，可以有趣地指出，以上讨论的假设剪切应变方案是和原泛函中 γ_x 采用 1×2，γ_y 采用 2×1 积分方案得到的单元刚度矩阵是相同的。从保证 $\boldsymbol{K}$ 非奇异考虑，对于 4 结点单元相当于增加了 2 个约束。因此在 $\boldsymbol{K}_b^e$ 采用 2×2 积分方案时，单元将不再存在除刚体运动以外的运动模式(在 $\boldsymbol{K}_s^e$ 采取 1×1 积分方案，有 2 个这样的零能模式)。因此合理地选择假设剪切应变场可以达到同时避免剪切锁死和零能模式的目的，从而显著地改善了单元的性能。

基于同样的分析，可以得到其它单元假设剪切应变 $\bar{\gamma}_x$、$\bar{\gamma}_y$ 应选择的取样点及插值函数。为便于应用，现将各种单元假设剪切应变的取样点一并列于表 10.4。

从表中可见 $\bar{\gamma}_x(\bar{\gamma}_{\xi\zeta})$ 在 ξ 方向按高斯积分点取值，在 η 方向等间距取值；$\bar{\gamma}_y(\bar{\gamma}_{\eta\zeta})$ 则反之，η 方向按高斯积分点取值，ξ 方向等间距取值。

至于插值函数，4，9，16 结点 Lagrange 单元可按第 3 章讨论的 C_0 型 Lagrange 单元的方法构造。8，12 结点 Serendipity 单元可按 C_0 型 Serendipity 单元的方法构造。即分别按二个方向一维 Lagrange 插值函数相乘的方法和变结点的方法构造。现以 8 结点单元的 $\bar{\gamma}_x$ 为例进一步阐明。

$$\bar{\gamma}_x=\sum_{i=1}^{5}N_i(\xi,\eta)\gamma_{xi} \tag{10.4.23}$$

先不考虑第 5 个取样点，按双线性函数构造

$$\hat{N}_1=\frac{1}{4}(1+\eta)\left(1+\frac{\xi}{a}\right)$$

$$\hat{N}_2=\frac{1}{4}(1+\eta)\left(1-\frac{\xi}{a}\right)$$

$$\hat{N}_3=\frac{1}{4}(1-\eta)\left(1+\frac{\xi}{a}\right)$$

$$\hat{N}_4=\frac{1}{4}(1-\eta)\left(1-\frac{\xi}{a}\right)$$

再构造

$$N_5=1-\eta^2$$

最后再修正 $\hat{N}_i$ $(i=1,2,3,4)$，得到

$$N_1=\hat{N}_1-\frac{1}{4}N_5=\frac{1}{4}(1+\eta)\left(\frac{\xi}{a}+\eta\right)$$

$$N_2=\hat{N}_2-\frac{1}{4}N_5=\frac{1}{4}(1+\eta)\left(-\frac{\xi}{a}+\eta\right)$$

$$N_3 = \hat{N}_3 - \frac{1}{4}N_5 = \frac{1}{4}(1-\eta)\left(\frac{\xi}{a} - \eta\right)$$

$$N_4 = \hat{N}_4 - \frac{1}{4}N_5 = \frac{1}{4}(1-\eta)\left(-\frac{\xi}{a} - \eta\right)$$

将以上各式中 ξ 和 η 对调，就可以得到 $\bar{\gamma}_y$ 的插值函数。其它单元的插值函数也可如法炮制，这里不一一列举。

表 10.4　各种形式 Mindlin 单元假设剪切应变场的取样点

单元型式	$\bar{\gamma}_x(\bar{\gamma}_{\xi\zeta})$的取样点	$\gamma_y(\bar{\gamma}_{\eta\zeta})$的取样点
2 1 3 4	(1) (2)	(4) (3)
2 5 1 6 8 3 7 4	(2) (1) (5) (3) (4)	(7) (6) (10) (8) (9)
2 5 1 6 9 8 3 7 4		
2 6 5 1 7 12 8 11 3 9 10 4		
2 6 5 1 14 13 7 12 15 16 8 11 3 9 10 4		

以上讨论是对矩形单元并假定 $x /\!/ \xi, y /\!/ \eta$ 进行的。为了实际应用，需要将以上讨论推广到一般的四边形单元。具体的方法简述如下：

1. 按以上讨论构造假设剪切应变场的方法，构造协变剪切应变场 $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$ 和 $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$。其中：

$$\gamma_{\xi\zeta} = \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta_\xi \qquad \gamma_{\eta\zeta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} - \theta_\eta$$

2. 通过坐标变换得到 $\bar{\gamma}_x$ 和 $\bar{\gamma}_y$。

$$\bar{\gamma}_x = \frac{2}{t}\left(\bar{\gamma}_{\xi\zeta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \bar{\gamma}_{\eta\zeta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \quad \bar{\gamma}_y = \frac{2}{t}\left(\bar{\gamma}_{\xi\zeta}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \bar{\gamma}_{\eta\zeta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

具体列式及步骤可参看前面已引用的 E. Hinton 和 H. C. Huang 的文章。

例 四边固支受均布载荷的方板，取$\frac{1}{4}$用三种不同形状 8 结点单元组成的 3×3 网格进行分析，图 10.15 给出了板中心挠度的计算结果[1]。从图可见，当板愈来愈薄时，并未发生剪切锁死现象。当 $l/t>10^6$ 以后，误差较大是计算误差造成的。而同样的问题，即使采用减缩积分方法，而且是 8×8 网格，从图 10.12 已看到，当 $l/t>50$ 以后，即开始出现剪切锁死现象。当 $l/t=10^3$ 时，已完全锁死。如按(10.4.15)式对 8 结点单元的 $\boldsymbol{K}_s$ 作奇异性估计，恰恰是采用减缩积分时，由于 $j=9$，而 $n_s d_s=8$，认为不会锁死，而现在采用假设剪切应变方法情况，则由于 $j=9$，而 $n_s d_s=10$，认为会发生锁死。造成这种实际计算结果和(10.4.15)估计公式相反结果的原因是，假设剪切应变方法中 $\bar{\gamma}_x$ 和 $\bar{\gamma}_y$ 各有 4 个取样点在单元边界上，相邻单元是共有的，即相邻单元在交界面上 $\bar{\gamma}_x$ 或 γ_y 数值是相同的。也即提供的约束是相同的。如按(10.4.13)式对系统的 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性的充分条件进行校核，得到的结论就和计算一致了。这点读者可以作出练习加以验证。

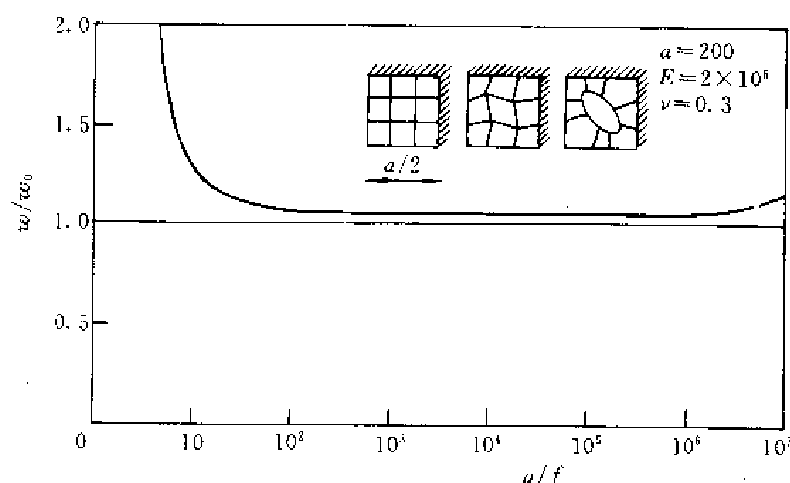


图 10.15 周边固支方板的中心挠度 w/w_0～宽厚比 a/t
(用 8 结点假设剪切应变 Mindlin 单元，w_0——薄板理论解)

以上关于保证 Mindlin 板单元 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性及 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性的条件及各种方法的讨论，主要目的在于对这类结构单元(包括 Mindlin 板单元，Timoshenko 梁单元，及下二章讨论的位移和截面转动各自独立插值的壳体单元和超参数壳体单元)的性质以及当前这领域的研究工作有一较全面的了解。从实际应用角度考虑，包括现有一般通用程序的情况，普遍采用的仍是减缩积分方法。这不仅是因为它最方便于应用，数值处理非常简单。而且因为它可能导致出现零能位移模式的情况，只是在板较厚且单元很少同时边界约束也很少时才会发生。这一情况实际分析中很少遇到。而且对于较厚的板可以采用精确积分，既避免

了零能模式，也不会发生剪切锁死。当然采用减缩积分，在薄板情况仍可能出现剪切锁死问题，这主要发生于 Serendipity 单元且网格中单元数不太多的情况。这时可以通过改用 Lagrnage 单元加以避免。所以在实际分析中，一般推荐采用 4 结点和 9 结点的 Lagrnage 单元于薄板的分析。

10.5 基于离散 Kirchhoff 理论(DKT)的板单元

上节讨论的 Mindlin 板单元，由于 w 和 θ_x,θ_y 是独立插值的，表达格式基本上和二维实体单元相同，所以是相当简单的。在实际应用中得到满意的结果。但是由于 w 和 θ_x,θ_y 之间的约束是利用罚函数方法引入的，一方面使单元可进一步用于厚板，另方面也确实带来不少麻烦，即要注意同时保证 $\boldsymbol{K}_s$ 的奇异性和 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性。而离散 Kirchhoff 理论(DKT)单元则可以避免上述缺点。

DKT 单元也是采用 w 和 θ_x,θ_y 的独立插值。不同的是 w 和 θ_x,θ_y 之间的约束方程(10.4.5)式不是用罚函数方法引入，而是在若干离散点强迫其实现。这样一来，泛函表达式(10.4.1)右端的后两项可以略去，而恢复为经典薄板理论的泛函表达式，即

$$\Pi_P = \frac{1}{2}\iint_\Omega \boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\kappa}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_\Omega qw\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.5.1}$$

其中 κ 与 θ_x,θ_y 的关系如(10.4.3)式。

现以 3 结点三角形 DKT 单元为例[2]，阐明其表达格式的建立。

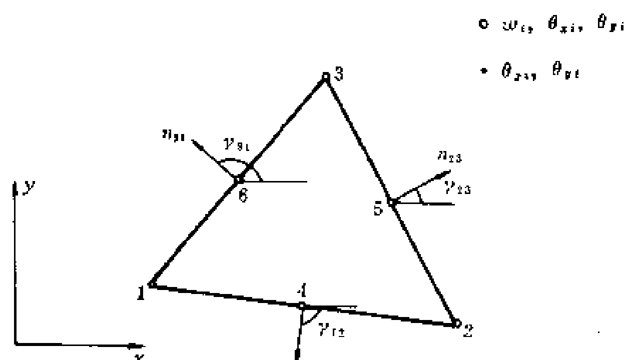


图 10.16 DKT 单元

图 10.16 所示为 DKT 单元，其每个角结点有参数 $w_i,\theta_{xi},\theta_{yi}(i=1,2,3)$，边中结点有参数 $\theta_{xi},\theta_{yi}(i=4,5,6)$。

单元内 θ_x,θ_y 是二次变化，插值表示成

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{6} N_i\theta_{xi}, \qquad \theta_y = \sum_{i=1}^{6} N_i\theta_{yi} \tag{10.5.2}$$

其中插值函数 N_i 即 6 结点三角形 C_0 单元的插值函数，见(3.3.4)式。

在若干离散点令约束方程(10.4.5)式成立，用以引入 Kirchhoff 理论的直法线假设。具体是：

1. 在角结点

$$\boldsymbol{C}=\begin{Bmatrix}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i-\theta_{xi}\\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i-\theta_{yi}\end{Bmatrix}=0\quad(i=1,2,3)\tag{10.5.3}$$

2. 在各边中结点

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_k-\theta_{sk}=0\qquad(k=4,5,6)\\&\theta_{nk}=\frac{1}{2}(\theta_{ni}+\theta_{nj})\end{aligned}\tag{10.5.4}$$

上式中 s,n 分别表示各边界 ij 的切向和法向。θ_n,θ_s 和 θ_x,θ_y 的关系是

$$\begin{Bmatrix}\theta_n\\ \theta_s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\gamma_{ij} & \sin\gamma_{ij}\\ -\sin\gamma_{ij} & \cos\gamma_{ij}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_x\\ \theta_y\end{Bmatrix}\tag{10.5.5}$$

和

$$\begin{Bmatrix}\theta_x\\ \theta_y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\gamma_{ij} & -\sin\gamma_{ij}\\ \sin\gamma_{ij} & \cos\gamma_{ij}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_n\\ \theta_s\end{Bmatrix}$$

(10.5.4)后一式中，当 $k=4,5,6$ 时，分别有 $i=1,2,3$ 和 $j=2,3,1$。

沿各边界 ij 上的 w 可由两端结点的 4 个参数：$w_i,(\partial w/\partial s)_i,\ w_j,\ (\partial w/\partial s)_j$ 定义为三次变化，从而(10.5.4)前一式中的$(\partial w/\partial s)_k$ 可表示为

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_k=-\frac{3}{2l_{ij}}w_i-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_i+\frac{3}{2l_{ij}}w_j-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_j\tag{10.5.6}$$

其中：

$$l_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$$

利用(10.5.3)～(10.5.6)各式，最终可将单元内 θ_x,θ_y 表示成 3 个角结点参数的插值形式

$$\theta_x=\boldsymbol{H}_x\boldsymbol{a}^e\qquad\theta_y=\boldsymbol{H}_y\boldsymbol{a}^e\tag{10.5.7}$$

其中

$$\boldsymbol{a}^e=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_3\end{Bmatrix},\qquad\boldsymbol{a}_i=\begin{Bmatrix}w_i\\ \theta_{xi}\\ \theta_{yi}\end{Bmatrix}\quad(i=1,2,3)$$

$$\boldsymbol{H}_x=[\boldsymbol{H}_{x1}\quad\boldsymbol{H}_{x2}\quad\boldsymbol{H}_{x3}]$$

$$\boldsymbol{H}_y=[\boldsymbol{H}_{y1}\quad\boldsymbol{H}_{y2}\quad\boldsymbol{H}_{y3}]$$

$\boldsymbol{H}_{xi},\boldsymbol{H}_{yi}(i=1,2,3)$是 $N_j(j=1,2,\cdots,6)$和三角形角点坐标 $x_j,y_j(j=1,2,3)$的函数，读者可作为练习导出其显式表达式。

应当指出，此种 DKT 单元由于引入约束条件(10.5.4)式，消去了各边中结点的参数 $\theta_{xk},\theta_{yk}(k=4,5,6)$，所以仍是 3 结点三角形单元。在各边界上 θ_s 是二次变化，θ_n 是线性变化，它们由角结点上的参数完全确定，所以相邻单元之间是完全协调的。

在得到 θ_x,θ_y 的插值表示(10.5.7)式以后，按标准步骤可以计算单元的刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}^e=2A\int_0^1\int_0^{1-L_1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_b\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}L_2\mathrm{d}L_1\tag{10.5.8}$$

式中 L_1, L_2 是三角形的面积坐标，A 是三角形单元的面积。

由于在以上的推导中，未得到单元内 w 的表示式，为利用(10.5.1)式右端的第 2 项，即外力功项得到单元载荷向量，现在可定义一个用结点 $w_i(i=1,2,3)$ 表示的 w 的插值表达式

$$w = \sum_{i=1}^{3} N_i w_i \tag{10.5.9}$$

其中 N_i 即 2.2 节中所定义 3 结点三角形单元的位移插值函数(2.2.8)式。当板上表面作用有均布载荷 q 时，可以得到

$$Q_i^e = \frac{qA}{3}[1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \quad (i = 1,2,3) \tag{10.5.10}$$

这相当将板上全部载荷 qA，按团聚集中载荷的方法分配到 3 个结点上。

文[2]中通过一系列的计算比较了上述 DKT 单元和其他一些三角形板单元，DKT 单元的精度和效率均比较好。例如承受均布载何的简支方板，板中心挠度 w_c 的误差比较结果如图 10.17 所表示。图中 N 是 1/2 边长的单元数，(1) 是 DKT 单元，(2)，(3)分别是 10.2 节和 10.3 节所讨论的 3 结点三角形非协调元和协调元，(4) 是利用再分割法得到的 3 结点三角形协调元，(5) 是对单元(3)中的曲率进行磨平处理的板单元，(6) 是应力杂交元。

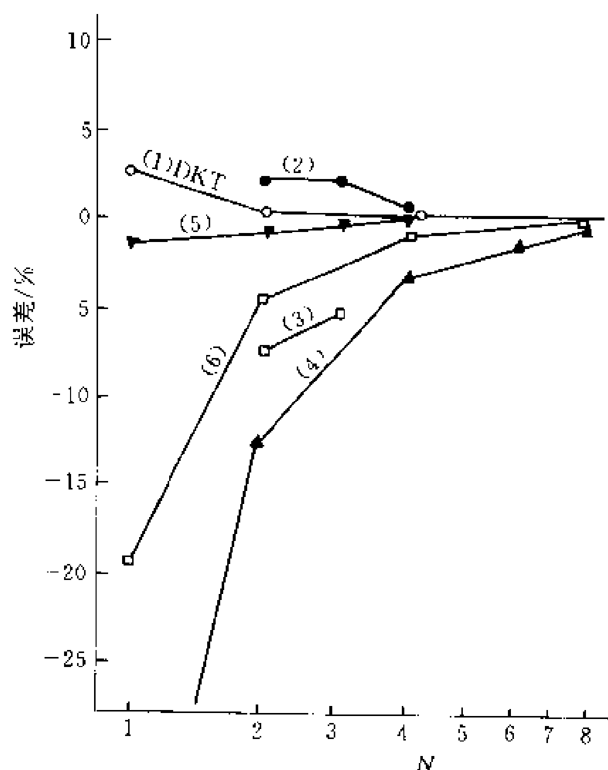


图 10.17 承受均布载荷简支方板中心挠度的误差比较

10.6 应力杂交板单元

以上所讨论的板单元都是基于最小位能原理及其修正形式，研究和构造板壳单元的另一重要途径是利用其他变分原理，例如基于 Hellinger-Reissner 变分原理的混合板单元，基于修正 Hellinger-Reissner 变分原理或修正余能原理的应力杂交元等。

关于混合单元，由于刚度矩阵在主对角线上存在零元素，不能用一般的矩阵求逆法求解，所以使用受到一定限制。另外在一定条件下可以证明它和 10.4 节讨论的减缩积分单元是等价的[31]，这里不再讨论。

下面从修正余能原理导出应力杂交元。因为应力杂交元在板、壳以外的问题中也有应用，所以从它的一般表达格式着手讨论。

10.6.1 修正余能原理

在第一章中我们已经导出最小余能原理，它可表述为在所有满足平衡和力的边界条件的可能应力中，真正解的应力使系统的总余能

$$\Pi_c(\sigma_{ij}) = \int_V \frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\mathrm{d}V - \int_{S_u} T_i\bar{u}_i\mathrm{d}S \tag{1.4.61}$$

取最小值。

当应用于有限元分析时，在单元交界面上应力满足平衡的要求是按照 $T_i=\sigma_{ij}n_j$ 定义的面力必须保持平衡

设将相邻单元(a)和(b)隔离开来，如图 10.18 所示，考虑共同边界 AB 各自一侧的面力分量 $T_i^{(a)}(S)$和 $T_i^{(b)}(S)$ ($i=1,2,3$)，单元交界面上的平衡方程是

$$T_i^{(a)}(S) + T_i^{(b)}(S) = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{10.6.1}$$

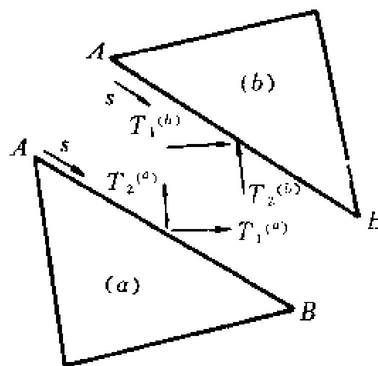


图 10.18 沿单元交界面上内力的平衡

在 8.4.2 节已指出，在选择应力的试探函数时，可以先不考虑上列方程的要求，而是将上式作为约束条件并通过 Lagrange 乘子引入泛函，就是将

$$\int_{AB}\lambda_i(S)[T_i^{(a)}(S) + T_i^{(b)}(S)]\mathrm{d}S = \int_{AB}\lambda_i T_i\mathrm{d}S\Big|_{(a)} + \int_{AB}\lambda_i T_i\mathrm{d}S\Big|_{(b)} \tag{10.6.2}$$

增添到原泛函中去。所有单元交界面都应考虑到，这样一来，用于有限元分析的余能原理的泛函可以修正成

$$\Pi_{m_c} = \sum_e\left(\int_{V_e}\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\mathrm{d}V - \int_{S_e}\lambda_i T_i\mathrm{d}S - \int_{S_{u_e}} T_i\bar{u}_i\mathrm{d}S\right) \tag{10.6.3}$$

其中 S_e 是单元 e 和其他单元相邻的边界面。通过 Π_{m_c}对 σ_{ij}和 λ_i 的变分为 0，并利用

$$C_{ijkl}\sigma_{kl} = \varepsilon_{ij}$$

和

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

容易证明 $\lambda_i(S)$ 应等于单元交界面上的位移 $u_i(S)$。从而最终得到应用于有限元分析的修正余能原理的泛函是

$$\Pi_{m_c} = \sum_e \left\{ \int_{V_e} \frac{1}{2} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \mathrm{d}V - \int_{S_e} T_i u_i \mathrm{d}S - \int_{S_{u_e}} T_i u_i \mathrm{d}S \right\} \qquad (10.6.4)$$

此泛函中独立变分的场函数是各个单元内的 σ_{ij} 和单元交界面上的位移 $u_i(S)$。对于 σ_{ij} 的要求是在各单元内满足平衡方程(1.4.1)式，而在各个单元的交界面上可以不满足平衡条件(10.6.1)式。需要指出，修正余能原理不再是极值原理，而只是驻值原理。此外，修正余能原理本质上也是一种混合变分原理，但是和 Hellinger-Reissner 混合变分原理有所区别。后者用于有限元分析时，应力 σ_{ij} 和位移 u_i 将同时出现在单元内部以及单元交界面上。而修正余能原理中 σ_{ij} 和位移 u_i 是分别出现在单元内部和交界面上，因此给这种部分场函数只出现在边界上的混合变分原理一个专门的名称：杂交型的变分原理。基于这种变分原理的有限元称为杂交元，而基于修正余能原理的杂交元称为应力杂交元。

10.6.2 应力杂交元的一般格式

在应力杂交元的格式中，将应力 σ_{ij} 的近似函数分成两部分，第一部分由有限个参数 β 组成，应满足齐次平衡方程，第二部分是具有给定体力项的平衡方程(即(1.4.1)式)的一个特解。用矩阵形式，应力 σ_{ij} 可表示成

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{P}_F\boldsymbol{\beta}_F \qquad (10.6.5)$$

其中 $\boldsymbol{\beta}$ 是待定参数，$\boldsymbol{P}$ 是系数为 0 或 x,y 单项式所组成的矩阵，而 $\boldsymbol{P}_F\boldsymbol{\beta}_F$ 由特解确定。对于边界上有给定面力的单元来说，第一项中的某些 β 也可以是给定的，在此情况下，所有给定的 β 均放入第二项。

因为面力也与假设的应力分布有关，所以它们能表示成

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{R}_F\boldsymbol{\beta}_F \qquad (10.6.6)$$

单元交界面上的近似位移可以通过插值函数和有限个边界结点处的广义位移 $\boldsymbol{a}$ 来表示，即

$$\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{L}\boldsymbol{a} \qquad (10.6.7)$$

因为插值函数 $\boldsymbol{L}$ 只是应用于每段边界上，所以要构造能保持单元之间协调性的 $\boldsymbol{L}$ 比较容易。广义位移 $\boldsymbol{a}$ 的元素数和应力参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的元素数可以分别独立地选择。

因为应力杂交元中可以假设边界位移，所以给定的边界应力不再构成应力事先需要满足的边界条件，即可以利用 $-\int_{S_{\sigma_e}}(T_i - \bar{T}_i)u_i \mathrm{d}S$ 将它引入泛函。在此情况下，泛函 Π_{m_c} 可更方便地表示成

$$\Pi_{m_c} = \sum_e \left(\int_{V_e} \frac{1}{2} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \mathrm{d}V - \int_{\partial V_e} T_i u_i \mathrm{d}S + \int_{S_{\sigma_e}} \bar{T}_i u_i \mathrm{d}S \right) \qquad (10.6.8)$$

其中

$$\partial V_e = S_e + S_{\sigma_e} + S_{u_e}$$

是单元 V_e 的全部边界，而在 S_{u_e} 上，$u_i = \bar{u}_i$。

将(10.6.5),(10.6.6)和(10.6.7)式代入(10.6.8)中,可以得到

$$\Pi_{m_c}=\sum_e\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_F\boldsymbol{\beta}_F-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+C_e\right)\tag{10.6.9}$$

其中

$$\boldsymbol{H}=\int_{V_e}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\mathrm{d}V,\qquad \boldsymbol{H}_F=\int_{V_e}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_F\mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{G}=\int_{\partial V_e}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\mathrm{d}S,\qquad \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{\beta}_F^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_F+\int_{S_{\sigma_e}}\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\mathrm{d}S$$

$$\boldsymbol{G}_F=\int_{\partial V_e}\boldsymbol{R}_F^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\mathrm{d}S,\qquad C_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_F^{\mathrm{T}}\int_{V_e}\boldsymbol{P}_F^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_F\mathrm{d}V\boldsymbol{\beta}_F$$

式内 $\boldsymbol{C}$ 是柔度矩阵 C_{ijkl} 的矩阵形式,$\bar{\boldsymbol{T}}$ 是给定的边界力。

(10.6.9)式对于 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的变分为0,给出泛函的驻值条件,

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{H}_F\boldsymbol{\beta}_F-\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}=0\tag{10.6.10}$$

$$\sum_e(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})\delta\boldsymbol{a}=0\tag{10.6.11}$$

从(10.6.10)式可以解得各个单元的应力参数 $\boldsymbol{\beta}$ 和位移参数 $\boldsymbol{a}$ 的关系

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{H}_F\boldsymbol{\beta}_F)\tag{10.6.12}$$

将上式代回(10.6.9)式,可以得到仅用广义位移表示的泛函 Π_{m_c},即

$$\Pi_{m_c}=-\sum_e\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^e\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^e+A_e\right)\tag{10.6.13}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^e=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G}\tag{10.6.14}$$

$$\boldsymbol{Q}^e=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{H}_F\boldsymbol{\beta}_F+\boldsymbol{S}\tag{10.6.15}$$

$$A_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_F^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_F^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{H}_F\boldsymbol{\beta}_F-C_e$$

(10.6.13)式在形式上和最小位能原理的泛函 Π_p 相同,其中 $\boldsymbol{K}^e$ 是单元刚度矩阵,$\boldsymbol{Q}^e$ 是单元载荷向量,A_e 是和特解 β^F 有关的常数,因为它不进入变分后的方程,所以实际上不必计算它。

从(10.6.13)式的变分为零,可以得到系统的求解方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{Q}=0\tag{10.6.16}$$

上式和基于位能原理的有限元求解方程在形式上是一致的。$\boldsymbol{K}$ 的对角线上不包含0元素,所以可以用一般的矩阵求逆法求解。

10.6.3 用于薄板弯曲问题的应力杂交元

(10.6.8)式表示的泛函 Π_{m_c} 用于薄板弯曲问题,并用矩阵表示,可以写成

$$\Pi_{m_c}=\sum_e\left\{\int_{\Omega_e}\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{M}\mathrm{d}\Omega-\int_{\partial\Omega_e}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mathrm{d}S+\int_{S_{\sigma_e}}\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mathrm{d}S\right\}\tag{10.6.17}$$

其中:

$$\boldsymbol{M}=[M_x\quad M_y\quad M_{xy}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \frac{12}{Et^3}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} V_n \\ M_n \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} w \\ -\dfrac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix}, \qquad \overline{\boldsymbol{T}} = \begin{Bmatrix} \overline{V}_n \\ \overline{M}_n \end{Bmatrix}$$

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \tag{10.6.18}$$

以上泛函中独立变分的场函数是单元内的 M_x, M_y, M_{xy}，以及单元交界面上的 w 和 $\partial w/\partial n$。附加的条件是 M_x, M_y, M_{xy} 应满足下列平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \tag{10.6.19}$$

现考虑在横向剪力、弯矩和扭矩作用下尺寸为 $a\times b$ 的一矩形单元，如图 10.19 所

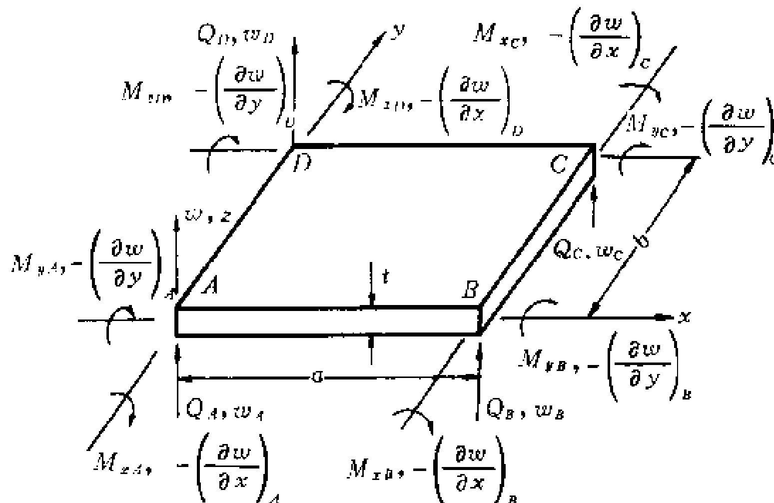


图 10.19　弯曲作用的矩形板单元

示[4]。每个结点有 3 个位移参数，单元结点位移参数向量是

$$\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_A \\ \boldsymbol{a}_B \\ \boldsymbol{a}_C \\ \boldsymbol{a}_D \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i \end{Bmatrix} \qquad (i = A,B,C,D) \tag{10.6.20}$$

对于此单元，每个结点有三个位移参数，和上节讨论的 DKT 单元类似，沿 $s_1=0$，$s_2=l$之间的直线边界上的挠度 w，可利用 Hermite 多项式表示成 s 的三次函数，即

$$w(s) = H_1^{(0)}(s)w_1 + H_2^{(0)}(s)w_2 + H_1^{(1)}(s)\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_1 + H_2^{(1)}(s)\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_2 \tag{10.6.21}$$

其中

$$H_1^{(0)}(s) = 1 - 3\left(\frac{s}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{l}\right)^3$$

$$H_2^{(0)}(s) = 3\left(\frac{s}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{l}\right)^3$$

$$H_1^{(1)}(s) = l\left[\frac{s}{l} - 2\left(\frac{s}{l}\right)^2 + \left(\frac{s}{l}\right)^3\right]$$

$$H_2^{(1)}(s) = -l\left[\left(\frac{s}{l}\right)^2 - \left(\frac{s}{l}\right)^3\right]$$

边界上的$\partial w/\partial n$则表示成s的线性函数，即

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \left(1 - \frac{s}{l}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_1 + \frac{s}{l}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_2 \tag{10.6.22}$$

对于现在的情况，边界位移矩阵可表示成

$$\boldsymbol{u} = \left[w_{AB} \quad -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{AB} \quad w_{BC} \quad -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{BC} \quad w_{DC} \quad -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{DC} \quad w_{AD} \quad -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{AD}\right]^{\mathrm{T}} \tag{10.6.23}$$

利用(10.6.21)、(10.6.22)式，上式可改写为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{a}^e \tag{10.6.24}$$

其中$\boldsymbol{L}$是系数为0或s多项式的8×12矩阵。

至于M_x，M_y，M_{xy}在满足平衡方程(10.6.19)式的条件下，如只取至完全三次式，可假设为

$$\begin{aligned}
M_x &= \beta_1 + \beta_4 y + \beta_6 x + \beta_{10} y^2 + \beta_{12} x^2 + \beta_{14} xy + \beta_{16} y^3 + \beta_{18} x^3 + \beta_{20} x^2 y + \beta_{22} xy^2 \\
M_y &= \beta_2 + \beta_5 x + \beta_7 y + \beta_{11} x^2 + \beta_{13} y^2 + \beta_{15} xy + \beta_{17} x^3 + \beta_{19} y^3 + \beta_{21} x^2 y + \beta_{23} xy^2 \\
M_{xy} &= \beta_3 + \beta_8 y + \beta_9 x - (\beta_{12} + \beta_{13}) xy - \frac{1}{2}(3\beta_{18} + \beta_{23}) x^2 y - \frac{1}{2}(3\beta_{19} + \beta_{20}) xy^2
\end{aligned} \tag{10.6.25}$$

上式还可表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta} \tag{10.6.26}$$

其中$\boldsymbol{P}$是系数为0或x，y单项式的3×23矩阵

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{23}]^{\mathrm{T}}$$

在推导边界力矩阵和内部应力分布之间的关系时，应考虑利用静力等效关系，即

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \tag{10.6.27}$$

对于现在的情况，边界力矩阵是

$$\boldsymbol{T} = [-V_{yAB} \quad -M_{yAB} \quad V_{xBC} \quad M_{xBC} \quad V_{yDC} \quad M_{yDC} \quad -V_{xAD} \quad -M_{xAD}]^{\mathrm{T}} \tag{10.6.28}$$

利用(10.6.25)，(10.6.26)和(10.6.27)式，上式可表示为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta} \tag{10.6.29}$$

其中$\boldsymbol{R}$是系数为0或x，y单项式的8×23矩阵。

应当指出，在用等效剪力替代扭矩时，将引起角点的附加集中力，其数值等于相应角点上M_{xy}值的两倍。当集中角点力未包含于边界力$\boldsymbol{T}$时，它们应加到(10.6.9)所给出的$\boldsymbol{G}$的积分中，以形成它的修正表达式。附加在角点的集中力与$\boldsymbol{\beta}$有如下线性关系式

$$\Delta V_A = -2\beta_3, \quad \Delta V_B = 2\beta_3 + 2a\beta_9$$

$$\Delta V_C = -2\beta_3 - 2b\beta_8 - 2a\beta_9 + 2ab(\beta_{12} + \beta_{13}) + a^2b(3\beta_{18} + \beta_{23}) + ab^2(3\beta_{19} + \beta_{20})$$

$$\Delta V_D = 2\beta_3 + 2b\beta_8$$

当知道 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{L}$ 等矩阵以后，就可按(10.6.9)，(10.6.14)和(10.6.15)等式计算单元刚度矩阵和载荷向量，并最后形成有限元求解方程。

前面曾指出，单元广义位移的数目，即 $\boldsymbol{a}$ 的元素数(n)和应力参数的数目，即 $\boldsymbol{\beta}$ 的元素数(m)可以分别独立地选择。现就选择 n,m 时应遵守的原则和一些实际考虑作必要的阐述和讨论。

从前例看到，当每个角点有三个位移参数：w_i，$(\partial w/\partial x)_i$，$(\partial w/\partial y)_i$ 时，边界上的 w 是三次变化，$\partial w/\partial n$ 是线性变化。如增加角点位移参数$(\partial^2 w/\partial x\partial y)_i$，则边界上$\partial w/\partial n$ 也可达到三次变化。另方面，系统的结点位移参数总数减去给定位移的约束数(至少是 3 个刚体位移模式)就是系统的自由度数 N。

在确定 m 时，首先应保证刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性。从(10.6.9)和(10.6.14)式可以看出 $\boldsymbol{K}$ 的秩与 $\boldsymbol{H}$ 的秩有关，而 $\boldsymbol{H}$ 的秩由 m 决定，实际上现在的 m 和(4.6.5)式中的 $n_g d$ 起相同的作用，所以保证系统刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 非奇异性的必要条件是

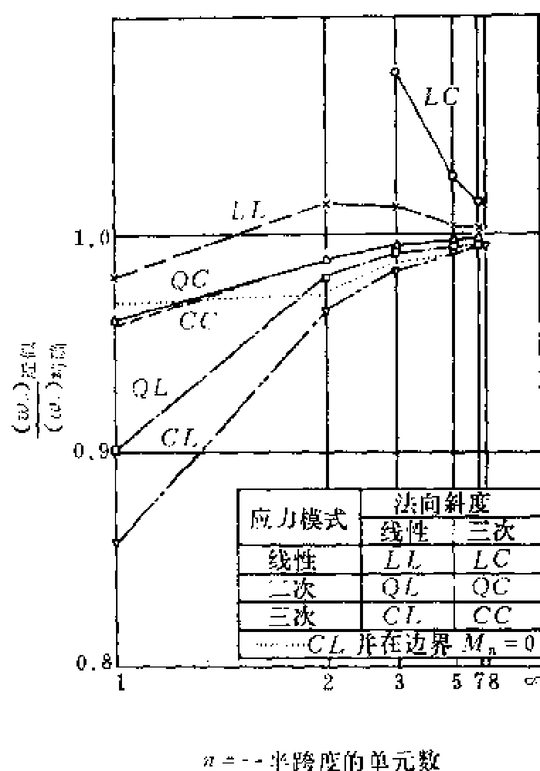
$$Mm \geqslant N$$

式中 M 是系统的单元数。如果只有一个单元，则

$$m \geqslant n - 3$$

对于应力杂交单元，在选定边界位移模式以后，选择应力参数的数目 m，实质上是在给定边界位移条件下选择最小余能原理的试探函数的模式。m 愈大，则解答愈接近满足内部的位移协调条件，即单元的性质愈接近位移协调元，因此结构愈呈现刚硬。另方面，在 m 选定以后，n 增加，单元性质趋于柔顺，使结构表现趋于柔软。以上分析可以通过图 10.20 所示的实际计算结果更清楚地表现出来。此例计算的是中心受有集中载荷简支方板的中心挠度。采用前面所讨论的矩形应力杂交元，边界位移 w 总是三次变化，法向导数采用二种不同选择，一是线性变化($n=12$)，另一是三次变化($n=16$)；内部应力模式采用线性的($m=9$)、二次的($m=15$)、三次的($m=23$)三种可能选择。对总共六种不同方案的结果进行了比较。从结果可以看到，为得到最好的解答，存在一个边界位移模式和内部应力模式的恰当组合问题。对于现在的情况，线性的力矩项和线性的法向导数看来是一个较好的组合。对于相同的线性力矩项，增加法向导数的次数反导致不精确的结果。但是如果同时提高力矩项和法向导数的次数，解的精度还是提高了。

还可指出，当采用(10.6.8)式所示泛函时，布置于给定力边界的单元无需满足此给定条件，图 10.20 算例中的上述六种计算方案就是这样的，未考虑满足简支边上 $M_n=0$ 的条件。实际执行中还有另一方案，就是使布置于简支边界上的单元，在选择应力参数时就满足简支边上 $M_n=0$ 的条件，图 10.20 上第 7 条曲线就是此方案的计算结果。从比较中可见，对于相同的应力模式和边界位移模式，结果有所改进，特别是单元数较少时。但当单元增多时，这种改进就不太明显。



n=--半跨度的单元数

图 10.20　在中心载荷作用下简支方板的中心挠度

10.7 小　结

本章 2、3 两节中比较广泛地讨论了构造协调和非协调单元的一些可能方案，这不仅是因为对于薄板弯曲问题具有重要的实际意义，而且这些单元对于其他泛函中包含二阶导数的问题也是有用的。例如可以用于粘性流体以及其他物理问题。对于二维应力分析问题，如果利用应力函数法求解，也将导致这样的泛函。

本章 4、5、6 节分别讨论了求解薄板弯曲问题的其他几种替换方案，它们共同的目的都是将原来的 C_1 型连续性问题变为 C_0 型问题，使问题得到简化，是一些比较有前途的方案。其中将 w 和 θ_x,θ_y 处理为各自独立的场函数的 Mindlin 单元和 DKT 单元，在壳体分析中也得到较广泛的应用。杂交元的应用也不限于薄板弯曲问题，我们在本章列出它的一般表达格式，并结合薄板弯曲问题讨论了它的一些基本特点，目的是使读者今后在更广泛的领域中熟悉和应用这种单元，同时对建立于位能原理以外变分原理的有限元格式有个基本的认识。

习　题

10.1　导出矩形非协调板单元矩阵(10.2.11)式的显式表达式。

10.2　检查上述矩形板单元是否能通过分片试验。

10.3　如果三角形板单元的位移函数是

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8(x^2 y + xy^2) + \alpha_9 y^3$$

验证当单元的二个边分别平行于坐标轴且长度相等时，决定参数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_9$ 的代数方程组的系数矩阵是奇异的。

10.4 利用单元位移函数的完全性确定(10.2.19)式的常数 C 的数值(提示：常应变项可表示为 $a_1L_1L_2+a_2L_2L_3+a_3L_3L_1$)。

10.5 导出 DKT 单元的(10.5.7)式中矩阵 $\boldsymbol{H}_x,\boldsymbol{H}_y$ 的显示表达式。

10.6 导出矩形应力杂交元的(10.6.24)，(10.6.26)，(10.6.29)等式的 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}$ 矩阵的显式表达式。

10.7 有一四周固支的方形薄板，取 1/4 用 8 结点 Mindlin 板单元进行分析，用减缩积分方法时 4×4 网格仍发生剪切锁死(如图 10.12 所示)，而采用假设剪切应变方法时，仅用 3×3 网格也未发生剪切锁死(如图 10.15 所示)，试用 $\boldsymbol{K}_s$ 奇异性的充分条件(10.4.13)加以论证。

10.8 试从广义变分原理角度，论证 Mindlin 板单元减缩积分方法和假设剪切应变方法的理论基础。

10.9 试用张量转换方法导出任意曲边的四边形 Mindlin 板单元采用假设剪切应变方法时的表达格式。

参考文献

1 Hinton E and Huang H C. A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements with Substitute Shear Strain Fields. Computers & Structures, 1986, 23,409~431

2 Batoz J L, Bathe K J and Ho L W. A study of Three-node Triangular Plate Bending Elements, Int. J. Num. Meth. Engng, 1980, 15, 1771~1812

3 Lee S W and Pian T H H. Improvement of Plate and Shell Finite Elements by Mixed Formulations. AIAA. J. 1978, 16, 29~34

4 Pian T H H. Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFEDL-TR-66-80, 1965, 457~477

第 11 章　轴对称壳体问题的有限单元法

11.1 引　言

轴对称壳体在工程实际中得到广泛的应用。基于薄壳理论的轴对称壳体单元，在厚度方向引入了壳体理论中的 Kirchhoff 假设。这样一来，轴对称壳体单元本质上是一维单元，从而使整个分析大为简化。

轴对称壳体单元，最早提出的是在子午线方向为直线的截锥单元。此种单元表达格式简单，用于实际分析一般也可达到合理的精度。但是此种单元在模拟曲率较大的壳体时，不仅需要较多的单元，而且还可能产生附加弯矩。因此，以后很多研究工作者又提出一系列在子午线方向为曲线的单元。

为了进一步将轴对称壳元能用于中等厚度壳体的分析，Zienkiewicz 等人又先后提出了从轴对称实体单元蜕化得到的超参数壳体单元，以及挠度和截面转动作为各自独立函数的壳体单元。此类单元的特点是单元之间只要求保持 C_0 连续性。同时由于能考虑横向剪切变形的影响，所以还能用于中厚壳的分析。

本章将分别讨论上述几种型式的单元。考虑到经常需要同时利用壳体单元和实体单元于同一个结构的分析中，所以还讨论了这两种不同类型单元的联结问题。

11.2 基于薄壳理论的轴对称壳体单元

11.2.1 轴对称薄壳理论的基本公式

图 11.1 所示轴对称壳体中面上任一点位置由角 ϕ 和 θ 确定，位移可由其经（子午）向分量 u、周向分量 v 和法向分量 w 确定。在薄壳理论中，壳体内任一点的应变，根据 Kirchhoff 直法线假设，可通过中面的六个广义应变分量来描述，它们和中面位移的关系是

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_s\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{s\theta}\\ \kappa_s\\ \kappa_\theta\\ \kappa_{s\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial s}+\dfrac{w}{R_s}\\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \theta}+u\sin\phi+w\cos\phi\right)\\ \dfrac{\partial v}{\partial s}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}-v\sin\phi\right)\\ -\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s}-\dfrac{u}{R_s}\right)\\ -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\dfrac{\cos\phi}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}-\dfrac{\sin\phi}{r}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s}-\dfrac{u}{R_s}\right)\\ 2\left(-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 w}{\partial s\partial \theta}+\dfrac{\sin\phi}{r^2}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}+\dfrac{\cos\phi}{r}\dfrac{\partial v}{\partial s}-\dfrac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}v+\dfrac{1}{rR_s}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)\end{Bmatrix}
\tag{11.2.1}
$$

其中 s 表示经向的弧长，R_s 是经向的曲率半径，r 是平行圆半径(即中面上任一点的径向坐标)。$\varepsilon_s,\varepsilon_\theta,\gamma_{s\theta}$表示中面内的伸长和剪切，$\kappa_s,\kappa_\theta,\kappa_{s\theta}$ 表示中面曲率和扭率的变化。

当已知中面的六个广义应变分量以后，中面外任一点的应变可以表示为

$$\varepsilon_s^{(z)} = \varepsilon_s + z\kappa_s \qquad \varepsilon_\theta^{(z)} = \varepsilon_\theta + z\kappa_\theta \qquad \gamma_{s\theta}^{(z)} = \gamma_{s\theta} + z\kappa_{s\theta} \tag{11.2.2}$$

式中 z 是该点至中面的距离(沿法线方向测量)。

在薄壳理论中与上述六个广义应变分量相对应的是六个内力(广义应力)分量

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = [N_s \quad N_\theta \quad N_{s\theta} \quad M_s \quad M_\theta \quad M_{s\theta}]^{\mathrm{T}} \tag{11.2.3}$$

其中 $N_s,N_\theta,N_{s\theta}$分别是壳体内垂直于 s 或 θ 方向的截面上单位长度的内力；$M_s,M_\theta,M_{s\theta}$是相应截面上单位长度的力矩。根据应力沿厚度方向成线性变化的假设，壳体内任一点的应力可按下式计算

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{N_s}{t} + \frac{12M_s}{t^3}z \\ \sigma_\theta &= \frac{N_\theta}{t} + \frac{12M_\theta}{t^3}z \\ \tau_{s\theta} &= \frac{N_{s\theta}}{t} + \frac{12M_{s\theta}}{t^3}z\end{aligned} \tag{11.2.4}$$

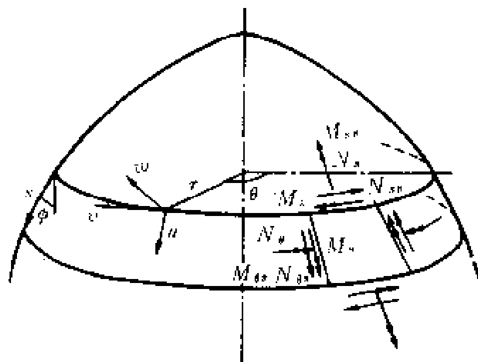


图 11.1 轴对称壳的坐标、位移和内力

其中 t 是壳体的厚度。

广义应力分量和广义应变分量之间的弹性关系是

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & \frac{t^2}{12} & \frac{t^2\nu}{12} & 0 \\ & & \text{称} & & \frac{t^2}{12} & 0 \\ & & & & & \frac{t^2(1-\nu)}{24} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \kappa_s \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{s\theta} \end{Bmatrix} \tag{11.2.5}$$

式中 E,ν 是弹性常数。如将上式表示成矩阵形式，则有

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{11.2.6}$$

或

$$\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \boldsymbol{D}^{(m)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}, \ \boldsymbol{\sigma}^{(b)} = \boldsymbol{D}^{(b)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(b)}$$

其中上标(m)，(b)分别表示薄膜状态和弯曲状态，具体是

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^{(m)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(b)} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(b)} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^{(m)} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D}^{(b)} \end{bmatrix} \tag{11.2.7}$$

并且有

$$
\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{(b)} = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} \tag{11.2.8}
$$

$$
\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{(b)} = \begin{Bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{s\theta} \end{Bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{D}^{(m)} = \frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}^{(b)} = \frac{t^2}{12}\boldsymbol{D}^{(m)}
$$

壳体的应变能表达式是

$$
U = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega \tag{11.2.9}
$$

或

$$
U = \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(m)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^{(b)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(b)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(b)}\mathrm{d}\Omega
$$

而系统的总势能表达式是

$$
\Pi_p = U - W \tag{11.2.10}
$$

其中$-W$是系统外力的势能。(11.2.9)式表明壳体的应变能可以分解为薄膜状态和弯曲状态两部分。

如果轴对称壳体所承受的载荷以及壳体的支承条件都是轴对称的，则壳体的位移和变形也将是轴对称的。这时周向位移分量$v\equiv0$，经向和法向位移分量u和w仅是s的函数，进而应变分量$\gamma_{s\theta}$，$\kappa_{s\theta}$和内力分量$N_{s\theta}$，$M_{s\theta}$也将不再出现。这时(11.2.1)和(11.2.5)式蜕化为

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \kappa_s \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \dfrac{w}{R_s} \\ \dfrac{1}{r}(u\sin\phi + w\cos\phi) \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - \dfrac{u}{R_s}\right) \\ -\dfrac{\sin\phi}{r}\left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - \dfrac{u}{R_s}\right) \end{Bmatrix} \tag{11.2.11}
$$

和

$$
\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \text{对} & & \dfrac{t^2}{12} & \dfrac{t^2\nu}{12} \\ & \text{称} & & \dfrac{t^2}{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \kappa_s \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} \tag{11.2.12}
$$

11.2.2 薄壳截锥单元

单元形状如图 11.2 所示，它们是圆锥壳体的一部分。每个单元有两个结点，每个结点

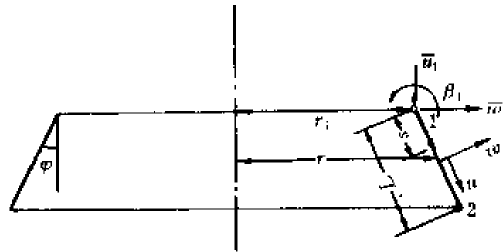


图 11.2 轴对称壳的截锥单元

的位移参数在轴对称载荷情况下是

$$\boldsymbol{a}_i = [\bar{u}_i \quad \bar{w}_i \quad \beta_i]^{\mathrm{T}} \quad (i = 1,2) \tag{11.2.13}$$

其中 $\bar{u}_i$，$\bar{w}_i$ 是总体坐标系中的轴向位移和径向位移分量，β 是经向切线的转动。

单元的结点位移向量可以表示成

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{Bmatrix} \tag{11.2.14}$$

另一方面，单元中面上任一点在局部坐标系中的经向位移 u 和法向位移 w 此时可以分别是 s 的线性和三次函数，即

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 s \\ w &= \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3 \end{aligned} \tag{11.2.15}$$

其中待定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_6$ 可由结点 1 和 2 的各个位移分量及其导数 $u_1, w_1, (dw/ds)_1$，$u_2, w_2, (dw/ds)_2$ 加以确定，它们应满足以下方程：

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = u_1,\ \alpha_3 = w_1,\ \alpha_4 = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_1,\ \alpha_1 + \alpha_2 L = u_2 \\ &\alpha_3 + \alpha_4 L + \alpha_5 L^2 + \alpha_6 L^3 = w_2,\ \alpha_4 - 2a_5 L + 3a_6 L^2 = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_2 \end{aligned} \tag{11.2.16}$$

从上列方程组解出 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_6$ 以后，代回(11.2.15)式，可以得到

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & L(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & L(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)_2 \end{Bmatrix} \tag{11.2.17}$$

其中 $\xi=s/L$，L 是截锥单元经线的长度。

注意到 $u_1, w_1, \cdots, (dw/ds)_2$ 和 $\bar{u}_1, \bar{w}_1, \cdots, \beta_2$ 之间存在如下关系

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\dfrac{dw}{ds}\right)_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{a}_i \quad (i=1,2) \tag{11.2.18}$$

将上式代入(11.2.17)式，最后得到 $\boldsymbol{u}$ 用结点位移向量 $\boldsymbol{a}^e$ 的插值表示

$$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{N}_1' \boldsymbol{\lambda} \quad \boldsymbol{N}_2' \boldsymbol{\lambda}] \boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{N} \boldsymbol{a}^e \tag{11.2.19}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{N}_1' &= \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{N}_2' &= \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & L(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{11.2.20}$$

将(11.2.19)式代入(11.2.11)式，并考虑到对于现在的截锥单元，$1/R_s=0$，可得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{B}_1' \boldsymbol{\lambda} \quad \boldsymbol{B}_2' \boldsymbol{\lambda}] \boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{B} \boldsymbol{a}^e \tag{11.2.21}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_1' &= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & 0 & 0 \\ (1-\xi)\dfrac{\sin\phi}{r} & (1-3\xi^2+2\xi^3)\dfrac{\cos\phi}{r} & L(\xi-2\xi^2+\xi^3)\dfrac{\cos\phi}{r} \\ 0 & -(-6+12\xi)\dfrac{1}{L^2} & -(-4+6\xi)\dfrac{1}{L} \\ 0 & -(-6\xi+6\xi^2)\dfrac{\sin\phi}{rL} & -(1-4\xi+3\xi^2)\dfrac{\sin\phi}{r} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}_2' &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} & 0 & 0 \\ \xi\dfrac{\sin\phi}{r} & (3\xi^2-2\xi^3)\dfrac{\cos\phi}{r} & L(-\xi^2+\xi^3)\dfrac{\cos\phi}{r} \\ 0 & -(6-12\xi)\dfrac{1}{L^2} & -(-2+6\xi)\dfrac{1}{L} \\ 0 & -(6\xi-6\xi^2)\dfrac{\sin\phi}{rL} & -(-2\xi+3\xi^2)\dfrac{\sin\phi}{r} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.2.22}$$

得到 $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ 后，可按标准步骤计算单元刚度阵 $\boldsymbol{K}^e$ 和结点载荷向量 $\boldsymbol{Q}^e$，

$$\boldsymbol{K}^e = \int_0^1 \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} 2\pi r L \mathrm{d}\xi \tag{11.2.23}$$

如将 $\boldsymbol{K}^e$ 写成分块形式，则

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^e & \boldsymbol{K}_{12}^e \\ \boldsymbol{K}_{21}^e & \boldsymbol{K}_{22}^e \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_{ij}^e = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \left(\int_0^1 \boldsymbol{B}_i'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_j' r \mathrm{d}\xi \right) \boldsymbol{\lambda} 2\pi L \quad (i=1,2; j=1,2) \tag{11.2.24}$$

如有侧向分布载荷

$$p = \begin{bmatrix} p_u \\ p_w \end{bmatrix} \tag{11.2.25}$$

其中 P_u,P_w 是分布载荷沿经向和法向的分量，它们可以是 s 的函数，这时结点载荷向量是

$$Q_i^e = 2\pi L\lambda^T\int_0^1 N_i'^T prd\xi \quad (i=1,2) \tag{11.2.26}$$

且

$$Q_i^e = [Q_{\bar{u}_i} \quad Q_{\bar{w}_i} \quad Q_{\beta_i}]^T$$

其中 $Q_{\bar{u}_i},Q_{\bar{w}_i},Q_{\beta_i}$ 分别是沿 z,r 方向的力和沿 β 方向的力矩。

应该指出：在(11.2.22)～(11.2.26)等式中的 r 是 ξ 的函数，即

$$r = r_1 + L\sin\phi\xi \tag{11.2.27}$$

关于单元刚度矩阵和单元载荷向量的积分(11.2.23)式和(11.2.26)式，可以方便地利用一维 Gauss 数值积分方法进行，通常采用 3～4 点积分方案可达到足够的精度。另一方面，采用数值积分方案还可避免 B_i' 在 $r=0$ 处出现的奇异性。

关于壳体单元的收敛性，如考虑到应变能中包含了位移的二次导数，则根据 2.4 节的讨论，位移函数中应包含刚体位移以及直至用位移二次导数表示的常应变项。但是只要分析一下几何关系式(11.2.1)式或(11.2.11)式就可以知道，对于壳体结构，常曲率变化(即 $\kappa_s,\kappa_\theta,\kappa_{s\theta}$ 为常值)实际不可能发生，常薄膜应变(即 $\epsilon_s,\epsilon_\theta,\gamma_{s\theta}$ 为常值)只能在个别情况下发生。此时，只要将位移函数包括曲线坐标的线性项就可达到要求。因此壳体单元位移函数完备性的要求最主要是应包含刚体运动的位移模式。

轴对称壳在承受轴对称载荷的情况下唯一可能发生的刚体运动模式是沿 z 轴的移动，即 $\bar{u}=$常数，这时经向位移和法向位移为

$$u = \cos\phi\bar{u},\ w = -\sin\phi\bar{u} \tag{11.2.28}$$

对于截锥单元，因为 ϕ 为常数，所以 u,w 也为常数。而单元位移表达式(11.2.15)中分别包含了常数项 a_1 和 a_3，因此它是满足完备性要求的。

至于单元间的位移协调性要求，因为结点参数中包含了转动(即 dw/ds)，所以也是满足的。

例 1 图 11.3 所示是一受边缘剪力作用的圆柱壳，均匀划分为 40 个单元进行计算，结果与解析解符合得很好。实际上如考虑距边界一定距离以后，应力变化已比较平缓，采用不均匀间距的网格划分，单元还可以适当减少。

例 2 图 11.4 所示是一有中心孔且在其边缘受弯矩作用的半球形壳体，采用不均匀的网格划分，共划分 28 个单元，也得到了和解析解符合得很好的结果。

从以上讨论和算例可见，基于薄壳理论的截锥单元表达格式比较简单，在实际分析的一般情况下精度也是令人满意的，因而得到比较广泛的应用。但是截锥单元也存在缺点，例如由于它用一定数目的直线来近似子午线曲线，势必引入新的误差，表现在壳体的薄膜应力状态区域可能产生附加弯曲。在某些情况下，所引起的误差可能很大(参见 11.3.3 节例 1)。为消除此影响，必须将单元划得很细，从而增加计算工作量。再如截锥单元中由于 $R_s=\infty$，所以 $\beta=dw/ds$，实际壳体如果 $R_s\neq\infty$，应有 $\beta=dw/ds-u/R_s$。所以在 R_s 有不连续变化时，选择 $u,w,dw/ds$ 作为结点参数，虽可保证它们在结点的连续性，但不能保证转

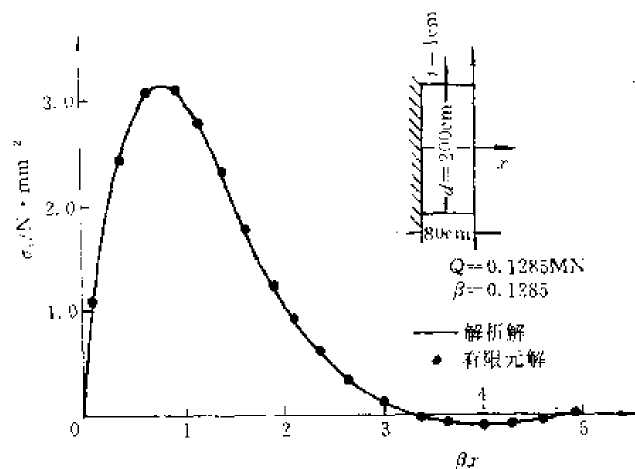
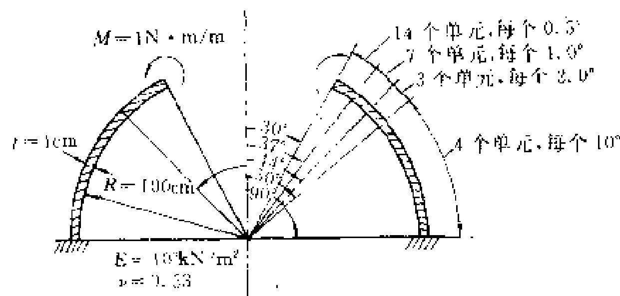


图 11.3　边缘受剪力作用的圆柱壳



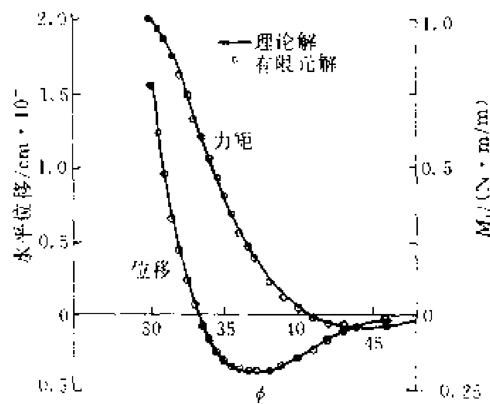


图 11.4　半球壳的有限元解

角 β 的连续性，可能对计算结果有不好影响。还有在壳体不是很薄的情况，壳体内(外)表面作用有分布载荷时，最好考虑内(外)表面的实际面积，而不要笼统地简化到中面上进行计算，要做到这一点，使用截锥单元也是不方便的。基于上述种种考虑，曲边壳元(子午线为曲线的轴对称壳元)仍有研究的必要。

曲边壳元和截锥单元的区别是在单元内不再假设 ϕ=常数，因而曲率 $1/R_s$ 也不再等

于零。好处是在几何上能较好地模拟实际壳体，但是在满足位移模式中包含刚体运动这一收敛性条件方面却带来了一定的麻烦。

从(11.2.28)式已知，当壳体发生刚体运动 $\bar{u}$ 时，经向位移和法向位移分别是

$$u = \cos\phi\bar{u}, \qquad w = -\sin\phi\bar{u}$$

当 ϕ 不是常数时，为能表述此运动，u，w 的位移模式中必须包含三角函数项，这将增加计算上的麻烦。

克服上述困难的一种方案是直接将单元内的轴向位移 $\bar{u}$ 和径向位移 $\bar{w}$ 直接表示成结点参数的插值形式，这时只要 $\bar{u}$ 的表达式中包含常数项就可满足刚体运动的要求。但是在位移和转动不是相互独立插值的情况，这将要求 $\bar{u}$，$\bar{w}$ 同时至少是 ξ 的三次多项式。这样一来 $\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}\bar{w}/\mathrm{d}s$ 将同时包含在结点参数当中。在壳体厚度不连续的位置，这过分的连续性要求是不合理的。同时这种单元在计算上也是比较麻烦的。因此我们不准备专门讨论基于轴对称薄壳理论的曲边单元。

在以上关于基于薄壳理论的壳体单元的讨论中还可以看到，尽管结点位移参数中包含了截面转动 β_i，但在单元内 β 不是独立的函数($\beta=\mathrm{d}w/\mathrm{d}s$)，因此要求 w 具有 C_1 连续性。在轴对称壳中满足 C_1 连续性并不困难，但是要求 w 至少是 s 的三次函数。为此 Zienkiewicz 等人在 1977 年提出了一种更为简单而有效的截锥单元，在此单元中，转动 β 作为独立的函数，这样，插值函数只要求具有 C_0 连续性，且由于考虑了横向剪切变形，单元还可以用于分析中厚的壳体。以后的研究中，将这种位移和转动各自独立插值的轴对称壳元发展为曲边的形式。因为这种单元也是 C_0 型单元，我们将发现它不仅具有曲边壳体单元的优点，而且可以方便地包含刚体运动模式。

上述两种位移和转动各自独立插值，同时可以考虑横向剪切变形的截锥单元和曲边单元。将在下一节中予以较详细的讨论。

11.3 位移和转动各自独立插值的轴对称壳体单元

11.3.1 考虑横向剪切变形的轴对称壳体理论的基本公式

考虑横向剪切的轴对称壳，在受轴对称载荷情况下，中面广义应变和位移的关系式如下：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \kappa_s \\ \kappa_\theta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \dfrac{w}{R_s} \\ \dfrac{1}{r}(u\sin\phi + w\cos\phi) \\ -\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} \\ -\dfrac{\sin\phi}{r}\beta \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - \dfrac{u}{R_s} - \beta \end{Bmatrix} \tag{11.3.1}$$

其中 ε_s 和 ε_θ 是中面的经向应变和环向应变，κ_s 和 κ_θ 是中面的经向曲率变化和环向曲率变

化，γ 是横向剪切应变。和上述各个广义应变相对应的是中面内力(广义应力)

$$\boldsymbol{\sigma} = [N_s \quad N_\theta \quad M_s \quad M_\theta \quad V]^{\mathrm{T}} \tag{11.3.2}$$

它们分别依次是经向内力、环向内力、经向弯矩、环向弯矩和横向剪力。

广义应力和应变之间的关系是

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon} \tag{11.3.3}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是弹性矩阵

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^{(m)} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D}^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & D^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^{(mb)} & 0 \\ 0 & D^{(s)} \end{bmatrix} \tag{11.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{D}^{(m)}$,$\boldsymbol{D}^{(b)}$,$D^{(s)}$分别是薄膜、弯曲和剪切刚度，对于各向同性材料

$$\boldsymbol{D}^{(m)} = \frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}^{(b)} = \frac{t^2}{12}\boldsymbol{D}^{(m)}$$

$$D^{(s)} = k\frac{Et}{2(1+\nu)}, \qquad k = \frac{5}{6}$$

壳体应变能表达式是

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D\varepsilon}\mathrm{d}\Omega \tag{11.3.5}$$

或

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(m)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^{(b)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(b)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(b)}\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma D^{(s)}\gamma\mathrm{d}\Omega$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{(b)} = \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\theta \end{bmatrix}$$

11.3.2 截锥单元

和薄壳截锥单元不同的是，现在的截面转动 β 是独立的函数。在单元内 u,w,β 是同次的函数，所以单元内的位移可直接用总体坐标内的轴向位移 $\bar{u}$ 和径向位移 $\bar{w}$ 表述，而它们又可直接表示为结点参数的插值形式。对于二结点的截锥单元，位移插值表示如下

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{2} N_i\bar{u}_i, \qquad \bar{w} = \sum_{i=1}^{2} N_i\bar{w}_i, \qquad \beta = \sum_{i=1}^{2} N_i\beta_i \tag{11.3.6}$$

其中 $N_1 = 1-\xi,\ N_2 = \xi,\ \xi = s/L$

注意到 u,w 和 $\bar{u},\bar{w}$ 之间存在如下关系

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \tag{11.3.7}$$

将上式代入(11.2.28)式，并注意到 $1/R_s = -\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$，就可以得到用总体坐标位移表示的应变表达式

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_s\\ \varepsilon_\theta\\ \kappa_s\\ \kappa_\theta\\ \gamma\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & \sin\phi\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r} & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\\ 0 & 0 & -\dfrac{\sin\phi}{r}\\ -\sin\phi\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & \cos\phi\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}\\ \bar{w}\\ \beta\end{Bmatrix} \tag{11.3.8}$$

将(11.3.6)式代入上式,可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}=[\boldsymbol{B}_1\quad \boldsymbol{B}_2]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\end{Bmatrix}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \tag{11.3.9}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}\cos\phi\dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}s} & \sin\phi\dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}s} & 0\\ 0 & \dfrac{N_i}{r} & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}s}\\ 0 & 0 & -\sin\phi\dfrac{N_i}{r}\\ -\sin\phi\dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}s} & \cos\phi\dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}s} & -N_i\end{bmatrix}\quad (i=1,2)$$

$$\boldsymbol{a}_i=[\bar{u}_i\quad \bar{w}_i\quad \beta]^{\mathrm{T}}\quad (i=1,2)$$

并有

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}s}=-\frac{1}{L},\quad \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{L}$$

至此可按标准步骤形成单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}^e=\int_0^1\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}r\mathrm{d}\xi 2\pi L \tag{11.3.10}$$

如将 $\boldsymbol{K}^e$ 表示成分块形式,则有

$$\boldsymbol{K}^e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}^e & \boldsymbol{K}_{12}^e\\ \boldsymbol{K}_{21}^e & \boldsymbol{K}_{22}^e\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_{ij}=\int_0^1\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_j r\mathrm{d}\xi 2\pi L\quad (i,j=1,2) \tag{11.3.11}$$

为了进一步讨论的方便,还可将 $\boldsymbol{K}^e$ 表示成

$$\boldsymbol{K}^e=\boldsymbol{K}_{mb}^e+\boldsymbol{K}_s^e \tag{11.3.12}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_{mb}^e=\int_0^1\boldsymbol{B}_{mb}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(mb)}\boldsymbol{B}_{mb}r\mathrm{d}\xi 2\pi L$$

$$K_s^e = D^{(s)}\int_0^1 B_s^T B_s r \mathrm{d}\xi 2\pi L = D^{(s)}\hat{K}_s^e$$

式中 $D^{(mb)}$,$D^{(s)}$见弹性关系矩阵(11.3.4)式,分别代表薄膜、弯曲刚度以及剪切刚度。

$$B_{mb} = [B_{mb1} \quad B_{mb2}],\ B_s = [B_{s1} \quad B_{s2}] \qquad (11.3.13)$$

B_{mb1},B_{mb2}分别是(11.3.9)式表示的 B_1,B_2 中的前四行,B_{s1},B_{s2}分别是其中的第五行。

关于单元的结点载荷向量,对于现在讨论的情况可以表示成

$$Q_i^e = \int_0^1 N_i P r \mathrm{d}\xi 2\pi L \qquad (i = 1,2) \qquad (11.3.14)$$

其中

$$Q_i^e = \begin{Bmatrix} Q_{\bar{u}_i} \\ Q_{\bar{w}_i} \\ Q_{\beta_i} \end{Bmatrix} \qquad P = \begin{Bmatrix} p_{\bar{u}} \\ p_{\bar{w}} \\ p_\beta \end{Bmatrix}$$

$p_{\bar{u}}$, $p_{\bar{w}}$分别是轴向和径向的分布载荷,如有法向均布压力 p,则

$$p_{\bar{u}} = - p\sin\phi \quad p_{\bar{w}} = p\cos\phi \quad p_\beta = 0 \qquad (11.3.15)$$

进一步集合各个单元的刚度矩阵和载荷向量,就可以得到结构的有限元求解方程

$$Ka = Q \qquad (11.3.16)$$

或

$$(K_{mb} + D^{(s)}\hat{K}_s)a = Q$$

需要指出的是,因为位移和转动各自独立的壳体单元,在本质上和 Timoshenko 梁单元及 Mindlin 板单元相似,因此在形成刚度矩阵时,需要同时保证 K 的非奇异性和 $\hat{K}_s$的奇异性。具体仍可采用减缩积分、选择积分、假设剪切应变或替代形状函数等方法。因为轴对称壳元也是一维单元。如同 Timoshenko 梁单元情况,减缩积分和假设剪切应变及替代形状函数这几种方法实际上是相互等价的,这里就不再一一重复。对于现在的截锥单元,可以方便地采用一点积分,以达到同时保证 K 的非奇异性及 $\hat{K}_s$奇异性的目的。算例表明,计算结果是很好的。反之如采用精确积分,对于薄壳情况,结果很差,对于很薄的壳,将发生剪切锁死。

为证实上述位移和截面转动各自独立插值截锥单元的有效性,在图 11.5 和图 11.6 中给出两个曲面壳体的例子。前一算例是关于均匀压力作用的球形顶盖的,有限元解与解析解以及其他经线为曲线的壳体单元的计算结果进行了比较。后一算例分析的是内压作用下的圆环壳,这是一个壳体理论中比较复杂的问题,没有精确的解析解进行比较,只与其他曲边壳元有限元解以及数值解进行了比较。从比较中可以看到,尽管用截锥单元对经线为曲线的旋转壳体进行离散,在几何上带来一定误差,但它的影响并不那么显著,因为在上述二个算例中,只分别采用了 10 个和 18 个截锥单元,就得到相当满意的结果。

11.3.3 曲边单元

此单元有 3 个结点,坐标 r,z 和总体坐标内的位移 $\bar{u}$,$\bar{w}$ 及转动 β 采用相同的插值表示,即

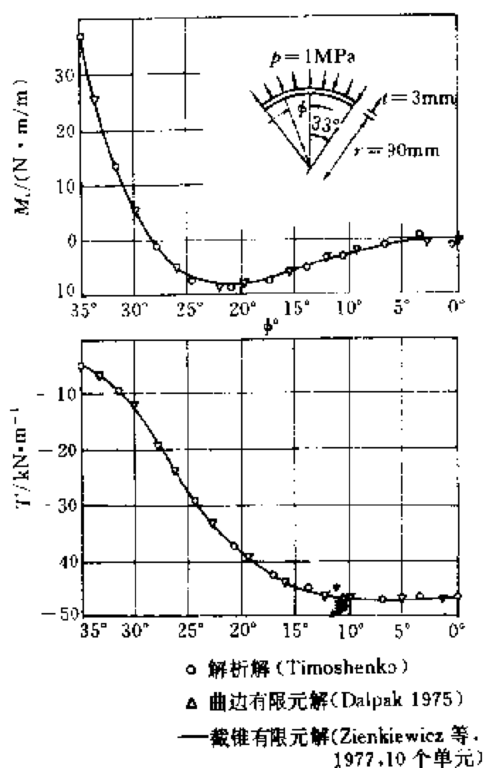


图 11.5　均压作用的球形顶盖

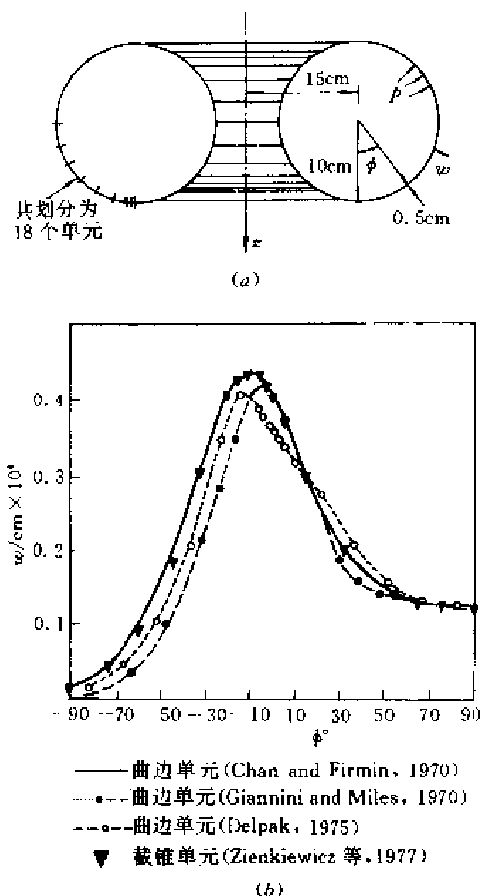


图 11.6　内压作用的环壳
(a) 单元划分　(b) 径向位移

$$
\left.\begin{aligned}
&r = \sum_{i=1}^{3} N_i r_i, \qquad z = \sum_{i=1}^{3} N_i z_i \\
&\bar{u} = \sum_{i=1}^{3} N_i \bar{u}_i, \quad \bar{w} = \sum_{i=1}^{3} N_i \bar{w}_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{3} N_i \beta_i
\end{aligned}\right\} \tag{11.3.17}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
N_1 &= N_1(\xi) = (1-\xi)(1-2\xi) \\
N_2 &= N_2(\xi) = \xi(2\xi-1) \\
N_3 &= N_3(\xi) = 4\xi(1-\xi)
\end{aligned} \tag{11.3.18}
$$

这里 ξ 是自然坐标，$0 \leqslant \xi \leqslant 1$。

记

$$
J = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi} r_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi} z_i\right)^2} \tag{11.3.19}
$$

则参见图 11.7 可得

$$
\begin{aligned}
\cos\phi &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi} z_i \\
\sin\phi &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi} r_i
\end{aligned} \tag{11.3.20}
$$

进一步可以利用标准步骤计算单元刚度矩阵和载荷向量，各有关公式和(11.3.8)～(11.3.14)式形式上相同，只是此时 $i=1,2,3$，同时各式中 L 应代之以 J((11.3.19)式)，并置于积分号内。以 $\boldsymbol{K}_{ij}^{e}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{i}^{e}$ 为例，对应于(11.3.11)和(11.3.14)式，可以表示为

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{e}=\int_{0}^{1}\boldsymbol{B}_{i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_{j}rJ\mathrm{d}\xi\cdot 2\pi \quad (i,j=1,2,3) \tag{11.3.21}$$

$$\boldsymbol{Q}_{i}^{e}=\int_{0}^{1}N_{i}\boldsymbol{P}rJ\mathrm{d}\xi\cdot 2\pi \qquad (i=1,2,3) \tag{11.3.22}$$

各式中 N_i 应用(11.3.18)式代入，同时

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{J}(4\xi-3),\quad \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{J}(4\xi-1),\quad \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}s}=\frac{4}{J}(1-2\xi) \tag{11.3.23}$$

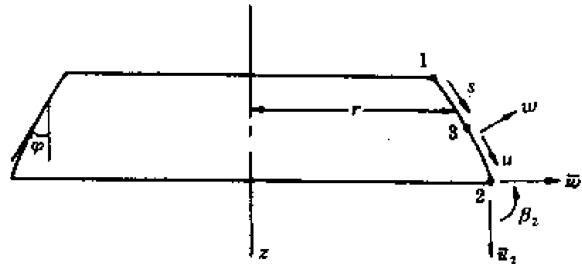


图 11.7　二次曲边壳元

关于单元刚度矩阵，需要补充以下两点：

1. 中间结点 3 的位移参数 $\boldsymbol{a}_3(\bar{u}_3,\bar{w}_3,\beta_3)$ 可以通过内部凝聚的方法用端结点 1,2 的位移参数 $\boldsymbol{a}_1(\bar{u}_1,\bar{w}_1,\beta_1)$ 和 $\boldsymbol{a}_2(\bar{u}_2,\bar{w}_2,\beta_2)$ 表示出来。这样做的结果只有 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 出现在结构的求解方程组中，从而减少了计算工作量。

2. 为保证 $\boldsymbol{K}^e$ 的精度和 $\hat{\boldsymbol{K}}_s$ 的奇异性，应选择二点 Gauss 数值积分方案。

关于(11.3.22)式表示的结点载荷向量，应注意到它是考虑分布载荷作用于中面的情况，如考虑实际载荷作用于内(外)面的影响，可代之以

$$Q_{i}^{e}=\int_{0}^{1}N_{i}\boldsymbol{P}r^{*}J^{*}\mathrm{d}\xi 2\pi \quad (i=1,2,3) \tag{11.3.24}$$

其中

$$r^{*}=r\pm\frac{t}{2}\cos\phi,\quad J^{*}=J\left(1\pm\frac{t}{2R_s}\right) \tag{11.3.25}$$

式内"＋"和"－"分别用于载荷作用于外表面和内表面的情况，上式中 R_s 可用下式计算

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_s}&=-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{J^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi}-\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)\\&=\frac{4}{J^3}\left[(z_1+z_2-2z_3)\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi}r_i-(r_1+r_2-2r_3)\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi}z_i\right]\end{aligned} \tag{11.3.26}$$

此外还应指出，这种单元定义几何形状所利用的插值表示(11.3.17)式中，并未引入子午线切线的角度 ϕ 作为结点参数，所以在端结点上不能完全保证切线的连续性。但是由于利用了二次曲线来近似真实壳体的子午线，通常是足够精确的，和截锥单元(每个单元内 $\phi=$常数，$1/R_s=0$)比较仍是有很大改进的。这点在以下的例 1 中得到明显的证实。

例 1 球形压力容器，半径 $R=100\text{cm}$，厚度 $t=6\text{cm}$，受 $p=20\text{MPa}$ 的内压作用。薄膜应力解是

$$\sigma_1=\frac{N_s}{t}=\frac{N_\theta}{t}=167\text{MPa},\quad \sigma_2=\frac{6M_s}{t^2}=\frac{6M_\theta}{t^2}=0$$

如果用本节所讨论的二次曲边壳元进行计算，只需用 5 个单元就可得到很精确的结果。这时算得在顶部区域内 $\sigma_1=167\text{MPa}$，$\sigma_2=-0.6\text{MPa}$。如果在结点数相同的条件下采用 10 个截锥单元进行计算将产生较大误差，得到的结果是 $N_s/t=182\text{MPa}$，$N_\theta/t=171\text{MPa}$，$\sigma_2=-18\text{MPa}$。直至网格加密至 40 个单元方得到和二次曲边单元相同的精度。

例 2[1] 压力分别作用于内、外表面的球形顶盖。将压力简化为作用于中面的情况即是 11.3.2 节内用截锥单元计算过的算例(见图 11.5)。现用 10 个二次曲边壳元进行计算，比较压力分别作用于内外表面引起的差别。并和 Timoshenko 的解析解(假定压力作用于中面)进行对比。N_θ，N_s 的数值分别列于表 11.1 和 11.2，对应的曲线绘于图 11.8。

表 11.1 环向薄膜力 N_θ

ϕ	解析解(压力作用于中面)	有限元解(压力作用于外表面)	有限元解(压力作用于内表面)
0°	−47.48	−49.14	−45.91
5°	−47.50	−49.11	−45.90
10°	−47.17	−48.69	−45.54
15°	−45.02	−46.50	−43.50
20°	−39.05	−40.50	−37.92
25°	−27.74	−29.16	−27.29
30°	−13.10	−14.31	−13.39
35°	−6.08	−6.25	−5.84

表 11.2 经向弯矩 M_s

ϕ	解析解(压力作用于中面)	有限元解(压力作用于外表面)	有限元解(压力作用于内表面)
0°	−0.294	−0.582	−0.48
5°	−0.377	−0.548	−0.487
10°	−2.364	−2.451	−2.309
15°	−5.451	−5.409	−5.077
20°	−8.135	−7.293	−7.428
25°	−6.687	−6.223	−5.827
30°	5.756	6.548	6.13
35°	37.675	37.31	34.91

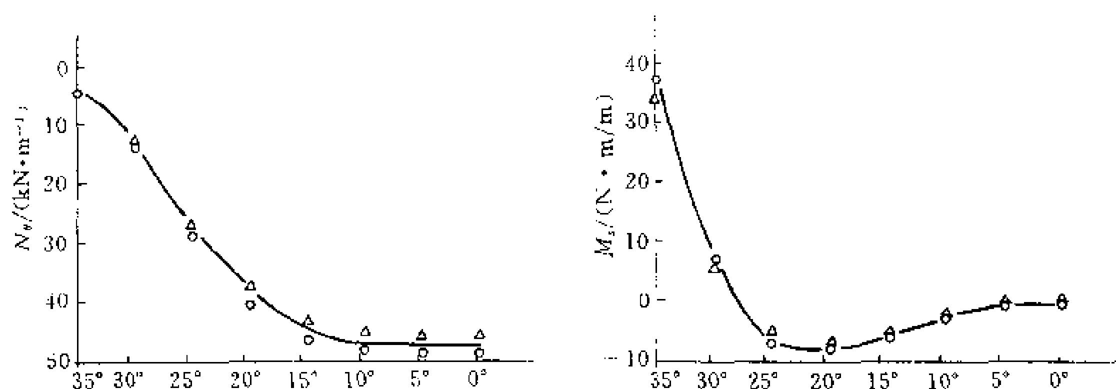
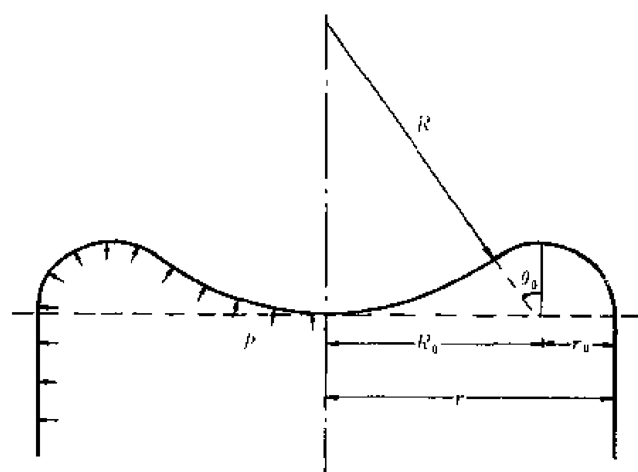


图 11.8　受压球形顶盖的 N_θ,M_s 分布

— 解析解;○ 压力作用于外表面的有限元解;△ 压力作用于内表面的有限元解

从上列结果可见,虽然此算题中顶盖相当薄($t/R=3.3\%$),相同的压力分别作用于内外表面,最大应力相差可达 7%。如果实际结构的壁厚较大,此影响更是必须考虑的,因此考虑载荷作用的表面,对载荷项引入必要的修正是有意义的。

例 3　内压作用下的三心顶盖,几何形状如图 11.9 所示,这是一个有多处曲率突变点的旋转壳,共使用 50 个曲边单元进行计算,表 11.3 列出它的环向薄膜应力 N_θ/t 和经向弯曲应力 $6M_s/t^2$ 的有限元解,表中还列出了 Novozhilov 的渐近解(该解是精度为 $\sqrt{t/R}$ 量级的近似解,只作为比较的参考),曲率突变点的最大应力两者相差为 3%。再一次表明此种单元的可靠性和有效性。



$r_0=0.25r$　　$R=1.026r$　　$t/r=\frac{1}{25}$

$\theta_0=36°$　　$\nu=0.311$

图 11.9　受内压的三心顶盖

表 11.3　三心顶盖的应力结果

θ°	$\sigma_1(=6M_s/t^2):pr/t$		$\sigma_2(=N_\theta/t):pr/t$	
	渐近解	有限元解	渐近解	有限元解
		球		
−20°	0.64	0.40	−0.74	−1.10
−25°	1.62	1.57	−0.85	−1.16
−30°	3.34	3.35	−0.48	−0.72
−36°	5.62	5.46	1.49	1.18
		环		
−36°	5.62	5.46	1.40	1.17
−25°	5.38	5.27	2.77	2.38
−15°	3.90	3.75	3.60	3.29
−10°	2.88	2.82	3.81	3.537
0°	0.42	0.37	3.76	3.65
10°	−1.89	−1.98	3.183	3.193
15°	−2.86	−2.82	2.769	2.856
30°	−4.68	−4.60	1.278	1.463
45°	−4.93	−4.82	−0.242	0.148
60°	−4.17	−3.97	−0.822	−0.655
75°	−3.19	−2.63	−1.208	−0.848
90°	−1.125	−1.08	−0.594	−0.578
z		柱		
0	−1.11	−1.07	−0.595	−0.576
$r/5$	0.690	0.644	0.711	0.715
$2r/5$	0.195	0.192	1.077	1.072
$3r/5$	0.015	−0.017	1.034	1.033
$4r/5$	0.015	−0.017	0.99	1.000
r	0.001	−0.001	1.00	1.00

11.4　轴对称超参数壳体单元

11.4.1　几何形状的规定

轴对称超参数壳体单元是从轴对称实体单元蜕化而来的。单元如图 11.10 所示，其中

r,z 是总体坐标，z 是壳体对称轴，ξ,η 是自然坐标$(-1\leqslant\xi,\eta\leqslant1)$，$\eta$ 沿中面法线方向。假设沿厚度方向位移为线性变化，所以沿厚度方向只有两个结点：i_{top}和 i_{bot}。

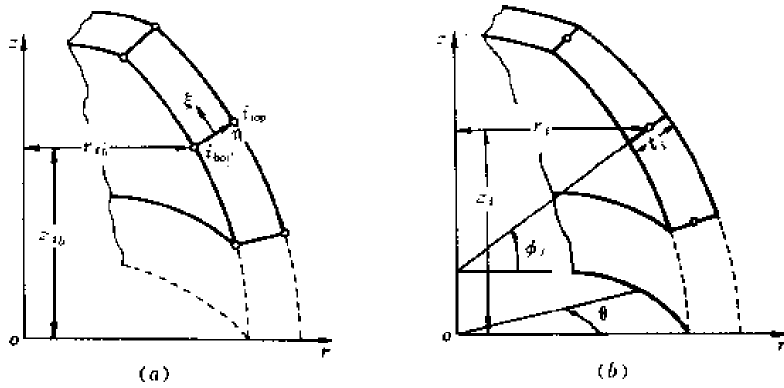


图 11.10　轴对称超参数壳元

单元内任一点的坐标可表示为结点坐标的插值形式

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\,\frac{(1+\eta)}{2}\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{顶} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\,\frac{(1-\eta)}{2}\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{底} \tag{11.4.1}$$

其中 $n\times2$ 是单元结点数，$N_i(\xi)$是一维 Lagrange 插值函数。上式还可改写成

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{中面} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\,\frac{\eta}{2}\boldsymbol{V}_{2i} \tag{11.4.2}$$

其中

$$\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{中面} = \frac{1}{2}\left[\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{顶} + \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{底}\right] \tag{11.4.3}$$

$$\boldsymbol{V}_{2i} = \begin{Bmatrix} V_{2ir} \\ V_{2iz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{顶} - \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{底} = \begin{Bmatrix} \Delta r_i \\ \Delta z_i \end{Bmatrix} \tag{11.4.4}$$

$(r_i,z_i)_{中面}$是中面结点的总体直角坐标，$\boldsymbol{V}_{2i}$是连结下表面结点 $i_{底}$ 到上表面结点 $i_{顶}$ 的向量。引入记号

$$t_i = |\boldsymbol{V}_{2i}| = \sqrt{(\Delta r_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \tag{11.4.5}$$

和 $\boldsymbol{V}_{2i}$的方向余弦

$$\begin{Bmatrix} \cos\phi_i \\ \sin\phi_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta r_i/t_i \\ \Delta z_i/t_i \end{Bmatrix} \tag{11.4.6}$$

则(11.4.2)式可以改写成

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{中面} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\,\eta\,\frac{t_i}{2}\begin{Bmatrix} \cos\phi_i \\ \sin\phi_i \end{Bmatrix} \tag{11.4.7}$$

为适应以后描写位移的要求，$\boldsymbol{V}_{2i}$应尽可能接近中面的法线方向。如果 $\boldsymbol{V}_{2i}$和法线方向重合，则 t_i 等于 i 点的壳体厚度。ϕ_i 即为 i 点的中面法线和水平面的夹角。这时 ϕ 将不能是任意给定的，而应依赖于中面上各个结点的坐标。即

$$\cos\phi = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\xi}\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{J}\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n}\frac{dN_i}{d\xi}z_i$$

$$\sin\phi = -\frac{dr}{ds} = -\frac{dr}{d\xi}\frac{d\xi}{ds} = -\frac{1}{J}\frac{dr}{d\xi} = -\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{n}\frac{dN_i}{d\xi}r_i \tag{11.4.8}$$

其中

$$J = \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{dN_i}{d\xi}r_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{dN_i}{d\xi}z_i\right)^2} \tag{11.4.9}$$

以上两式中 r,z 是中面上任一点的坐标，s 是沿中面子午线的弧长。

对于上述情况，只要有各中面结点的坐标和厚度，就可以描写壳体的几何形状。如果壳体的厚度是不变的，则问题进一步简化为只需要知道中面上各结点的坐标，这就是一般壳体单元的情况。

常用的线性、二次和三次的轴对称蜕化壳体单元如图 11.11 所示，它们的插值函数分别是

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{线性单元} & & N_i=\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i) \quad \xi_i=\pm 1 \\
\text{二次单元} & \text{端结点} & N_i=\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)\xi\xi_i \\
 & \text{边中结点} & N_i=(1-\xi^2) \\
\text{三次单元} & \text{端结点} & N_i=\frac{1}{16}(1+\xi\xi_i)(-1+9\xi^2) \\
 & \text{边内结点} & N_i=\frac{9}{16}(1-\xi^2)(1+9\xi\xi_i) \quad \xi_i=\pm\frac{1}{3}
\end{array}\right\} \tag{11.4.10}$$

11.4.2 位移函数

根据壳体理论的基本假设，变形前中面的法线变形后仍保持为直线，因此轴对称壳内任一点的位移可由中面结点沿总体坐标 r,z 的位移分量 u,v 及法线的转动 α 表示（参见图 11.12）。在壳体单元内，中面结点 i 的位移参数是 u_i,v_i,α_i。如果 V_{2i}和法线方向一致，同时 α_i 是微小的转动，则单元内任一点的位移可通过结点位移插值得到

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}N_i(\xi)\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \sum_{i=1}^{n}N_i(\xi)\eta\frac{t_i}{2}\begin{Bmatrix} -\sin\phi_i \\ \cos\phi_i \end{Bmatrix}\alpha_i \tag{11.4.11}$$

上式中下标“中面”今后可省去，并可写成标准形式

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N_1\ N_2\ \cdots\ N_n]\begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{Bmatrix} \tag{11.4.12}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_i = [u_i \quad v_i \quad \alpha_i]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & -N_i\eta\dfrac{t_i}{2}\sin\phi_i \\ 0 & N_i & N_i\eta\dfrac{t_i}{2}\cos\phi_i \end{bmatrix} \tag{11.4.13}$$

从上式可见，此种单元每个中面结点有 3 个位移参数，而从(11.4.1)式可见，和每个中面结点对应的几何参数是 4 个($r_{i底}$，$z_{i底}$，$r_{i顶}$，$z_{i顶}$)。因为几何参数多于位移参数，所以这种单元称为超参单元。在第 4 章中曾述及超参单元一般是不能自动满足收敛准则的，但对于现在这种单元，刚体运动及常应变条件都能满足，所以收敛性得到保证。

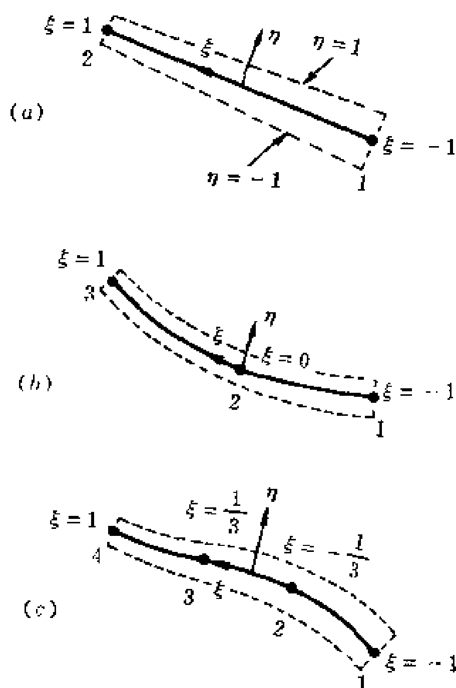


图 11.11　轴对称壳体单元

(a) 线性的　(b) 二次的　(C) 三次的

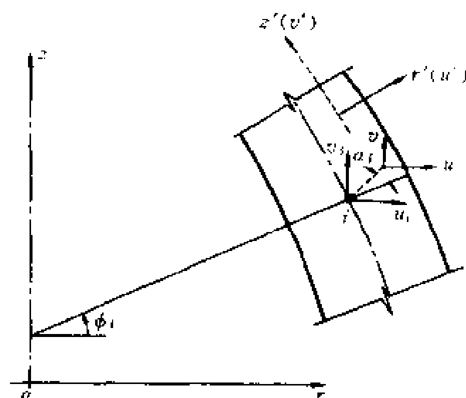


图 11.12　轴对称壳的位移

11.4.3　应变和应力的确定

按壳体理论的基本假设，在 η= 常数曲面的垂直方向应力应等于零，因此应在以此方向为 r' 轴的局部坐标系 r'，z' 内确定壳体的应力和应变。

首先确定 η= 常数曲面切线方向的单位向量，此向量可用下式表示

$$\boldsymbol{V}_{z'} = \frac{1}{J(\eta)}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \tag{11.4.14}$$

其中
$$J(\eta) = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

如利用(11.4.7)式，则上式内

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi}r_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi}\eta\frac{t_i}{2}\cos\phi_i$$
$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi}z_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}\xi}\eta\frac{t_i}{2}\sin\phi_i \tag{11.4.15}$$

与 $\boldsymbol{V}_{z'}$ 正交的单位向量为 $\boldsymbol{V}_{r'}$，如使 $\boldsymbol{V}_{r'}$ 和 $\boldsymbol{V}_{z'}$ 成右螺旋，可表示为

$$\boldsymbol{V}_{r'}=\frac{1}{J(\eta)}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ -\dfrac{\partial r}{\partial \xi}\end{Bmatrix} \tag{11.4.16}$$

这样一来，就可得到总体坐标系 r,z 和局部坐标系 r',z' 之间的转换关系式

$$\begin{Bmatrix}r\\ z\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\theta}\begin{Bmatrix}r'\\ z'\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}r'\\ z'\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}r\\ z\end{Bmatrix} \tag{11.4.17}$$

其中

$$\boldsymbol{\theta}=[\boldsymbol{V}_{r'}\quad \boldsymbol{V}_{z'}]=\frac{1}{J(\eta)}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial r}{\partial \xi}\\ -\dfrac{\partial r}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\end{bmatrix} \tag{11.4.18}$$

若 u',v' 是局部坐标 r',z' 方向的位移分量，同根据 $\sigma_{r'}=0$ 的假设，和轴对称变形的要求，在局部坐标系需要计及的应变分量是

$$\boldsymbol{\varepsilon}'=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{z'}\\ \varepsilon_{\theta}\\ \gamma_{r'z'}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v'}{\partial z'}\\ \dfrac{u}{r}\\ \dfrac{\partial v'}{\partial r'}+\dfrac{\partial u'}{\partial z'}\end{Bmatrix} \tag{11.4.19}$$

在计算 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 中的各个位移偏导数时，需要进行二次坐标转换。首先是总体坐标 r,z 和自然坐标 η,ξ 之间的转换

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial r}\\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} & \dfrac{\partial v}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v}{\partial \xi}\end{bmatrix} \tag{11.4.20}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial r}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\end{bmatrix} \tag{11.4.21}$$

其次是将总体坐标系的各个位移偏导数转换为局部坐标系的位移偏导数，对此可以写成

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u'}{\partial r'} & \dfrac{\partial v'}{\partial r'}\\ \dfrac{\partial u'}{\partial z'} & \dfrac{\partial v'}{\partial z'}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial r}\\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta} \tag{11.4.22}$$

利用以上各式,最后可将 ε' 表示成

$$\varepsilon' = [\boldsymbol{B}_1' \ \boldsymbol{B}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{B}_n'] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{Bmatrix} \tag{11.4.23}$$

局部坐标系内的应力利用弹性关系可表示成

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{s'} \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r's'} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}' \tag{11.4.24}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \tag{11.4.25}$$

式中 E,ν 是材料常数,k 是考虑剪应力沿厚度不均匀分布引入的系数,$k=1.2$。

11.4.4 刚度矩阵和结点载荷的计算

单元刚度矩阵可直接在自然坐标中用下式计算

$$\boldsymbol{K}^e = 2\pi \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}' \, |\boldsymbol{J}| \, r \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \tag{11.4.26}$$

具体计算步骤可按第 4 章所阐述的进行,这里需要指出的是数值积分点的选择。

在 η 方向,应变是线性变化,故可用 2 个高斯点。至于 ξ 方向,情况和上节关于考虑剪切变形壳体单元的讨论相同,应采用减缩积分方案,具体选择是对于 2 次单元,ξ 方向用 2 个高斯点,3 次单元用 3 个高斯点。如采用精确积分方案,当 t 很小时,可能出现过大的横剪应变能的虚假现象,从而发生“锁死”,使得计算结果远远小于真正解。

这两种壳体单元的类似现象有其内在的联系。在前面我们已经提到,当 $t=$常数,且 ν_{2i}和中面法线方向一致时,超参单元可以用和考虑剪切变形的壳体单元相同的参数来描述壳体的几何形状。在此条件下如再引入壳体理论范围内所允许的一定简化,就可将超参单元转化为考虑剪切变形的壳元,因此这两种单元在本质上是完全一致的。用于实际计算,两者有相同的精度和收敛性质。但是如果比较上述两种单元的表达格式和计算步骤,无疑地,考虑剪切变形的壳元要比超参单元简单得多,这是由于前者的公式中已经在 η 方向进行了积分,使问题简化为一维问题。超参单元之所以还有讨论的必要,是因为处理变厚度以及壳体曲面切线有不连续时仍有一定方便。后一情况如图 11.13 所示,壳体中面在 i 点是不光滑的,此处中面法线是不定的,因此 ν_{2i}就也不可能选择得与中面法线方向一致,

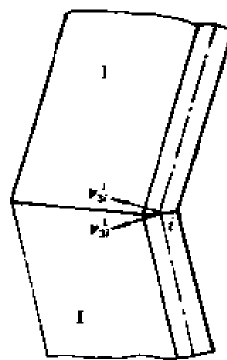


图 11.13 壳体中面不光滑情况

如采用一般壳体单元,将带来比较明显的误差,而超参单元则还能比较恰当地处理此种情况。

11.5 不同类型单元的联结

在很多工程实际问题中,常常遇到三维连续体和薄壁板壳组成的结构。图 11.14 所示

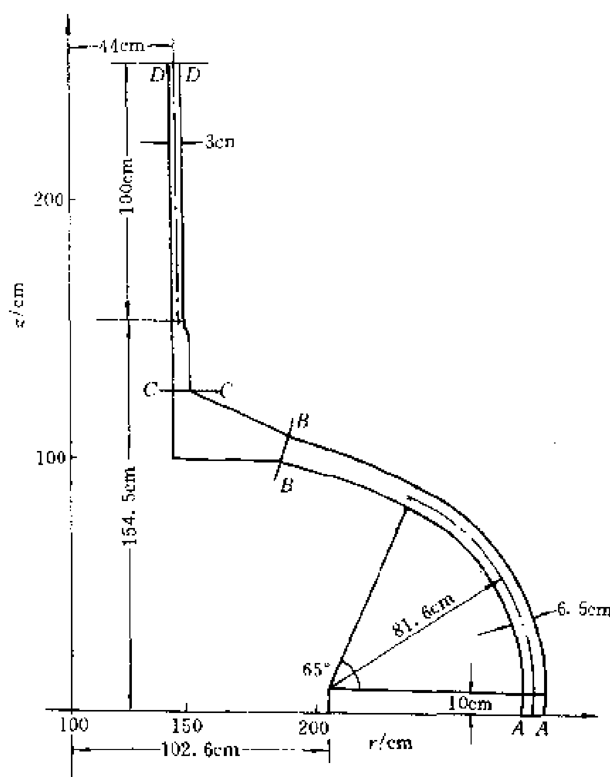


图 11.14 容器封头和接管结构

为轴对称容器封头上有一圆柱壳接管。在柱壳和封头的联结区域,为降低应力集中的影响,结构上做了补强。对于这种结构,进行有限元分析时,合理的方案是在封头和柱壳部分利用轴对称壳体单元,而在它们的联结区域利用轴对称实体单元进行离散,如图 11.15 所示。但是这两种类型单元结点的型式和配置不可能一致,为保证交界面上的位移协调,就要研究和解决不同类型单元的联结问题。

11.5.1 多点约束方程

不失一般性地可以图 11.16 所示交界面为例。实体单元在交界面上有结点 1,2,3,结点位移参数是 u_1,v_1,u_2,v_2,u_3,v_3;壳体单元的结点 2',一般情况下可能有 3 个位移参数:$u_{2'},v_{2'},\beta_{2'}$。

为保证交界面上位移的协调性,除了 u_2,v_2 明显地应和 $u_{2'},v_{2'}$ 相一致外,其他位移参数也不能是完全独立的。如果将实体单元的位移参数转换到 r^* 轴沿交界面的局部坐标系 r^*,z^* 中,即按下式计算得到

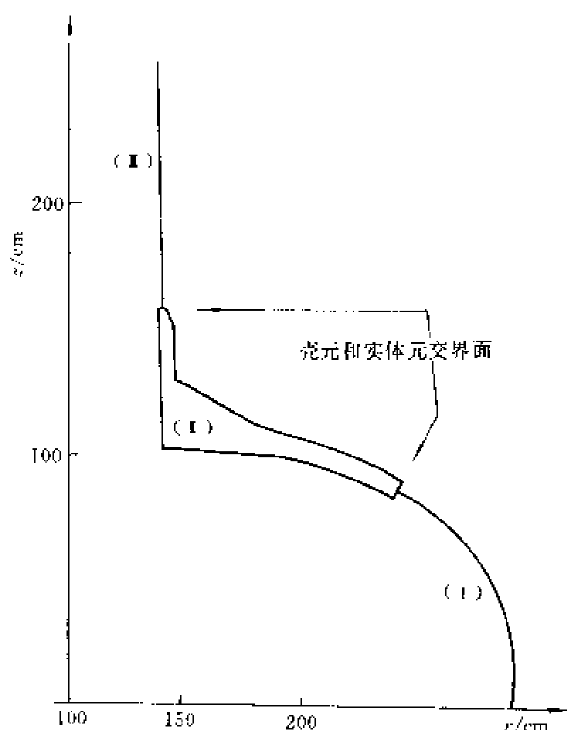


图 11.15　有限元模型
(Ⅰ)、(Ⅱ)壳体单元,(Ⅲ)实体单元

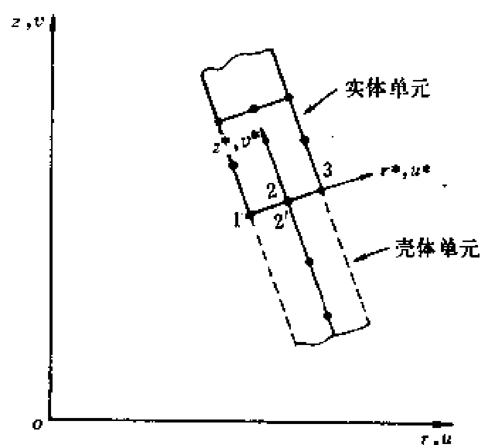


图 11.16　两种类型单元的联结

$$\begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$
$$(i = 1,2,3) \tag{11.5.1}$$

式中 u_i^*,v_i^* 分别是沿交界面和垂直于交界面的结点位移分量,则 v_1^*,v_2^*,v_3^* 应保证交界面在变形后仍保持为直线,并和壳体截面在转动 $\beta_{2'}$后相协调。上述各个位移协调条件可一并表示为

$$u_2 = u_{2'},\ v_2 = v_{2'},\ v_1^* = v_2^* + \frac{t}{2}\beta_{2'},$$
$$v_3^* = v_2^* - \frac{t}{2}\beta_{2'} \tag{11.5.2}$$

其中
$$v_i^* = -\sin\phi u_i + \cos\phi v_i$$

上式还可改写成下列形式

$$C = \begin{Bmatrix} u_2 - u_{2'} \\ v_2 - v_{2'} \\ -\sin\phi(u_1 - u_2) + \cos\phi(v_1 - v_2) - \dfrac{t}{2}\beta_{2'} \\ -\sin\phi(u_3 - u_2) - \cos\phi(v_3 - v_2) + \dfrac{t}{2}\beta_{2'} \end{Bmatrix} = 0 \tag{11.5.3}$$

这就是存在于交界面上 9 个位移参数(u_1,v_1,u_2,v_2,u_3,v_3,$u_{2'}$,$v_{2'}$,$\beta_{2'}$)之间的约束方程。

在实际计算程序中，引入上列约束方程时有两种方案可供选择。

1. 罚函数法

首先通过罚数 α 将约束方程引入系统的能量泛函

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2}\alpha C^T C$$

其中 Π 是未考虑约束条件时系统的能量泛函，它是由实体单元和壳体单元两个区域能量泛函叠加而得到。

由 $\delta\Pi^* = 0$，可以得到

$$(\boldsymbol{K}_1 + \alpha\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}$$

其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{Q}$ 是系统的结点位移向量和载荷向量，$\boldsymbol{K}_1$ 是未引入约束方程时的系统刚度矩阵，$\boldsymbol{K}_2$ 是由于引入约束方程而增加的刚度矩阵。

求解上列方程组，可以得到满足约束方程，即满足交界面上位移协调条件的系统位移场。利用此方法时，一个重要问题是罚数 α 的选择。理论上说，α 越大，约束方程就能越好地得到满足。但是由于 $\boldsymbol{K}_2$ 本身是奇异的，同时计算机有效位数是有限的，α 过大将导致系统方程病态而使结果失效。一般情况下 α 只能比 $\boldsymbol{K}_1$ 中的对角元素大 $10^3 \sim 10^4$ 倍，所以约束方程只能近似地得到满足。

2. 直接引入法

由于交界面上 9 个位移参数之间存在约束方程(11.5.3)式，所以它们只有 5 个是独立的。如果选择 $u_1^*, u_3^*, u_{2'}, v_{2'}, \beta_{2'}$ 作为独立的位移参数，则实体单元的 6 个位移参数 $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$ 和它们之间存在以下转换关系：

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & -\frac{t}{2}\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi & \frac{t}{2}\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & \frac{t}{2}\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi & -\frac{t}{2}\cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_3^* \\ u_{2'} \\ v_{2'} \\ \beta_{2'} \end{Bmatrix} \tag{11.5.4}$$

直接引入法是将上列转换关系式引入实体部分的刚度矩阵和载荷向量，经转换后的实体部分的刚度矩阵和载荷向量可按通常的步骤，与壳体部分的矩阵或向量集合成系统的刚度矩阵和载荷向量，从而得到系统的求解方程组。

直接引入法和子结构法结合使用是一种简便有效的计算方案。此时具体步骤如下：

(1) 实体部分和壳体部分分别形成刚度矩阵和载荷向量。

(2) 将转换关系式(11.5.4)引入实体部分的刚度矩阵和载荷向量，由于交界面上的位移参数通常排列在实体部分位移向量的开头或末尾，此转换是比较方便的。

(3) 对壳体部分交界面以外的所有自由度进行凝聚，并将最后得到的对应于位移参数 $u_{2'}, v_{2'}, \beta_{2'}$ 的刚度矩阵和载荷向量作为壳体子结构的贡献集合到实体部分的刚度矩阵

和载荷向量中，从而得到系统的求解方程组。

直接引入法可使约束方程(11.5.3)式精确地得到满足，当它和子结构法结合使用时不仅不带来计算上的麻烦，反而可以节省储存和计算量，所以是一种较好的方案。

11.5.2 过渡单元

Surana 曾先后提出用于轴对称应力分析和三维应力分析的过渡单元以解决不同类型单元的联结问题[2,3]。他所考虑的实体单元是等参单元，壳体单元是蜕化壳体单元(超参壳元)，而过渡单元实际上是这两种单元的结合。以轴对称问题为例，相匹配的这三种单元的形式如图 11.17 所示。

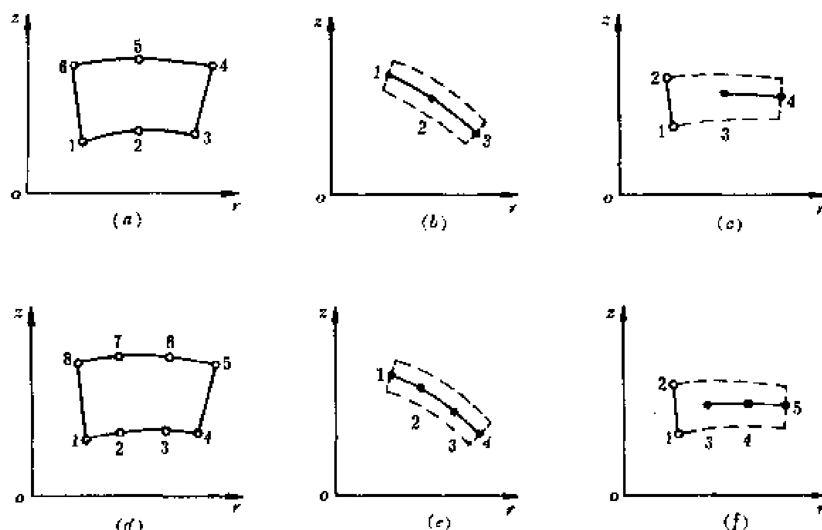


图 11.17 (a),(d)实体单元,(b),(e)壳体单元 (c) (f)过渡单元

从以前的讨论中已知，对于轴对称等参实体单元，有

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_s} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix} \tag{11.5.5}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_s} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{11.5.6}$$

其中 n_s 是实体单元的结点数。

对于轴对称蜕化壳体单元，有

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_t} N_i(\xi) \begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \sum_{i=1}^{n_t} N_i(\xi)\eta \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} \cos\phi_i \\ \sin\phi_i \end{Bmatrix} \tag{11.5.7}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_t} N_i(\xi) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \sum_{i=1}^{n_t} N_i(\xi)\eta \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} -\sin\phi_i \\ \cos\phi_i \end{Bmatrix} \alpha_i \tag{11.5.8}$$

其中 n_t 是壳体单元的结点数。

利用以上各式，对于过渡单元可以建立其坐标和位移的插值表示式如下：

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\xi,\eta)\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=m+1}^{n} N_i(\xi)\begin{Bmatrix} r_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \sum_{i=m+1}^{n} N_i(\xi)\eta\frac{t_i}{2}\begin{Bmatrix} \cos\phi_i \\ \sin\phi_i \end{Bmatrix}\alpha_i \tag{11.5.9}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\xi,\eta)\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=m+1}^{n} N_i(\xi)\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \sum_{i=m+1}^{n} N_i(\xi)\eta\frac{t_i}{2}\begin{Bmatrix} -\sin\phi_i \\ \cos\phi_i \end{Bmatrix}\alpha_i \tag{11.5.10}$$

其中 m 是过渡单元中和实体单元相关的结点数，$n-m$ 是和壳体单元相关的结点数，n 是过渡单元的结点总数。

从上式可见，建立过渡单元的几何和位移的插值表示式是没有困难的。

值得注意的是在形成单元刚度矩阵时，如何确定积分点应变和应力。我们知道，对于实体单元可以在总体坐标 r,z 内利用几何关系从位移确定轴对称问题的全部应变分量：$\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z,\gamma_{rz}$；而对于壳体单元，利用几何关系只能确定局部坐标系 r',z' 内的 3 个应变分量：$\varepsilon_{z'},\varepsilon_\theta,\gamma_{r'z'}$，若要得到 $\varepsilon_{r'}$，则应由壳体基本假设：$\sigma_{r'}=0$，故 $\varepsilon_{r'}=\nu(\varepsilon_{z'}+\varepsilon_\theta)$。而如果利用几何关系，从位移的插值表示式计算 $\varepsilon_{r'}$，只能得到 $\varepsilon_{r'}=0$ 的结果，这是由于建立壳体单元的位移插值表示式时已引入"壳体的法向位移 $u'(\xi,\eta)$ 在厚度方向的变化是可以忽略的，即 $u'(\xi,\eta)\approx u'(\xi,0)$"这一假设。

在过渡单元中，由于一部分位移插值函数取自壳体单元，也就将上述关于法向位移的假设引入了位移的插值表示式。这样一来，即使在过渡单元中靠近实体单元的部分积分点，利用几何关系计算 $\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z,\gamma_{rz}$（或 $\varepsilon_{r'},\varepsilon_\theta,\varepsilon_{z'},\gamma_{r'z'}$），也会由于在靠近壳体单元部分引入了 $\varepsilon_{r'}=0$ 这一过分强制的约束，而在局部区域产生不合理的附加应力，所以 Surana 在他的文章中指出：在过渡单元中，如何确定应变和应力尚是一个需要研究的问题。在他的算例中，一般都规定材料 $\nu=0$，可能正是为了回避上述问题，因为这时实际的 $\varepsilon_{r'}(=\nu(\varepsilon_{z'}+\varepsilon_\theta))$ 也真正等于 0。

本书作者认为，在建立过渡单元的刚度矩阵时，所有高斯积分点均应采用超参壳元的应力应变关系。当然在进行应变计算以前，应将和实体单元相联结一端的实体单元型的结点位移参数参照多点约束方程所表达的关系式转换成壳体单元型的结点位移参数（即中面位移和转动）。

例 1 混合使用实体单元和壳体单元求解受内压圆柱壳的位移（图 11.18）。壳体尺寸：$R_{外}=10\text{cm}$，$t=0.1\text{cm}$，$E=3.0\times10^5\text{MPa}$，$\nu=0$，$p=10000/\pi\text{MPa}$。

模式 A 中实体单元采用三角形单元，壳体单元采用 11.3 节的二次曲线壳元，二种单元通过约束方程联结。

模式 B 中实体单元采用 6 结点等参元，壳体单元采用 11.4 节的超参数单元，二种单元通过过渡单元联结。

在计算中为考虑实际情况并与实体单元（计算中压力是作用于内表面的）相一致，壳体部分也是将压力作用于内表面的。

按压力作用于内表面、引入必要的修正、壳体理论薄膜解：

$$u = \frac{pR_{内}R_{中}}{tE} = \frac{0.995}{3\pi} = 0.105572\ \text{cm}$$

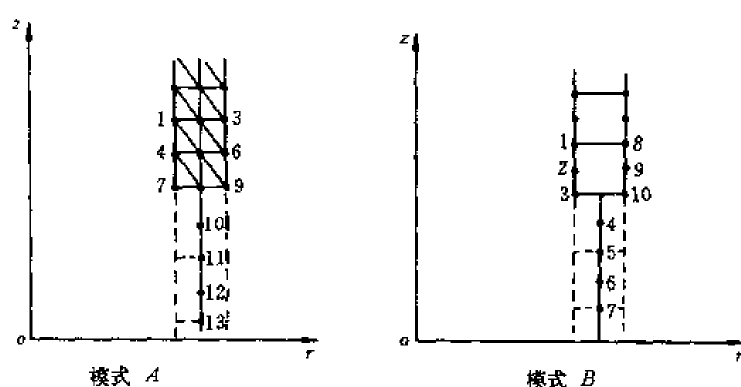


图 11.18　受内压圆柱壳有限元模型

两种模式的有限元分析结果列于表 11.4，可以看到，这两种模式都得到和解析解符合得很好的结果，在两种单元的交界面附近都未出现不合理的误差。

表 11.4　受内压圆柱壳的径向位移　cm

模式 A		模式 B	
结点号	位移值	结点号	位移值
13	0.105573	7	0.105572
12	0.105573	6	0.105572
11	0.105573	5	0.105572
10	0.105573	4	0.105572
7	0.105577	3	0.105576
8	0.105573		
9	0.105572	10	0.105568
4	0.105576	2	0.105574
5	0.105573		
6	0.105571	9	0.105570
1	0.105576	1	0.105576
2	0.105572		
3	0.105571	8	0.105568

例 2　图 11.14 所示有接管的轴对称容器封头，内壁受有 $p=0.6\text{MPa}$ 的均布压力，接管顶部受有 $P=3.828\text{MN}$ 的轴向力。同时还受有温度载荷，内外壁环境温度分别是 100℃和 200℃，热交换系数：$AA\sim BB$ 区域和 $CC\sim DD$ 区域，内外壁均为 360 W/(m^2·K)，$BB\sim CC$ 区域内外壁均为 1186W/(m^2·K)，材料的导热系数为 46.3W/(m·K)。材料的 $E=2\times10^5\text{MPa}$，$\nu=0.3$。

它的有限元计算模型如图 11.15 所示，(Ⅰ)、(Ⅱ)两个区域各用了 12 和 35 个二次曲边壳元，区域(Ⅰ)用了 360 个三角形轴对称实体单元。两种类型单元的联结采用直接引入法。计算得到的内外壁的第四强度理论折算应力绘制于图 11.19。在两种类型单元的交界

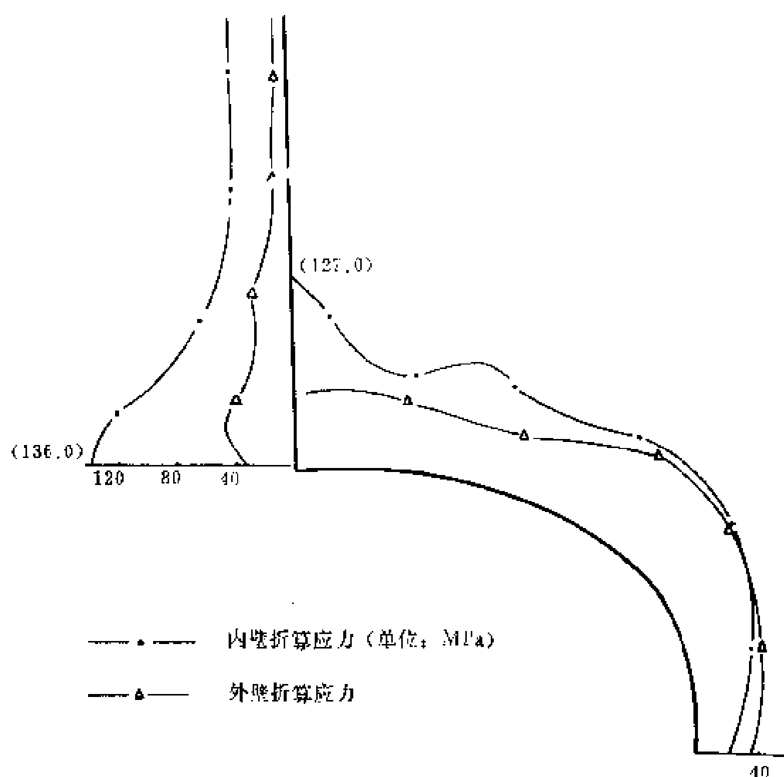


图 11.19 折算应力

面附近未出现不合理的应力扰动。应该指出的是，在区域（Ⅰ）和（Ⅱ）的交界处，结构厚度的变化即 ε_r 达到 0.19%，此应变是相当大的。曾强迫引入交界面上 $\varepsilon_r=0$ 进行试算，内外壁的折算应力分别由 53.7MPa 和 30.3MPa 的合理结果变为 75.2MPa 及 52.8MPa，这说明不恰当地引入 $\varepsilon_r=0$ 的约束在局部将引起多么大的误差，而交界面附近的应力往往是分析工作者最为关心的结果。

11.6 小　　结

虽然本章讨论的轴对称壳体单元是一般壳体单元中的最简单情况（因为它本质上是一维问题），但是它仍然反映了一般壳体单元的一些基本特点，这是我们应该注意理解的。

首先因为薄壳理论中的应变 $\kappa_s,\kappa_\theta,\kappa_{s\theta}$ 项内包含了 w 的二次导数，为保证解的收敛性，w 的一次导数在单元之间必须保持协调，所以薄壳单元属于 C_1 型单元，这是区别于一般 C_0 型的实体单元的。对于这种简单轴对称壳单元，一次导数的协调性要求并不带来太大困难，但是至少使得 w 不能采用和 $u(v)$ 同样简单的插值函数。为避免此麻烦，并照顾分析中厚壳体的需要，发展了位移和转动独立插值的壳体单元以及超参数蜕化单元，这两种单元，特别是前者对于轴对称壳体很有实际意义，但是在数值积分方案的选择上必须采用减缩积分，以避免发生剪切“锁死”的现象。

其次因为一般壳体的分析必须在曲线坐标中进行，从解的收敛性条件考虑，常应变要

求由于其在壳体结构中实际很少可能发生而不必满足，但是刚体运动的要求仍是必须保证的。而要在曲线坐标中构造包含刚体运动模式的位移插值函数并不像在直角坐标中构造实体单元位移插值函数那样方便，所以是否包含刚体运动位移模式是构造壳体单元位移插值函数时必须注意考虑的问题。

上述第一个特点是一般板、壳单元所共有的，第二个特点是一般壳体单元所特有的。根据上述特点所提出的问题在以后一般壳体单元的分析中仍应继续给以注意。

不同类型单元的联结是实际结构有限元分析中经常遇到的问题，本章中只讨论了轴对称实体单元和壳体单元的一种联结形式，通过此例所阐明的原则和方法是具有一般意义的。

当轴对称壳体承受非轴对称载荷时，可以利用 Fourier 展开的方法，有限元分析仍在 r, z 平面内进行，方法和步骤和轴对称实体承受非轴对称载荷情况相同。

习　题

11.1　对于(11.3.11)式和(11.3.14)式所表达的截锥单元的 $\boldsymbol{K}^{s}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{Q}^{s}_{i}$，如采用 1 点高斯积分，求其显式表达式。

11.2　对于(11.3.12)式所表达的 $\boldsymbol{K}^{s}_{ij}$，分别采用 1 点和 2 点高斯积分求其显式表达式，并讨论为什么必须采用 1 点积分才能避免剪切“锁死”。

11.3　导出(11.3.25)式的 $1/R_{s}$ 表达式。

11.4　求(11.3.21)式中的 $\boldsymbol{B}_i^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_j$ 的显式表达式。

11.5　如将 11.3 节的截锥单元和曲边单元用于离散子午线为一圆弧段的旋转壳，如每两个结点之间的圆弧相对的中心角为 5°，试计算出由二种单元所得的 ϕ 角的最大误差各为多少。

11.6　以轴对称壳受轴对称载荷为例，从(11.2.11)式出发，试分析可能出现的常应变(即常 $\epsilon_s, \epsilon_\theta$ 或常 κ_s, κ_θ)位移模式。

11.7　如有 4 结点轴对称实体单元和轴对称壳元单元相联结，列出交界面上的约束方程。

11.8　过渡单元中，如所有积分点都采用超参壳元的应力应变关系，试导出它的表达格式。

11.9　在 11.4 节的轴对称超参单元中，令 $t_i = t =$ 常数，$\boldsymbol{v}_{2i}$ 和中面法线方向一致，并以 ϕ_i 表示。证明此种单元可以转化为位移和转动各自独立插值的曲边单元(11.3 节)(提示：推导中可假设 $\frac{t}{2R_s} \ll 1$，$\frac{t}{2R_\theta} \ll 1$)。

11.10　列出 11.2 和 11.3 节两种截锥单元用于非轴对称载荷时的表达格式。

参考文献

1 平幼妹．旋转对称结构的温度和应力分析．清华大学工程力学系硕士论文，1983

2 Surana K S. Transition Finite Elements for Axi-Symmetric Stress Analysis. Int. J. num. Meth. Engng, 1980, 15, 809～832

3 Surana K S. Transition Finite Elements for Three-Dimensional Stress Analysis. Int. J. num. Meth. Engng, 1980, 15, 991～1020

第12章　一般壳体问题的有限单元法

12.1　引　　言

在上一章中我们讨论了轴对称壳体有限元分析的步骤和几种常用轴对称壳体单元。通过这些讨论，我们对壳体单元与其分析特点已有了基本的认识，本章是将它们推广于一般壳体。

类似于轴对称壳体分析中的直线(截锥)单元和曲边单元，在一般壳体分析中有平板壳元和曲面壳元。和轴对称分析中的超参数壳元相似，有用于一般壳体分析的，从三维实体单元蜕化而来的超参数壳元。这两类单元实质上的区别是在分析的不同阶段将壳状三维连续体简化为二维壳体单元，具体表示如图12.1。在构造单元过程中先后不同地引入了两种近似性，一是来自有限元的离散，一是来自一定的壳体假设。

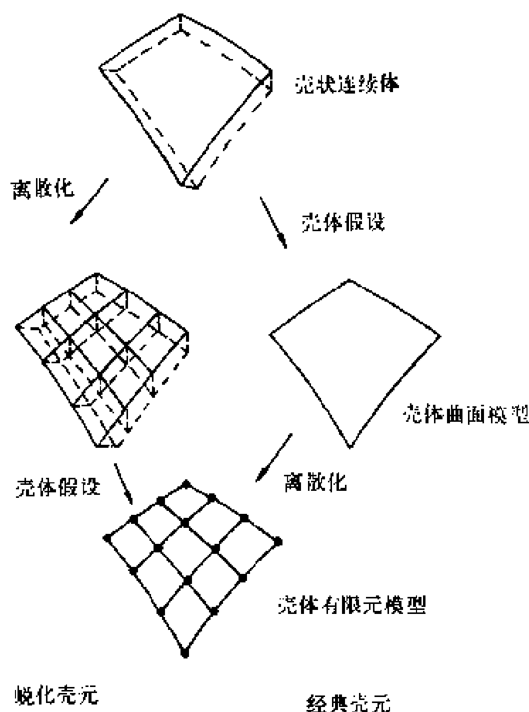


图12.1　导出壳体单元的两种方案

按照对壳体几何形状的描写和简化，基于壳体理论的壳体单元可以分为深壳单元，扁壳单元(这两种统称曲面壳元)和平板单元。也就是说，对于一个通常的壳体结构，可以用平板单元，也可用扁壳单元或深壳单元进行离散化。

用折板代替壳体，如图12.2所示，从直觉上看是很自然的。通常用三角形或矩形平板单元的组合体去代替曲面壳体，其中又以三

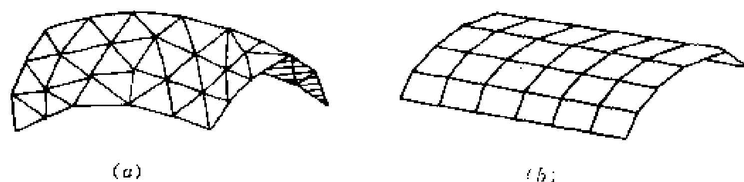


图12.2　用折板代替壳体

(a) 由三角形单元组成的任意壳体

(b) 由矩形单元组成的棱柱面壳体

角形单元应用较广，因为它可以适用于复杂的壳体形状。平板单元的优点是表达格式简单，第10章中所讨论的各种平板弯曲单元只要稍加扩展就可以用于壳体分析。当然用折

板代替壳体时，正如用截锥单元去离散子午线为光滑曲线的旋转壳体，在几何上又引入了新的近似性，但是只要计算网格合理地加密，计算精度是可以满足实际要求的。

如果采用曲面单元，能够更好地反映壳体的真实几何形状，在单元尺寸大小相同的情况下，通常可以得到比平板单元更好的效果。但是基于薄壳理论的曲壳单元的特点，在前一章轴对称壳体的讨论中已经述及，要构造满足 C_1 连续性、同时满足完备性（主要是包含刚体运动模式）的插值函数是相当困难的事。对于一般壳体，由于几何形状更为复杂，情况更是如此。正如在前一章已看到的，位移和转动各自独立插值的曲面壳元，由于只要求满足 C_0 连续性，同时易于满足包含刚体运动模式的要求，在轴对壳分析中已得到广泛的应用。但是对于一般壳体情况，仍因几何描述的复杂性及涉及具体壳体理论的选择，采用在理论上和它等价、从三维实体单元蜕化而来的超参数壳元就成为比较自然的替代，因此超参数壳元是现今工程实际中用作一般壳体结构分析的最常见的单元。但是，在前一章中我们也已初步看到，超参壳元和等参实体元相比，还要增加一从总体坐标到壳体局部坐标的转换，使表达格式复杂化，并增加了计算量。在 9.1 节关于结构有限单元概论中述及的相对自由度壳元的有限元表达格式则相对简单，因此在实际分析中具有进一步被应用的优势。

基于以上讨论，本章的内容主要集中于平板单元和超参单元，并简要讨论相对自由度单元。为考虑实际分析中经常需要同时采用壳体单元和实体单元，本章最后讨论了不同类型单元的联结，这是上一章同一问题原则和方法的推广应用。

12.2 平板壳体单元

12.2.1 局部坐标系内的单元刚度矩阵

平板壳体单元可以看成是平面应力单元和平板弯曲单元的组合，因此其单元刚度矩阵可以由这两种单元的刚度矩阵组合而成。

以 3 结点三角形平板单元为例，如图 12.3 所示，局部坐标系 oxy 建立在单元所在平面内。

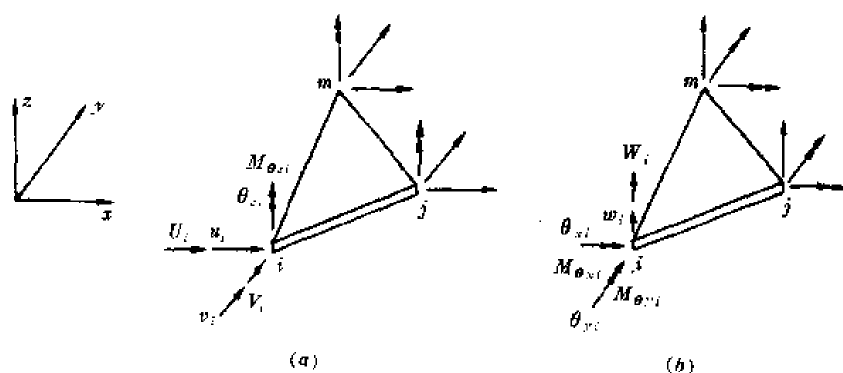


图 12.3 三角形平板薄壳单元的结点力和结点位移

对于平面应力状态，由 2.2 节可知

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{N}_i^{(m)} \boldsymbol{a}_i^{(m)}, \ \boldsymbol{a}_i^{(m)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{12.2.1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{B}_i^{(m)} \boldsymbol{a}_i^{(m)}, \ \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{12.2.2}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{(m)} = \iint (\boldsymbol{B}_i^{(m)})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}^{(m)} \boldsymbol{B}_j^{(m)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12.2.3}$$

式中 $\boldsymbol{N}_i^{(m)}$,$\boldsymbol{B}_i^{(m)}$,$\boldsymbol{D}^{(m)}$见(2.2.8),(2.2.14),(2.2.20)等式,现加上标(m),表示属于薄膜应力状态的。

对于平板弯曲状态,由 10.2 节可知

$$\begin{gathered} w = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{N}_i^{(b)} \boldsymbol{a}_i^{(b)} \\ \boldsymbol{a}_i^{(b)} = [w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^{\mathrm{T}} \\ \theta_{xi} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i, \qquad \theta_{yi} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{gathered} \tag{12.2.4}$$

并进而可得到

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{B}_i^{(b)} \boldsymbol{a}_i^{(b)}, \qquad \boldsymbol{\kappa} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]^{\mathrm{T}} \tag{12.2.5}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{(b)} = \iint (\boldsymbol{B}_i^{(b)})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}^{(b)} \boldsymbol{B}_j^{(b)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12.2.6}$$

上标(b)表示属于平板弯曲状态的。

组合上述两种状态就可得到平板壳元的各个矩阵表达式。需要指出,在局部坐标系中,结点位移参数不包含 θ_{zi}。但是为了下一步将局部坐标系的刚度矩阵转换到总体坐标系,并进而进行集成,需要将 θ_z也包括在结点位移参数中。这样一来结点位移向量表示为

$$\boldsymbol{a}_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^{\mathrm{T}} \tag{12.2.7}$$

同时平板壳体单元的刚度矩阵可表示为

$$\boldsymbol{K}_{ij} = \left[\begin{array}{cc:ccc:c} \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{$\boldsymbol{K}_{ij}^{(m)}$}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & \boldsymbol{K}_{ij}^{(b)} & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{12.2.8}$$

12.2.2 单元刚度矩阵从局部坐标系到总体坐标系的转换

上节导出了平板单元在局部坐标系(即 x,y 轴在单元的中面内,z 轴垂直于中面的坐标系)中的单元矩阵,为建立系统的刚度矩阵,需要确定一总体坐标系,并将各单元在局部坐标系内的刚度矩阵转换到总体坐标系中去。

现用 x',y',z'表示总体坐标系,局部坐标系仍以 x,y,z 表示,参见图 12.4。

仍以上节讨论的 3 结点三角形单元为例,局部坐标系内的结点位移向量是

$$\boldsymbol{a}_i = [u_i \quad v_i \ w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]^{\mathrm{T}} \tag{12.2.7}$$

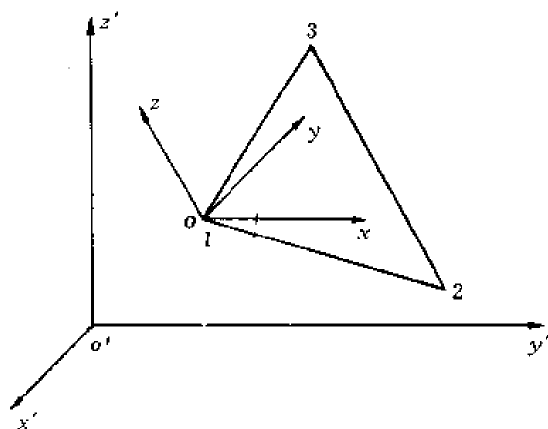


图 12.4　平板单元的总体坐标系与局部坐标系

总体坐标系内的结点位移向量是

$$a'_i = [u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta'_{xi} \quad \theta'_{yi} \quad \theta'_{zi}]^{\mathrm{T}} \tag{12.2.9}$$

结点位移向量在两个坐标系之间按下式进行转换

$$a'_i = La_i,\ a_i = L^{\mathrm{T}}a'_i \tag{12.2.10}$$

其中：

$$L = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},\ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \tag{12.2.11}$$

式中 $\lambda_{x'x}=\cos(x',x)$等是 x,y,z 轴在 $x'y'z'$ 系的各个方向余弦。

单元结点位移向量的转换关系是

$$a'^e = Ta^e \quad a^e = T^{\mathrm{T}}a'^e \tag{12.2.12}$$

其中：

$$T = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}$$

单元刚度矩阵和载荷向量的转换关系是

$$\left.\begin{aligned} K'^e &= TK^eT^{\mathrm{T}}, \quad & K^e &= T^{\mathrm{T}}K'^eT \\ Q'^e &= TQ^e, \quad & Q^e &= T^{\mathrm{T}}Q'^e \end{aligned}\right\} \tag{12.2.13}$$

对于它们的每一子块，有

$$\left.\begin{aligned} K'_{ij} &= LK_{ij}L^{\mathrm{T}}, \quad & K_{ij} &= L^{\mathrm{T}}K'_{ij}L \\ Q'_i &= LQ_i, \quad & Q_i &= L^{\mathrm{T}}Q'_i \end{aligned}\right\} \tag{12.2.14}$$

集成总体坐标系内的各个单元刚度矩阵和载荷向量，就可以得到系统的求解方程。解之得到总体坐标系内的位移向量 a' 以后，再转换回到局部坐标系的位移向量 a，并进而计算单元内的应力等。

在集成总体刚度矩阵时，需要注意一特殊情况，即如果汇交于一个结点的各个单元在

同一平面内。由于在(12.2.8)式中已令 θ_{zi}方向的刚度系数为 0,在局部坐标系中,这个结点的第六个平衡方程(相应于 θ_{zi}方向)将是 0=0。如果总体坐标系与这一局部坐标系 z 方向一致,显然总体刚度矩阵的行列式 $|\boldsymbol{K}|=0$,因而系统方程将不能有唯一的解。如果总体坐标与局部坐标方向的 z 不一致,经变换后,在此结点得到表面上正确的六个平衡方程,但它们实际上是线性相关的,仍然导致 $|\boldsymbol{K}|=0$。为克服这一困难,有两种方法可供选择。

(1) 在局部坐标系内建立结点平衡方程,并删去 θ_{zi}方向的平衡方程 0=0,于是剩下的方程组满足唯一解的条件。但此法在程序处理上比较麻烦。

(2) 在此结点上,给以任意的刚度系数 K_{θ_z},这时在局部坐标系中,此结点在 θ_{zi}方向的平衡方程是 $K_{\theta_z}\theta_{zi}=0$。经变换后,总体坐标中的系统方程满足唯一解的条件,即 $|\boldsymbol{K}|\neq 0$。在解出的结点位移中包括 θ_{zi}。由于 θ_{zi}与其它结点平衡方程无关,并且也不影响单元应力,所以实际上给定任意的 K_{θ_z}值都不影响计算结果。此法在程序处理上比较方便。

以上讨论的是对于图 12.4 所示三角形平板单元,实际上,上述各个矩阵或向量的转换公式完全是一般的。对于其他形式的平板单元也适用,只是根据单元结点数目和结点参数向量的具体定义,转换矩阵(12.2.11)式和(12.2.12)式可能有所不同。

12.2.3 局部坐标的方向余弦

1. 三角形单元

三角形单元 3 个角点的坐标在总体坐标和局部坐标中分别表示为(参见图 12.4)

$$\boldsymbol{X}_i' = \begin{Bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{Bmatrix},\ \boldsymbol{X}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (i = 1,2,3) \tag{12.2.15}$$

局部坐标系的原点 $\boldsymbol{X}_0'$可以选择在单元内的任一点,例如选在 1 点,即

$$\boldsymbol{X}_0' = \boldsymbol{X}_1' \tag{12.2.16}$$

如前所述,x,y 轴放在单元平面内,所以 z 轴垂直于此平面,按角点 1→2→3 右螺旋指向 z 的正方向,如令

$$\boldsymbol{X}_{12}' = \boldsymbol{X}_2' - \boldsymbol{X}_1' = \begin{Bmatrix} x_2' - x_1' \\ y_2' - y_1' \\ z_2' - z_1' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{12}' \\ y_{12}' \\ z_{12}' \end{Bmatrix} \tag{12.2.17}$$

$$\boldsymbol{X}_{13}' = \boldsymbol{X}_3' - \boldsymbol{X}_1' = \begin{Bmatrix} x_3' - x_1' \\ y_3' - y_1' \\ z_3' - z_1' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{13}' \\ y_{13}' \\ z_{13}' \end{Bmatrix} \tag{12.2.18}$$

则 z 轴的方向余弦是

$$\boldsymbol{\lambda}_z = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'z} \end{Bmatrix} = \frac{\boldsymbol{X}_{12}' \times \boldsymbol{X}_{13}'}{|\boldsymbol{X}_{12}' \times \boldsymbol{X}_{13}'|} = \frac{1}{S}\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} \tag{12.2.19}$$

其中 $\lambda_{x'z} = \cos(x', z)$ 等

$$A = y'_{12}\, z'_{13} - y'_{13}\, z'_{12} \qquad B = z'_{12}\, x'_{13} - z'_{13}\, x'_{12}$$

$$C = x'_{12}\, y'_{13} - x'_{13}\, y'_{12} \qquad S = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

局部坐标系的 x 轴除了应保持在单元平面内而外，具体方向是可以选择的。如选择在沿单元边界 1 2 方向，则 x 轴的方向余弦是

$$\boldsymbol{\lambda}_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{y'x} \\ \lambda_{z'x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_{12}} \begin{Bmatrix} x'_{12} \\ y'_{12} \\ z'_{12} \end{Bmatrix} \tag{12.2.20}$$

其中　$\lambda_{x'x} = \cos(x',x)$ 等，$l_{12} = \sqrt{(x'_{12})^2 + (y'_{12})^2 + (z'_{12})^2}$。

为以后比较方便的表示应力计算结果，x 轴还可以选择和总体坐标系 $ox'y'$ 面平行，即 x 轴是单元平面和 $z' = z'_1$ 平面的交线。从而可以得到 x 轴的方向余弦

$$\boldsymbol{\lambda}_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'x} \\ \lambda_{y'x} \\ \lambda_{z'x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{Bmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{12.2.21}$$

y 轴的方向余弦可由 x,y,z 三个轴构成右螺旋的要求决定，即

$$\boldsymbol{\lambda}_y = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'y} \\ \lambda_{y'y} \\ \lambda_{z'y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}_z \times \boldsymbol{\lambda}_x = \begin{Bmatrix} \lambda_{x'y}\lambda_{z'x} - \lambda_{z'z}\lambda_{y'x} \\ \lambda_{z'z}\lambda_{x'x} - \lambda_{x'z}\lambda_{z'x} \\ \lambda_{x'z}\lambda_{y'x} - \lambda_{y'z}\lambda_{x'x} \end{Bmatrix} \tag{12.2.22}$$

这样一来，我们就得到两个坐标系之间的转换矩阵

$$\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_x \quad \boldsymbol{\lambda}_y \quad \boldsymbol{\lambda}_z] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \tag{12.2.23}$$

并有 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\lambda}^{-1}$

两个坐标系之间的坐标转换可表示为

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}'_0 + \boldsymbol{\lambda X} \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}'_0) \tag{12.2.24}$$

其中

$$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

2. 矩形单元

现讨论矩形单元用于柱壳情况，这时局部坐标选择比较方便，原点可放在单元的中心，x 轴和 x' 轴（柱壳的母线）平行，如图 12.5 所示。这样一来，可将 $\boldsymbol{X}'_0$ 和 x,y,z 轴的方向余弦表示如下

$$
\boldsymbol{X}'_0=\begin{Bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{Bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{4} x'_i \\ \sum_{i=1}^{4} y'_i \\ \sum_{i=1}^{4} z'_i \end{Bmatrix} \tag{12.2.25}
$$

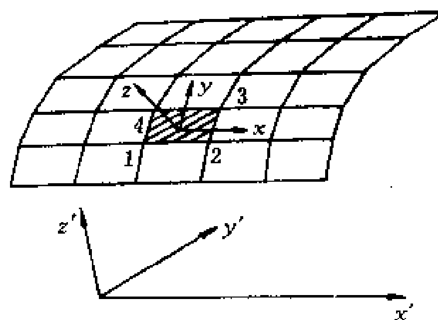


图 12.5 矩形单元的总体坐标和局部坐标

$$
\boldsymbol{\lambda}_x=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_y=\frac{1}{s_{14}}\begin{Bmatrix} 0 \\ y'_{14} \\ z'_{14} \end{Bmatrix},\ \boldsymbol{\lambda}_z=\frac{1}{s_{14}}\begin{Bmatrix} 0 \\ -z'_{14} \\ y'_{14} \end{Bmatrix} \tag{12.2.26}
$$

其中

$$
y'_{14}=y'_4-y'_1 \quad z'_{14}=z'_4-z'_1
$$

$$
s_{14}=\sqrt{(y'_{14})^2+(z'_{14})^2}
$$

12.2.4 单元和插值函数的具体考虑

以上各小节的讨论中，虽然涉及一、二种单元和插值函数，但是应当指出，那只是为了阐述的方便，表达格式和分析方法具有一般性，原则上以前讨论过的各种平面应力单元和平板弯曲单元都可以用来组合成平板壳元。需要考虑的是单元交界面上的位移协调性问题。

对于平板单元，因为切向位移 u,v 和法向位移 w 分别出现在薄膜应变 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$和弯曲应变 $\kappa_x,\kappa_y,\kappa_{xy}$当中，所以在单元内这两种应变是互不耦合的，表现于单元刚度矩阵实际上是平面应力单元和平板弯曲单元的简单叠加。它们的耦合仅出现在单元的交界面上，这是由于采用平板单元离散壳体结构时，相邻单元一般不在同一平面内，亦即在交界面的垂直方向一般不具有连续的切线，所以在一个单元平面内的薄膜内力传递到相邻单元时将有横向分量，从而引起弯曲效应。反之，一个单元的横向内力传递到相邻单元时将有切向分量，从而引起薄膜效应。

正是由于上述特点，尽管组成平板壳元的平面应力单元和平板弯曲单元满足协调性条件，如果 u,v 和 w 在交界面上的插值函数不相同，则平板壳元在交界面上的位移仍是不协调的。例如通常的 3 结点三角形平面应力单元在交界面上 u,v 是线性函数，而基于经典薄板理论的 3 结点三角形板单元，w 在交界面上是 3 次（见 10.2.2 节和 10.3.1 节）或 5 次（见 10.3.2 节）函数。因此为使交界面上位移协调，u,v 也应是 3 次或 5 次函数。确实也有 u,v,w 同是 3 次函数的平板壳元用于实际分析。但是在这种单元中，和 w 相仿，u,v 的一阶导数也将包括在结点位移参数当中。这样做将增加系统的自由度和表达格式的复杂性。另外，由于 u,v 的导数也即薄膜应变作为结点参数时，如果相邻单元的厚度或物性不同，将导致内力的不平衡，从而使解产生较大的误差。

由于以上原因，平板壳元仍较多地采用 u,v 为线性函数的形式。如上所述，如果平板弯曲单元是基于经典薄板理论的，单元交界面上的位移协调条件将不能满足。但是这种位移不协调性将随着单元的划分不断精细而减小，因为这时垂直于交界面的切线趋于连续。

在极限情况，相邻单元处于同一平面，平面应力单元和平板弯曲单元互不耦合，如果它们各自的位移原来是满足协调条件的，则平板壳元在交界面上位移也是协调的。

从上述意义来看，位移和转动各自独立插值的 Mindlin 板单元用来和平面应力单元组合成平板壳元是有利的。因为此单元中 w 也是采用 C_0 型插值函数，和 u,v 的插值函数是相同的，所以单元交界面上位移协调性得到满足。而且，由于 Mindlin 板单元在单元交界面上法向转动的协调性也是满足的，在网格形状上可以避免为使非协调板单元为通过分析试验而带来的限制。

和轴对称壳的截锥单元情况类似，平板壳元的另一问题是由于相邻单元在交界面上的切线不连续可能给局部的应力以一定的扰动，克服此缺点的方法也是需要将单元划分得比较细。

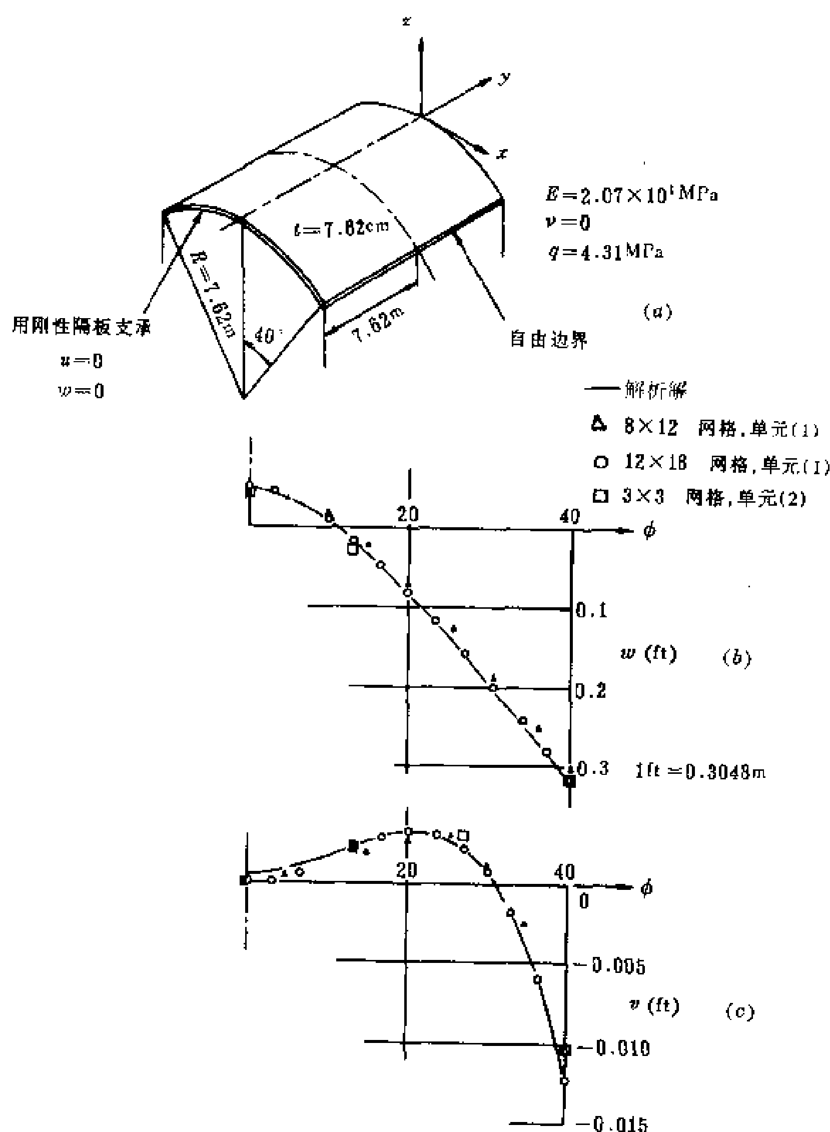


图 12.6 (*a*) 圆柱壳屋顶 (*b*) 自重作用下中央截面的垂直位移 (*c*) 端部支承处的纵向位移

例 图 12.6 所示为圆柱壳屋顶，两端由隔板支持，承受自重作用。因为很多壳体单元

的研究工作都以此例进行相互校核，所以它是有限元板壳分析中的一个标准考题，以后还将不止一次的用它来检验不同单元的效率和可靠性。现在我们引用三种单元的计算结果。

(1) 平面应力单元是 3 结点三角形常应变元(2.2 节)、平板弯曲单元是 3 结点 9 个位移参数的非协调元(10.2.2 节)。

(2) 平面应力单元是 6 结点三角形二次元，平板弯曲单元是 12 个结点参数的三角形协调元，每个角结点的参数是 $w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y$，边中结点的参数是$\partial w/\partial n$。

(3) 平面应力单元是双线性的四边形单元，平板弯曲单元是 10.4 节表 10.3 所列的 LLS 单元[1]。

因为结构的对称性，只取其 1/4 作有限元分析，在图 12.6 的(b)、(c)和图 12.7(a)，(b)上分别表出单元(1)，(2)和(3)在不同网格划分情况下，中央截面($y=1/2$)的垂直方向位移和支持截面($y=0$)的纵向位移。

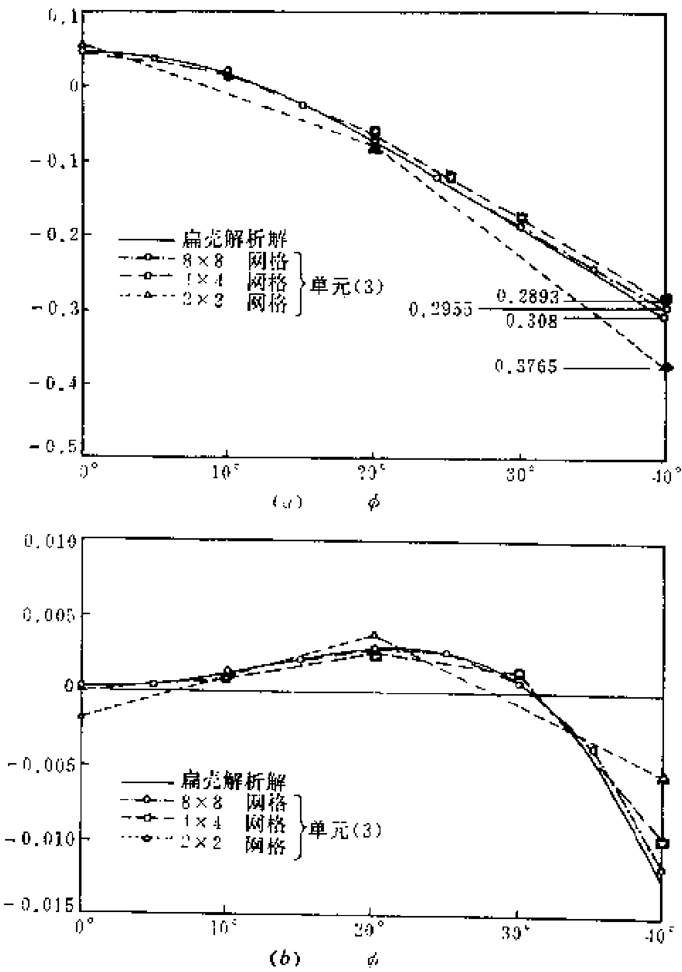


图 12.7 (a) 圆柱壳屋顶中央截面的垂直位移 (b) 端部支承处的纵向位移

从结果可见，当网格比较精细时，这几种单元的结果和扁壳理论的解析结果比较，符合得相当好。单元(2)采用 6×6 网格时有限元结果和解析解几乎不能区别，所以在图上未能表示出。

12.3 超参数壳体单元

在 11.5 节我们已讨论过超参数轴对称壳体单元，现在将其分析方法和表达格式推广于一般壳体。因为两者所涉及的方面在原则上是相同的，所以有些推导过程从略。

12.3.1 几何形状的规定

图 12.8 所示为两种典型的厚壳单元，它由上、下两个曲面及周边以壳体厚度方向的直线为母线的曲面所围成。给定每一对结点 $i_{顶}$ 和 $i_{底}$ 的总体直角坐标，即可近似地规定单元的几何形状，为此令 ξ,η 为壳体中面上的曲线坐标，ζ 为厚度方向的直线坐标，且 $-1\leqslant \xi,\eta,\zeta\leqslant 1$。于是壳体单元内任一点的总体坐标可近似地表示为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{中面} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\frac{\zeta}{2}\boldsymbol{V}_{3i} \tag{12.3.1}$$

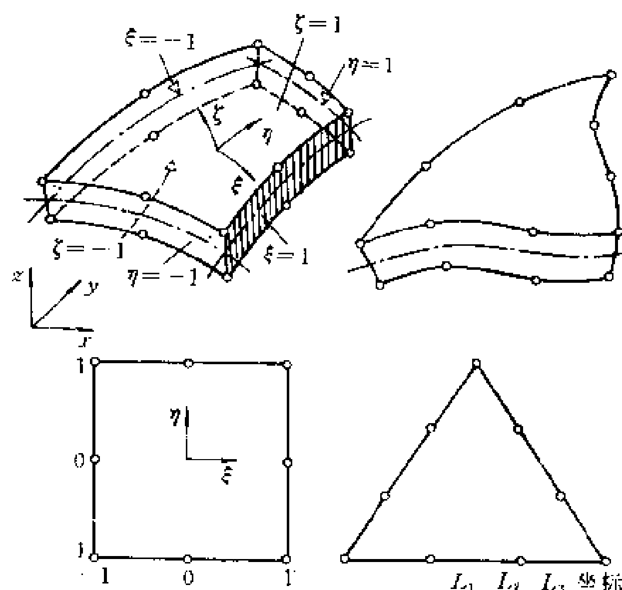


图 12.8 不同形状的厚壳单元

其中

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{中面} = \frac{1}{2}\left[\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{顶} + \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{底}\right] \tag{12.3.2}$$

是中面结点的总体直角坐标。

$$\boldsymbol{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} V_{3ix} \\ V_{3iy} \\ V_{3iz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{顶} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{底} = \begin{Bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{Bmatrix} \tag{12.3.3}$$

是从结点 $i_{底}$ 到结点 $i_{顶}$ 的向量。为适应以后描写位移的要求，$\boldsymbol{V}_{3i}$应选择在中面的法线方向，这时 $|\boldsymbol{V}_{3i}|$ 即为 i 点的厚度，亦即

$$t_i = |\boldsymbol{V}_{3i}| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2} \tag{12.3.4}$$

$\boldsymbol{V}_{3i}$的单位向量 $\boldsymbol{v}_{3i}$的方向余弦 l_{3i}, m_{3i}, n_{3i}如下：

$$\boldsymbol{v}_{3i} = \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{t_i}\begin{Bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{Bmatrix} \tag{12.3.5}$$

12.3.2 位移函数的表示

根据壳体理论的基本假设，变形前中面的法线变形后仍保持为直线，因此壳体内任一点的位移可由中面对应点沿总体坐标 x, y, z 方向的三个位移分量 u, v, w 及 $\boldsymbol{V}_{3i}$绕与它相垂直的两个正交向量的转动 α, β 所确定。在壳体单元中，中面上任一点的上述 5 个量还应表示为它们的结点值（结点位移参数）的插值形式。现在用 $\boldsymbol{v}_{3i}$表示结点 $\boldsymbol{V}_{3i}$方向的单位向量，用 $\boldsymbol{v}_{1i}$和 $\boldsymbol{v}_{2i}$表示与 $\boldsymbol{v}_{3i}$垂直并相互正交的单位向量，$\boldsymbol{v}_{3i}$绕它们的旋转分别是 β_i 和 α_i，如图

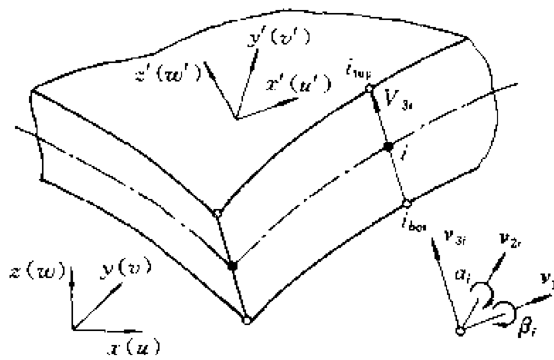


图 12.9 超参元的坐标和位移

12.9 所示，则单元内的位移最后可表示成

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{中面} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\zeta\frac{t_i}{2}\begin{bmatrix} l_{1i} & -l_{2i} \\ m_{1i} & -m_{2i} \\ n_{1i} & -n_{2i} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \tag{12.3.6}$$

其中 l_{1i}, m_{1i}, n_{1i}和 l_{2i}, m_{2i}, n_{2i}分别是 $\boldsymbol{v}_{1i}$和 $\boldsymbol{v}_{2i}$的方向余弦，即

$$\boldsymbol{v}_{1i} = \begin{Bmatrix} l_{1i} \\ m_{1i} \\ n_{1i} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_{2i} = \begin{Bmatrix} l_{2i} \\ m_{2i} \\ n_{2i} \end{Bmatrix} \tag{12.3.7}$$

为简单起见，(12.3.6)式的下标“中面”今后省去。并将该式写成标准形式

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{N}_1\ \boldsymbol{N}_2\ \cdots\ \boldsymbol{N}_n]\begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{Bmatrix} \tag{12.3.8}$$

其中

$$a_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \alpha_i \quad \beta_i]^T \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_i\zeta \frac{t_i}{2} l_{1i} & -N_i\zeta \frac{t_i}{2} l_{2i} \\ 0 & N_i & 0 & N_i\zeta \frac{t_i}{2} m_{1i} & -N_i\zeta \frac{t_i}{2} m_{2i} \\ 0 & 0 & N_i & N_i\zeta \frac{t_i}{2} n_{1i} & -N_i\zeta \frac{t_i}{2} n_{2i} \end{bmatrix} \tag{12.3.9}$$

单位向量 $\boldsymbol{v}_{1i}$，$\boldsymbol{v}_{2i}$ 可按下式定义，

$$\boldsymbol{v}_{1i} = \frac{\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{V}_{3i}}{|\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{V}_{3i}|} \qquad \boldsymbol{v}_{2i} = \frac{\boldsymbol{V}_{3i} \times \boldsymbol{v}_{1i}}{|\boldsymbol{V}_{3i} \times \boldsymbol{v}_{1i}|} \tag{12.3.10}$$

即

$$\boldsymbol{v}_{1i} = \begin{Bmatrix} l_{1i} \\ m_{1i} \\ n_{1i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Delta z_i \\ \Delta y_i \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_{2i} = \begin{Bmatrix} l_{2i} \\ m_{2i} \\ n_{2i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{t_i \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}} \begin{Bmatrix} \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2 \\ -\Delta x_i \Delta y_i \\ -\Delta x_i \Delta z_i \end{Bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{i}$ 是 x 轴方向的单位向量，如果 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 和 $\boldsymbol{i}$ 平行，则上式中 $\boldsymbol{i}$ 用 y 轴方向的单位向量 $\boldsymbol{j}$ 代替。

12.3.3 应变和应力的确定

为引入壳体理论中法线方向应力为零的假设，应在以法线方向为 z' 轴的局部坐标系 $x'y'z'$ 中计算应变和应力。

首先在 ζ=常数的曲面上确定两个切向向量，例如

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\boldsymbol{k} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{12.3.11}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是 x,y,z 方向的单位向量。利用上述两个向量，可以得到法线方向的向量

$$\boldsymbol{V}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} \tag{12.3.12}$$

或

$$\boldsymbol{V}_3=\begin{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial z}{\partial \xi}\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \eta}\\ \frac{\partial z}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\end{Bmatrix} \tag{12.3.13}$$

当 $\boldsymbol{V}_3$ 确定以后，x'，y' 方向的单位向量可以按照和以前相同的规则确定，即

$$\boldsymbol{v}_1=\frac{\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{V}_3}{|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{V}_3|},\qquad \boldsymbol{v}_2=\frac{\boldsymbol{V}_3\times\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{V}_3\times\boldsymbol{v}_1|} \tag{12.3.14}$$

同时可有

$$\boldsymbol{v}_3=\frac{\boldsymbol{V}_3}{|\boldsymbol{V}_3|} \tag{12.3.15}$$

这样就得到总体坐标系 x,y,z 和局部坐标系 x',y',z' 之间的转换关系

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{X}'\quad \boldsymbol{X}'=\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{12.3.16}$$

其中

$$\boldsymbol{X}=[x\ y\ z]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{X}'=[x'\ y'\ z']^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\theta}=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]=\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{bmatrix} \tag{12.3.17}$$

若 u',v',w' 是局部坐标系 x',y',z' 方向的位移分量，根据壳体理论，$\sigma_{z'}=0$ 的假设，在计算壳体变形能时，涉及的应变是

$$\boldsymbol{\epsilon}'=\begin{Bmatrix}\epsilon_{x'}\\ \epsilon_{y'}\\ \gamma_{x'y'}\\ \gamma_{y'z'}\\ \gamma_{z'x'}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u'}{\partial x'}\\ \frac{\partial v'}{\partial y'}\\ \frac{\partial u'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial x'}\\ \frac{\partial v'}{\partial z'}+\frac{\partial w'}{\partial y'}\\ \frac{\partial u'}{\partial z'}+\frac{\partial w'}{\partial x'}\end{Bmatrix} \tag{12.3.18}$$

为了最后以结点参数 $\boldsymbol{a}_i$ 表示 $\boldsymbol{\epsilon}'$，需要进行两次坐标转换。首先是利用转换矩阵 $\boldsymbol{\theta}$，将总体坐标系内位移的偏导数转换为局部坐标系内位移偏导数，它们之间的关系是

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'}\\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'}\\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta} \tag{12.3.19}$$

其次是将 u,v,w 对 x,y,z 的偏导数转换为对自然坐标 ξ,η,ζ 的偏导数，这在第 4 章中已讨论过，转换关系是

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\
\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}
\end{bmatrix}
= \boldsymbol{J}^{-1}
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\
\frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta}
\end{bmatrix}
\tag{12.3.20}
$$

其中

$$
\boldsymbol{J} =
\begin{bmatrix}
\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\
\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}
\end{bmatrix}
\tag{12.3.21}
$$

将(12.3.1)式代入上式可计算 $\boldsymbol{J}$，再利用(12.3.8)、(12.3.9)和(12.3.19)、(12.3.20)等式，最后可将 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 表示成

$$
\boldsymbol{\varepsilon}' = [\boldsymbol{B}_1' \ \boldsymbol{B}_2' \ \cdots \ \boldsymbol{B}_n']
\begin{Bmatrix}
\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n
\end{Bmatrix}
\tag{12.3.22}
$$

局部坐标系 x', y', z' 中的应力利用弹性关系可以表示成

$$
\boldsymbol{\sigma}' = [\sigma_{x'} \quad \sigma_{y'} \quad \tau_{x'y'} \quad \tau_{y'z'} \quad \tau_{z'x'}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}'
\tag{12.3.23}
$$

其中

$$
\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2}
\begin{bmatrix}
1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\
 & \text{对} & & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\
 & & \text{称} & & \frac{1-\nu}{2k}
\end{bmatrix}
\tag{12.3.24}
$$

式中 E，ν 是材料弹性模量和泊桑比，最后二个与剪应力 $\tau_{y'z'}$，$\tau_{z'x'}$ 有关项中的系数 $k=1.2$，这是为了考虑剪应力沿厚度方向不均匀分布的影响而引入的修正。

最后可以指出，本小节开始提出的确定 $\boldsymbol{V}_3$ 的方法是比较一般的。可以用于(12.3.3)式所定义的 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 不是沿法线方向和壳体厚度不是常数的情况。如果 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 是沿法线方向且壳体厚度是常数的情况，则壳体中面上各点的 $\boldsymbol{V}_3$ 可以较方便地利用各结点的 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 插值得到，即

$$
\boldsymbol{V}_3 = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\boldsymbol{V}_{3i}
\tag{12.3.25}
$$

显然，上式的计算量要比(12.3.13)式少很多。

12.3.4 单元刚度矩阵和载荷向量的形成

单元刚度矩阵和载荷向量的计算公式和第 4 章等参元的公式相同。载荷向量可以直接利用(4.4.2)～(4.4.5)式进行计算。至于单元刚度矩阵，只需将(4.4.1)式中总体坐标系的 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$，代之以局部坐标系的 $\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}'$，即

$$\boldsymbol{K}^{e}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}'\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{12.3.26}$$

其中 $\boldsymbol{B}'$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别是壳体局部坐标系的应变矩阵(见(12.3.22)式)和弹性矩阵(见(12.3.24)式)。

需要指出的是，正如轴对称壳情况，超参壳元在引入一定的几何假设以后和位移及转动各自独立插值的壳元是相互等价的。因此，在形成单元刚度矩阵时，同样需要保证 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性和 $\boldsymbol{K}_s$ 的奇异性。而且进一步的研究工作还指出[2]，对于作为三维蜕化实体元的超参壳元，(12.3.18)式所表达的应变分量 $\varepsilon_{x'}$，$\varepsilon_{y'}$ 和 $\gamma_{x'y'}$ 实际上包含着沿厚度(即局部坐标 z')均匀分布和线性分布的两部分。后者是壳体的弯曲应变，它相当于 Mindlin 板中的曲率变化 κ 引起的应变；前者是壳体的薄膜应变，是壳体中面内的变形(在板弯曲问题中，它被忽略。)所引起的。通过量纲分析，可以辨认，薄膜应变能项和剪切应变能项相同，在泛函中也具有罚函数的性质。因此和它相关的刚度矩阵也应是奇异的。否则，在壳越来越薄时，它也会造成“锁死”现象。因为这锁死是由过分的虚假薄膜应变能引起的，所以称之为薄膜“锁死”。

为保证 $\boldsymbol{K}$ 的非奇异性，且避免剪切“锁死”和薄膜“锁死”，从原则上说，在 Mindlin 板单元的讨论中所列举的各种方法都可以用于现在的超参壳元。文[2]对 9 结点超参壳元建议了一种假设应变的方案。文中对 $\varepsilon_{x'}$，$\varepsilon_{y'}$ 和 $\gamma_{x'y'}$ 的弯曲应变部分和薄膜应变部分以及横剪应变 $\gamma_{x'z'}$ 和 $\gamma_{y'z'}$ 采用不同取样点的插值表示。只是对于一般形状的超参壳元，整个推导过程和表达格式相当复杂。因此，从实用角度考虑，现在较普遍采用的，还是减缩积分方案。例如对于 8 结点和 9 结点的超参壳元，在 ξ，η 和 ζ 三个方向都采用 2 点积分。在此种单元发展初期，曾在 ξ，η 方向采用 3×3 精确积分。结果发现，分析厚板及厚壳时能得到较好的结果，但用于分析薄板及薄壳时，结果不好。其原因是在厚度变小时，发生了“锁死”现象。后改用 2×2 减缩积分，精度得到明显的改进，且节省了计算时间。

12.3.5 应力的计算

当解出位移以后，利用(12.3.22)和(12.3.23)式可以计算 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 和 $\boldsymbol{\sigma}'$。$\boldsymbol{\sigma}'$ 通常是工程实际感兴趣的，因为它有清晰的物理意义。但是应当指出，由(12.3.23)式算出的 $\boldsymbol{\sigma}'$ 中，横剪应力 $\tau_{x'z'}$ 和 $\tau_{y'z'}$ 是壳体截面上的平均剪应力，而实际剪应力是抛物线分布的，在壳体内外表面上 $\tau_{x'z'}=\tau_{y'z'}=0$，在中面上它们的数值为平均剪应力的 1.5 倍，所以应按此对从(12.3.23)式计算出的 $\boldsymbol{\sigma}'$ 进行修正。然后可根据需要计算主应力或总体坐标系中的应力 $\boldsymbol{\sigma}$。后者的计算公式是

$$\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}=\theta\begin{bmatrix}\sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'}\\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'}\\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'}\end{bmatrix}\theta^{\mathrm{T}} \tag{12.3.27}$$

例 1 图 12.10 所示为一简支方板，承受均匀载荷，由于对称，取出 1/4，用二次厚板单元进行计算。对于不同的厚度跨度比(t/a)，图中列出了 3×3 和 2×2 高斯点的计算结果。当板较厚时，两种积分方案给出的计算结果比较接近，并和薄板理论解相比较，显示出考虑横向剪切的修正效果。但当板比较薄时，3×3 积分由于引起虚假的剪切应变能，使计算位移偏小。但用 2×2 减缩积分，给出的计算结果与理论解符合得很好。

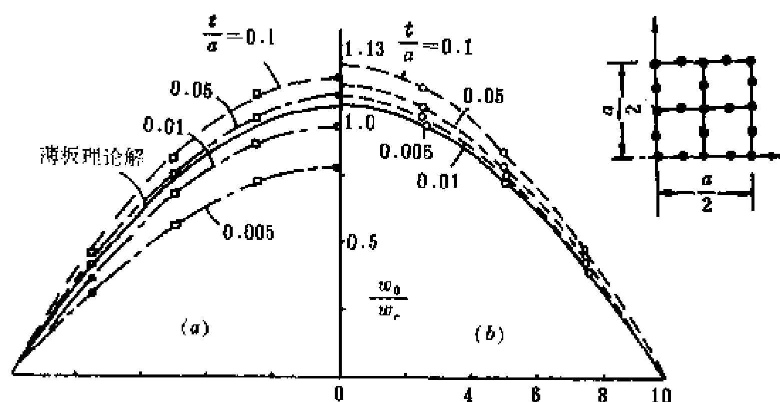


图 12.10　简支方板在均匀载荷作用下中央截面挠度
(a) 3×3 积分　(b) 2×2 积分

例 2 图 12.6 所示的圆柱壳屋顶，现用二次厚壳单元进行计算。图 12.11 列出采用不同网格划分时并分别用 3×3 积分和 2×2 积分的结果，为进行比较，图中还表示出利用扁壳理论得到的解析解。左边 3×3 积分的结果和解析解相差较大，而右边 2×2 减缩积分的结果，由于消除了虚假的剪切应变能，和解析解十分接近，甚至只用一个单元也得到较好的结果。此例不仅说明超参壳元对于弹性薄壳(此例中 $t/R=0.01$)也能给出很好的结果，而且有较高的计算效率。

从以上关于超参数壳元的讨论中可以看出，它是基于主从自由度原理从三维等参实体元蜕化而来。优点是能用于薄壳、中厚壳以及变厚度壳等一般情况，同时在建立其表达格式的过程中未涉及具体的壳体理论，从而避免了一般形状壳体的复杂的几何关系。因此它的表达格式和建立于壳体理论的单元相比要简单一些。基于以上理由，超参单元在壳体结构分析中得到比较广泛的应用。但是也应看出，它和等参单元相比仍是比较复杂，因为在其应变和应力计算中不仅涉及自然坐标和总体坐标之间的转换，还比等参元增加了总体坐标和局体坐标之间的转换，这将增加了程序的复杂性及实际计算的工作量。我们在 9.1 节关于结构有限单元的概论中曾指出，在用实体单元分析板壳结构时，为避免不同方向刚度相差过大而造成的困难，还可采用基于相对自由度原理的板壳单元。以后将这种单元称之为相对自由度板壳元，它的表达格式和超参单元相比就比较简单，下节将给予简要的介绍。

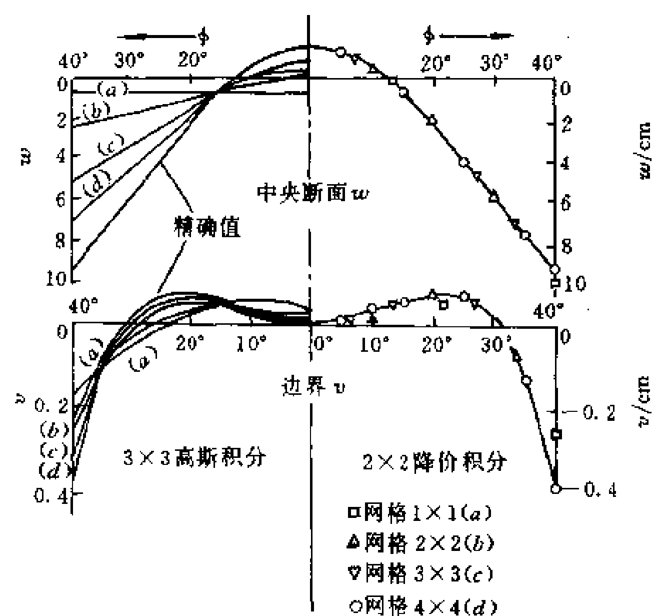


图 12.11　圆柱壳屋顶在自重作用下的位移

12.4　相对自由度壳体单元

相对自由度壳元是将相对自由度概念引入等参实体元而得到。现以图 12.12(a)所示 16 结点等参元为例,说明它的具体构造方法。

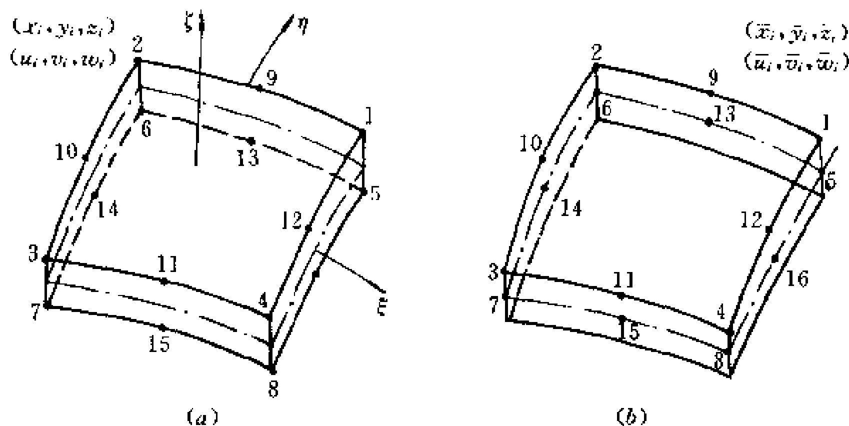


图 12.12　三维等参元和相对自由度壳元

16 结点三维等参元的坐标和位移插值表达式如下

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \qquad (12.4.1)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \tag{12.4.2}$$

对于棱边中结点

$$\left.\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i) \quad (i=9,11,13,15) \\ N_i &= \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+\zeta\zeta_i) \quad (i=10,12,14,16) \end{aligned}\right. \tag{12.4.3}$$

对于顶结点

$$N_i = N_i^* - \frac{1}{2}(N_k + N_l) \qquad (i=1,2,\cdots 8) \tag{12.4.4}$$

其中

$$N_i^* = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)$$

N_k,N_l 表示和结点 i 相邻的二个棱边中结点 k,l 相对应的插值函数。以 $i=1$ 为例

$$N_1 = N_1^* - \frac{1}{2}(N_9 + N_{12})$$

为区别于以下引出的相对自由度单元中的坐标和位移,将上面用到的坐标 x_i,y_i,z_i,位移 u_i,v_i,w_i 和插值函数 N_i 称为绝对坐标,绝对位移和绝对插值函数。

相对自由度壳元就是对绝对坐标和绝对位移进行线性组合以定义新的相对坐标 $\bar{x}_i$,$\bar{y}_i$,$\bar{z}_i$ 和相对位移 $\bar{u}_i$,$\bar{v}_i$,$\bar{w}_i$。它们之间的线性关系如下

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_i &= \frac{1}{2}(x_i - x_{i+4}) \\ \bar{x}_{i+4} &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i+4}) \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,3,4,9,10,11,12) \tag{12.4.5}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_i &= \frac{1}{2}(u_i - u_{i+4}) \\ \bar{u}_{i+4} &= \frac{1}{2}(u_i + u_{i+4}) \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,3,4,9,10,11,12) \tag{12.4.6}$$

其余坐标 $\bar{y}_i$,$\bar{z}_i$ 及位移 $\bar{v}_i$,$\bar{w}_i$ 具有类似的表达式。对以上各式略加分析,可以识别 $\bar{x}_{i+4}$,$\bar{y}_{i+4}$,$\bar{z}_{i+4}$($i=1,2,3,4,9,10,11,12$)是原等参元结点 i 和结点 $i+4$ 的连线和中面交点,即新定义的中面结点的坐标,$\bar{u}_{i+4}$,$\bar{v}_{i+4}$,$\bar{w}_{i+4}$是该点的位移;而 $\bar{x}_i$,$\bar{y}_i$,$\bar{z}_i$ 是原等参元结点 i 相对于中面结点 $\bar{x}_{i+4}$,$\bar{y}_{i+4}$,$\bar{z}_{i+4}$的距离,$\bar{u}_i$,$\bar{v}_i$,$\bar{w}_i$ 则是相应的相对位移。这样一来,三维相对自由度壳元可以表示如图 12.12(*b*)。用相对壳元的结点坐标和结点位移表示原等参元的结点坐标和结点位移,则有

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \bar{x}_i + \bar{x}_{i+4} \\ x_{i+4} &= \bar{x}_{i+4} - \bar{x}_i \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,3,4,9,10,11,12) \tag{12.4.7}$$

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + \bar{u}_{i+4} \\ u_{i+4} &= \bar{u}_{i+4} - \bar{u}_i \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,3,4,9,10,11,12) \tag{12.4.8}$$

对于 y_i,z_i 和 v_i,w_i 有类似的表达式。将以上各式代入(12.4.1)和(12.4.2)式,可以得到

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} \overline{N}_i \begin{Bmatrix} \overline{x}_i \\ \overline{y}_i \\ \overline{z}_i \end{Bmatrix} \tag{12.4.9}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} \overline{N}_i \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{w}_i \end{Bmatrix} \tag{12.4.10}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \overline{N}_i &= N_i - N_{i+4} \\ \overline{N}_{i+4} &= N_i + N_{i+4} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2,3,4,9,10,11,12)$$

以上两式是单元内坐标和位移改由相对结点坐标和相对结点位移插值的表达式。进而将它们代入应变矩阵和单元刚度矩阵表达式的算法步骤和原等参元完全相同，最后得到求解方程

$$\overline{\boldsymbol{K}}\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{P}} \tag{12.4.11}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{K}} = \sum_e \overline{\boldsymbol{K}}^e \qquad \overline{\boldsymbol{P}} = \sum_e \overline{\boldsymbol{P}}^e$$

$$\boldsymbol{k}^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \overline{\boldsymbol{B}} |\boldsymbol{J}| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^e = & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \overline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} |\boldsymbol{J}| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \\ & + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \overline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} A \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \ (\boldsymbol{T} \text{ 作用于在 } \xi = 1 \text{ 面}) \\ & + \cdots\cdots \end{aligned}$$

以上各式的意义及有关矩阵的定义可参看(4.4.1)～(4.4.7)式，这里不再重述。

从以上讨论可见，相对自由度壳元实际上仍是等参元，只是对原结点位移作了一个简单的线性变换，用相对位移代替了原来的绝对位移，以克服等参元直接应用于壳体分析时，因不同方向刚度相差过大而出现的数值困难。它不同于基于主从自由度原理的超参壳元，超参壳元是引入了壳体理论的假设，缩减了自由度（将上下表面结点对的 6 个自由度，缩减为中面结点的 5 个自由度——3 个位移和 2 个转动），因此必须进一步采用基于壳体局部坐标的广义平面应力型应力应变关系，这样也就必须增加从总体坐标到壳体局部坐标的变换。而相对自由度壳元则仍采用原来等参元中建立于总体坐标的三维应力应变关系，因此不必引入总体坐标和局部坐标之间的变换，从而使表达格式保持比较简单的形式。在文献[3]中在应用相对自由度壳元时，仍采用局部坐标内的广义平面应力型应力应变关系，当然也就同时需要引入上述坐标变换。我们认为这是不必要的。

最后应该指出，因为相对自由度壳元的本质和超参壳元相似，为避免发生“锁死”现象，超参壳元中所采用的措施同样可以用于现在情况。

关于相对自由度壳元的可应用性，还有两点可以提及。因为它的结点自由度是三维实体单元结点自由度的线性组合，未引入超参壳元中的转动自由度，因此它和三维实体单元的联结可以非常方便地实现。这点在下一节讨论了其它壳元，包括超参壳元和实体单元的联结问题以后就可以更清楚地认识到。另外也正因为它未引入转动自由度，因此更适用于

包括大转动在内的大位移的描述，这点在第 16 章讨论几何非线性问题时再进一步加以阐述。

12.5 不同类型单元的联结

现在讨论三维实体单元和一般壳体单元的联结，这是 11.5 节讨论的轴对称实体单元和壳元联结问题的推广。解决问题的方法和步骤基本上和轴对称情况相同，只是三维问题情况比较复杂一些。

12.5.1 多点约束方程

不失一般性，我们以三维等参实体元和超参壳体元为例进行讨论。图 12.13 所示是交界面两边的两个不同类型的单元，(a)是 16 结点等参实体元，(b)是 8 结点超参壳体元。单元(a)的 $\xi=1$ 面和单元(b)的 $\xi=-1$ 面相互联结。

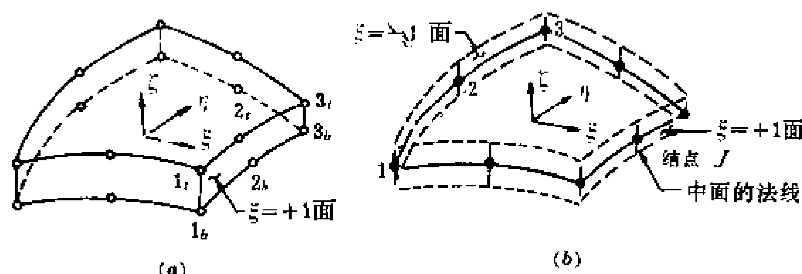


图 12.13 不同类型单元的联结

为以后叙述方便，单元$(a)\xi=1$ 面上的结点号用 $1_t,1_b,2_t,2_b,3_t,3_b$ 表示，它们的结点位移参数是 $u_i,v_i,w_i(i=1_t,1_b,\cdots,3_b)$；单元$(b)\xi=-1$ 面上的结点号用 1,2,3 表示，它们的结点位移参数是 $u_i,v_i,w_i,\alpha_i,\beta_i(i=1,2,3)$。两个单元中 u_i,v_i,w_i 都是总体坐标内的位移分量，α_i,β_i 是连接结点 i_b 和 i_t 的向量 $\boldsymbol{v}_{3i}$相绕与之相垂直的两个向量 $\boldsymbol{v}_{2i}$和 $\boldsymbol{v}_{3i}$的转动（见 12.3.2 节）。

为建立二个单元结点位移参数之间的约束方程，首先将各个结点位移参数转换到局部坐标系 $\boldsymbol{v}_{1i},\boldsymbol{v}_{2i},\boldsymbol{v}_{3i}$中。其转换关系是

$$\begin{Bmatrix} u_{i'} \\ v_{i'} \\ w_{i'} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (i=1_t,1_b,\cdots,3_b,1,2,3) \tag{12.5.1}$$

其中 u_i',v_i',w_i'是沿 $\boldsymbol{v}_{1i},\boldsymbol{v}_{2i},\boldsymbol{v}_{3i}$的位移分量。

$$\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{v}_{1i} \quad \boldsymbol{v}_{2i} \quad \boldsymbol{v}_{3i}] = \begin{bmatrix} l_{1i} & l_{2i} & l_{3i} \\ m_{1i} & m_{2i} & m_{3i} \\ n_{1i} & n_{2i} & n_{3i} \end{bmatrix} \tag{12.5.2}$$

局部坐标系内结点位移参数之间的约束方程是

$$u_{i'} = \frac{u_{it}' + u_{ib}'}{2}, \quad v_i' = \frac{v_{it}' + v_{ib}'}{2}, \quad w_i' = \frac{w_{it}' + w_{ib}'}{2}$$

$$\beta_i = \frac{v'_{ib} - v'_{it}}{t_i},\ \alpha_i = \frac{u'_{it} - u'_{ib}}{t_i} \qquad (i = 1,2,3) \tag{12.5.3}$$

上式也可表示成

$$C = \begin{Bmatrix} u'_i - \dfrac{u'_{it} + u'_{ib}}{2} \\ v'_i - \dfrac{v'_{it} + v'_{ib}}{2} \\ w'_i - \dfrac{w'_{it} + w'_{ib}}{2} \\ \beta_i - \dfrac{v'_{ib} - v'_{it}}{t_i} \\ \alpha_i - \dfrac{u'_{it} - u'_{ib}}{t_i} \end{Bmatrix} = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{12.5.4}$$

将上列约束方程引入计算程序的方法和轴对称情况相同，即可利用罚函数法或直接引入法（见 11.5.1 节），这里不再重复。

如果在交界面上，和壳体单元的结点 i 相对应，在实体单元上有三个结点 i_t, i_m, i_b，它们分别布置在顶面、中面和底面上，如图 12.13 所示。这时为避免引入法向应变为零的过分约束，约束方程的正确表示应为

$$C = \begin{Bmatrix} u'_i - u'_{im} \\ v'_i - v'_{im} \\ w'_i - w'_{im} \\ u'_{im} - \dfrac{u'_{it} + u'_{ib}}{2} \\ v'_{im} - \dfrac{v'_{it} + v'_{ib}}{2} \\ \beta_i - \dfrac{v'_{ib} - v'_{it}}{t_i} \\ \alpha_i - \dfrac{u'_{it} - u'_{ib}}{t_i} \end{Bmatrix} = 0 \tag{12.5.5}$$

依此类推可以列出和壳体单元每个结点相对应、实体单元有更多结点情况的约束方程。

上述约束方程是针对等参实体元和超参厚壳元的联结列出的。其原则和方法是一般的，即可用于其他形式实体单元和壳体单元的联结。

12.5.2 过渡单元

构造三维过渡单元的原则和方法和轴对称的情况相同（见 11.5.2 节），图 12.14 所示就是三维过渡单元的一些可能形式。由等参实体元和超参壳体元结合而成的过渡元，其坐标和位移的插值表示如下

$$\begin{Bmatrix} v \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\xi,\eta,\zeta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=m+1}^{n} N_i(\xi,\eta) \left[\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \frac{\zeta}{2} V_{3i} \right] \tag{12.5.6}$$

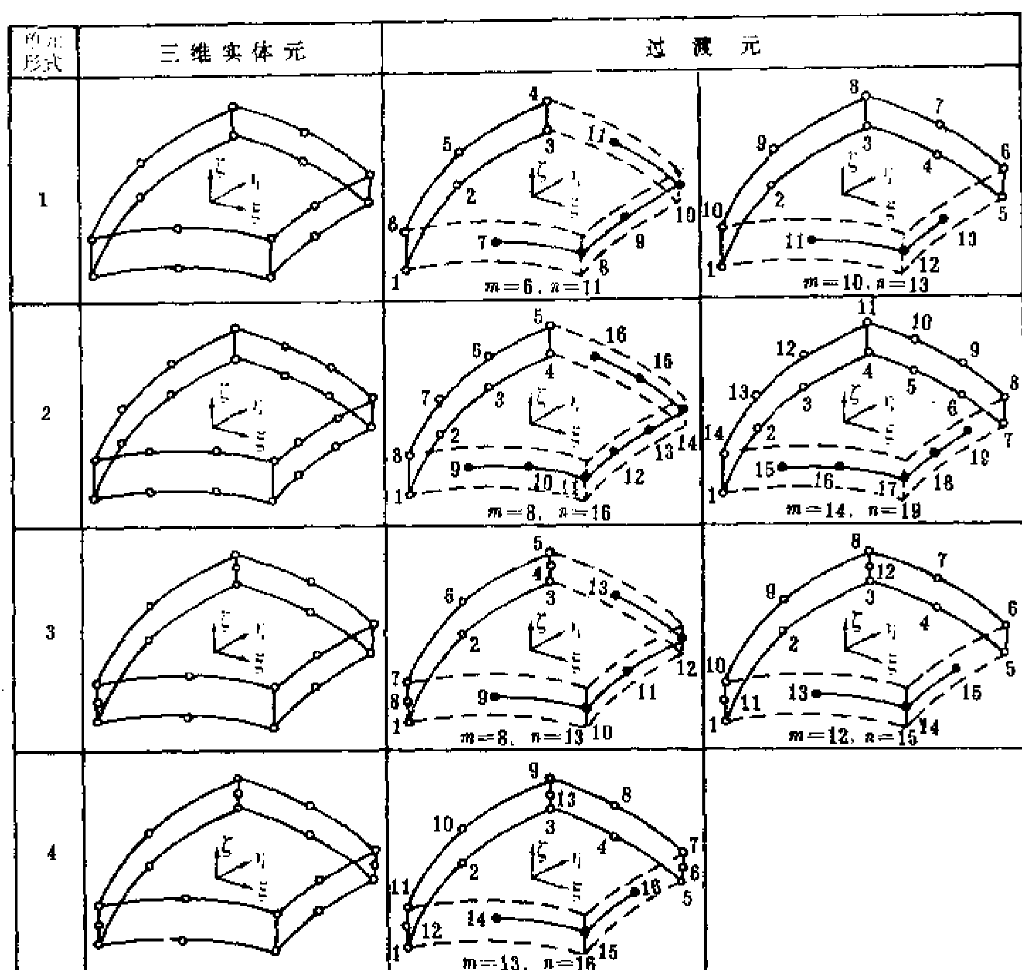


图 12.14 三维过渡元的一些可能形式

$$
\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\xi,\eta,\zeta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=m+1}^{n} N_i(\xi,\eta) \left(\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \frac{\zeta t_i}{2} \begin{bmatrix} l_{1i} & -l_{2i} \\ m_{1i} & -m_{2i} \\ n_{1i} & -n_{2i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \right) \tag{12.5.7}
$$

其中 m 是过渡单元中和实体单元相关的结点数，$n-m$ 是和壳体单元相关的结点数，n 是过渡单元的结点总数。

关于形成过渡单元刚度矩阵时如何确定积分点的应力和应变的问题，正如在 11.5.2 节中所指出的，尚需进一步研究。在以下引自 Surana 文章（见 11.[3]）的算例中，他仍采用 $\nu=0$。

图 12.15(a)所示是悬臂梁，尺寸和载荷均列于图上，材料弹性常数 $E=3\times10^5$MPa。采用三种有限元模型进行计算，模型 A,B,C 的单元型式及划分分别如图(b)，(c)，(d)所示。图 12.16 至图 12.19 分别表示此算例的结果。其中图 12.16 表示挠度 w 沿板长度的变化，图 12.17 表示挠度 w 在 $x=2$cm 到 $x=2.25$cm 区域内的快速变化。图 12.18 和图 12.19 分别表示出 $x=2$cm 和 $x=1.75$cm 截面上位移 u 沿高度的变化。在 $x=2$cm 截面

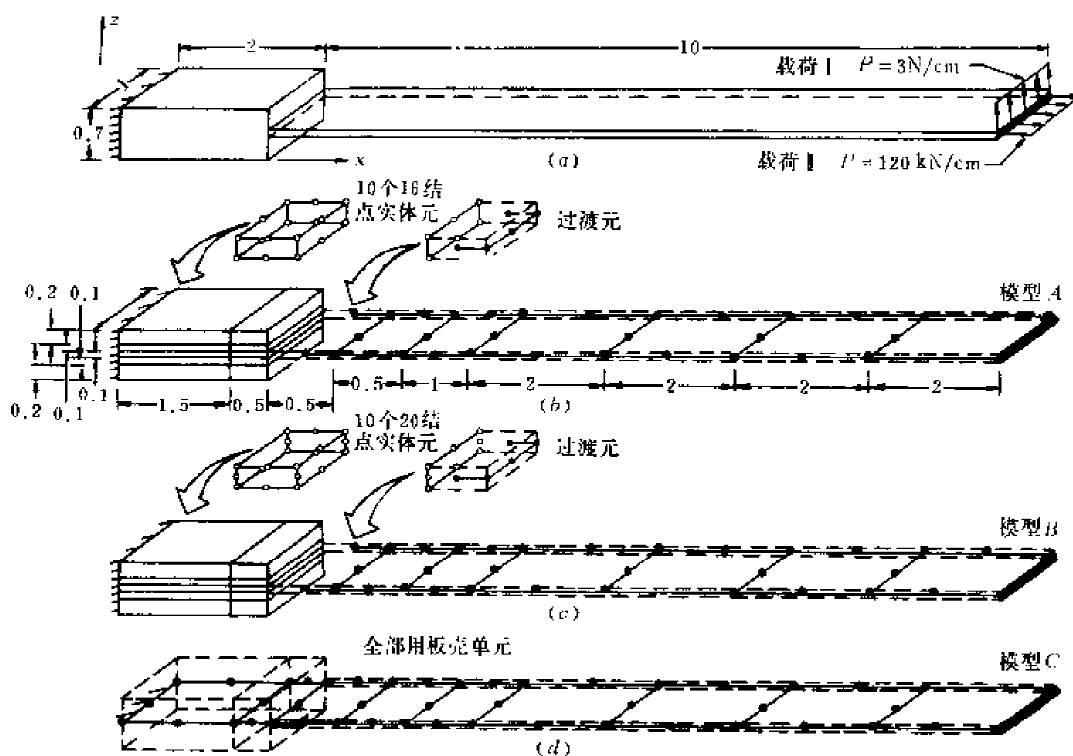


图 12.15 悬臂梁及有限元模型

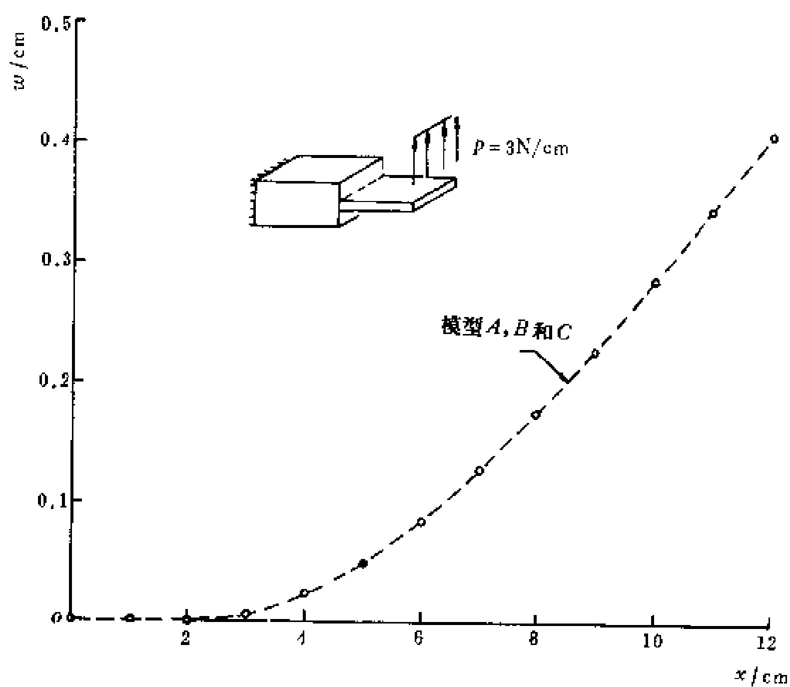


图 12.16 挠度 w 沿板长的变化

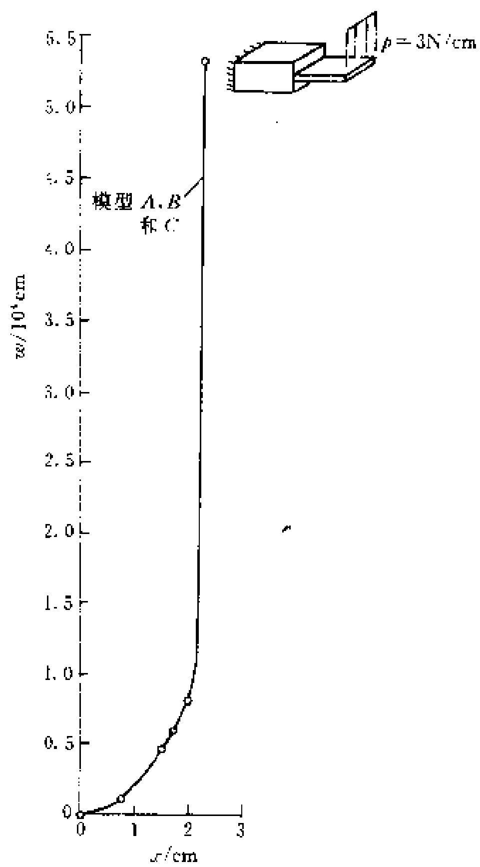


图 12.17　挠度 w 沿板长的变化

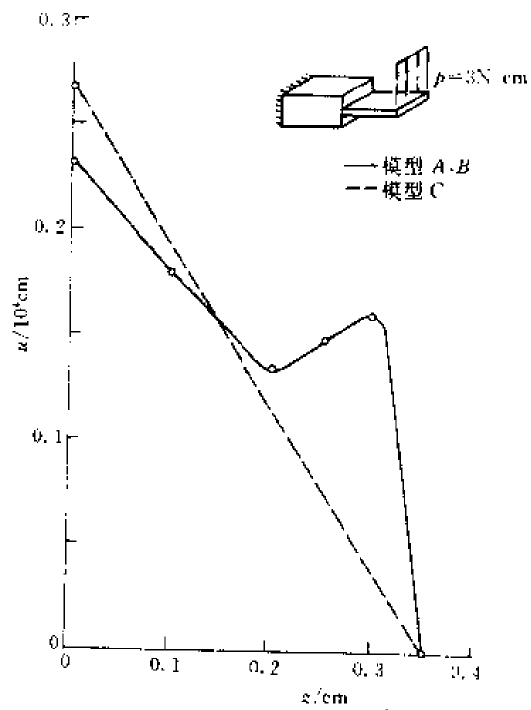


图 12.18　位移 u 沿截面高度的变化

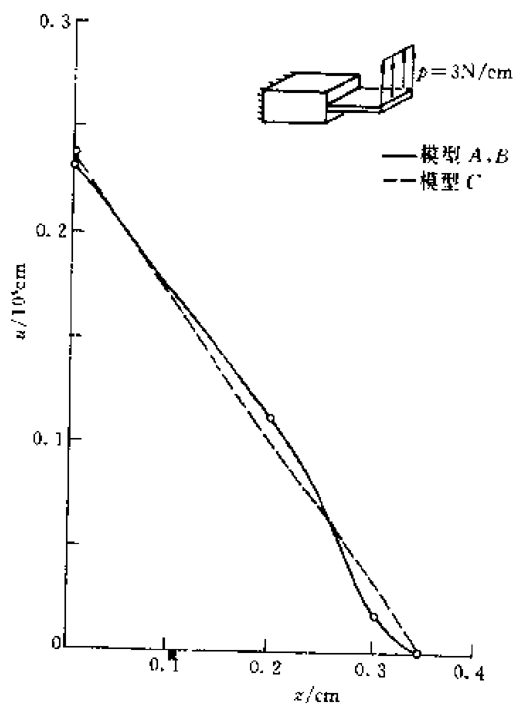


图 12.19　位移 u 沿截面高度的变化

处，模型 A,B 和模型 C 的结果相差很多，这是由于模型 A,B 在梁左端较厚处采用了实体单元，能够较好地反映出截面上位移 u 沿高度的变化；而模型 C 全部采用板壳单元，不能反映出截面突变的影响。但是此影响是局部性的，在 $x=1.75\text{cm}$ 截面上已大大削弱。

12.6 小　结

关于一般形状的壳体单元，本章讨论了两种有代表性的单元，即平板壳元和三维蜕化壳元。

平板壳元是平面应力单元和平板弯曲单元的组合。重要的问题是平板弯曲单元的选择和单元集成时第 6 个自由度（即绕法线转动自由度）的处理。

蜕化壳元中的超参壳元是三维实体单元中引入壳体理论假设，将壳体上、下表面上一对结点的 6 个自由度蜕化为壳体中面上结点的 5 个自由度。在建立蜕化壳元表达格式过程中，要注意几种不同坐标系的各自作用及其相互转换关系。同时应注意到由于刚度矩阵不同组成部分具有不同的数量级关系，在应用于薄壳情况时可能导致“剪切锁死”和“薄膜锁死”。平板一章有关产生“剪切锁死”原因和避免方法的讨论原则上可以推广用于现在的情况。由于壳体几何特性的复杂性和新增加的“薄膜锁死”的可能性，详细的进一步的讨论，建议参考有关文献。

相对自由度壳元原则上仍是三维单元，只是引入相对自由度概念以避免三维单元用于壳体结构由于不同方向刚度过于悬殊而带来的数值上的困难。其表达格式的形式比超参壳元简单，特别是用于大变形情况更为明显，所以也是一种有实用意义的单元形式。

12.5 节所讨论的不同类型单元的联结只限于壳体单元在其横向截面和实体单元的联结，二者自由度之间的约束方程及其引入方程的方法是前一章轴对称壳元和轴对称体元相联结的推广。实际结构中常常遇到的另一种情况是壳体的上或（和）下表面上有肋条（可用空间杆单元离散）加强，情况将比 12.5 节所讨论的联结形式要复杂。原则上仍应首先建立两种单元自由度之间的约束方程，以保持二者位移的协调而不引入过多的不必要约束。读者可作为练习加以思考。

习　题

12.1　导出 4 结点 Mindlin 板单元和平面应力单元组成的平板壳元的刚度矩阵和载荷向量，并比较它和以薄板单元与平面应力单元组成的平板壳元的各自特点。

12.2　推导出超参单元的应变矩阵 B_i'（12.3.22）式的具体表达式。

12.3　推导出超参单元的单元载荷向量。

12.4　如果将超参单元用于平板分析，表达格式如何简化？可否证明它和 Mindlin 板单元是等价的。

12.5　在建立超参壳元表达格式的过程中，隐含着对 V_{3i} 及它的转动 α_i 和 β_i 什么限制，在实际应用中如果不满足这些限制会带来什么问题，有何改进的方法？

12.6　超参单元一般情况下不满足收敛准则，能否证明本章讨论的超参单元是满足

收敛准则的，即是包含刚体运动和常应变的位移模式的。

12.7 如何实现相对自由度壳元和实体单元的联结，导出相关的表达式。

参考文献

1 Nukulchai W K. A Simple and Efficient Finite Element for General Shell Analysis. Int. J. Num. Meth. Engng., 1979, 14, 179～200

2 Jang J and Pinsky P M. An Assumed Covariant Strain Based 9-Node Shell Element. Int. J. for Num. Meth. in Enging., 1987, 24, 2389～2411

3 Kanok-Nukulchal W, Taylor R L and Hughes T J R. A Large Deformation Formulation for Shell Analysis by the Finite Element Method, Computers & Structures, 1981, 13, 19～30

第 13 章　热传导问题的有限单元法

13.1 引　　言

在石油化工、动力、核能等许多重要部门中，在变温条件下工作的结构和部件，通常都存在温度应力问题。在正常工况下存在稳态的温度应力，在启动或关闭过程中还会产生随时间变化的瞬态温度应力。这些温度应力经常占有相当的比重，甚至成为设计和运行中的控制应力。要计算稳态温度应力和瞬态温度应力首先要确定稳态的或瞬态的温度场。

由于结构的形状以及变温条件的复杂性，依靠传统的解析方法要精确地确定温度场往往是不可能的，有限单元法却是解决上述问题的方便而有效的工具。在进入热传导问题有限单元法的具体讨论以前，首先将热传导问题的基本方程作一扼要的介绍。

在一般三维问题中，瞬态温度场的场变量 $\phi(x,y,z,t)$ 在直角坐标中应满足的微分方程是

$$\rho c\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\rho Q=0\quad(\text{在}\ \Omega\ \text{内})\tag{13.1.1}$$

边界条件是

$$\phi=\bar{\phi}\qquad(\text{在}\ \Gamma_1\ \text{边界上})\tag{13.1.2}$$

$$k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z=q\qquad(\text{在}\ \Gamma_2\ \text{边界上})\tag{13.1.3}$$

$$k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z=h(\phi_a-\phi)\qquad(\text{在}\ \Gamma_3\ \text{边界上})\tag{13.1.4}$$

式中　ρ　材料密度(kg/m^3)

c　材料比热(J/(kg·K))

t　时间(s)；

k_x,k_y,k_z　分别是材料沿 x,y,z 方向的热传导系数(W/(m·K))；

$Q=Q(x,y,z,t)$　物体内部的热源密度(W/kg)；

n_x,n_y,n_z　是边界外法线的方向余弦；

$\bar{\phi}=\bar{\phi}(\Gamma,t)$　是 Γ_1 边界上的给定温度；

$q=q(\Gamma,t)$　是 Γ_2 边界上的给定热流量(W/m^2)；

h 放热系数　(W/m^2·K)。

$\phi_a=\phi_a(\Gamma,t)$　在自然对流条件下，ϕ_a 是外界环境温度；在强迫对流条件下，ϕ_a 是边界层的绝热壁温度。

边界应满足

$$\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3=\Gamma$$

其中 Γ 是 Ω 域的全部边界。

微分方程(13.1.1)是热量平衡方程。式中第一项是微体升温需要的热量;第2,3,4项是由 x,y 和 z 方向传入微体的热量;最后一项是微体内热源产生的热量。微分方程表明:微体升温所需的热量应与传入微体的热量以及微体内热源产生的热量相平衡。

(13.1.2)式是在 Γ_1 边界上给定温度 $\bar{\phi}(\Gamma,t)$,称为第一类边界条件,它是强制边界条件。(13.1.3)式是在 Γ_2 边界上给定热流量 $q(\Gamma,t)$,称为第二类边界条件,当 $q=0$ 时就是绝热边界条件。(11.1.4)式是在 Γ_3 边界上给定对流换热的条件,称为第三类边界条件。第二、三类边界条件是自然边界条件。

当在一个方向上,例如 z 方向温度变化为零时,方程(13.1.1)就退化为二维问题的热传导微分方程:

$$\rho c\frac{\partial \phi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)-\rho Q=0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{13.1.5}$$

这时场变量 $\phi(x,y,t)$ 不再是 z 的函数。场变量同时应满足的边界条件是

$$\phi=\bar{\phi}(\Gamma,t) \qquad (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 边界上}) \tag{13.1.6}$$

$$k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}n_y=q(\Gamma,t) \qquad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 边界上}) \tag{13.1.7}$$

$$k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}n_y=h(\phi_a-\phi) \quad (\text{在 } \Gamma_3 \text{ 边界上}) \tag{13.1.8}$$

对于轴对称问题,在柱坐标中场函数 $\phi(r,z,t)$ 应满足的微分方程是

$$\rho cr\frac{\partial \phi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z r\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)-\rho rQ=0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{13.1.9}$$

边界条件是

$$\left.\begin{aligned}
&\phi=\bar{\phi}(\Gamma,t) && (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 边界上})\\
&k_r\frac{\partial \phi}{\partial r}n_r+k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}n_z=q(\Gamma,t) && (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 边界上})\\
&k_r\frac{\partial \phi}{\partial r}n_r+k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}n_z=h(\phi_a-\phi) && (\text{在 } \Gamma_3 \text{ 边界上})
\end{aligned}\right\} \tag{13.1.10}$$

在(13.1.5)~(13.1.10)式中,各项符号意义与(13.1.1)~(13.1.4)式中的类同。

求解瞬态温度场问题是求解在初始条件下,即在

$$\phi=\phi_0 \quad (\text{当 } t=0) \tag{13.1.11}$$

条件下满足瞬态热传导方程及边界条件的场函数 ϕ,ϕ 应是坐标和时间的函数。

如果边界上的 $\bar{\phi},q,\phi_a$ 及内部的 Q 不随时间变化,则经过一定时间的热交换后,物体内各点温度也将不再随时间而变化,即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=0 \tag{13.1.12}$$

这时瞬态热传导方程就退化为稳态热传导方程了。由(13.1.1)式,考虑(13.1.12)式的情况,得到三维问题的稳态热传导方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+\rho Q=0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{13.1.13}$$

由(13.1.5)式可得二维问题的稳态热传导方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\rho Q=0 \quad (\text{在 }\Omega\text{ 内}) \tag{13.1.14}$$

由(11.3.9)式则可得到轴对称问题的稳态热传导方程

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\rho r Q=0 \quad (\text{在 }\Omega\text{ 内}) \tag{13.1.15}$$

求解稳态温度场的问题就是求满足稳态热传导方程及边界条件的场变量 ϕ,ϕ 只是坐标的函数,与时间无关。

利用加权余量的伽辽金法可以得到以上微分方程和边界条件的等效积分提法。

稳态热传导问题,即稳态温度场问题与时间无关。和以前各章所讨论的弹性静力学问题相同,采用 C_0 型插值函数的有限单元进行离散以后,可以直接得到有限元求解方程。前面弹性力学问题中所采用的单元和相应的插值函数在此都可以使用。主要的不同在于场变量。在弹性力学问题中,场变量是位移,是向量场。在热传导问题,场变量是温度,是标量场。因此稳态温度场问题比弹性静力学问题要相对简单一些。在本章中不准备对它进行更多的讨论。

瞬态热传导问题,即瞬态温度场问题是依赖于时间的。在空间域有限元离散后,得到的是一阶常微分方程组,不能对它直接求解。如何进行求解,原则上和下一章将讨论的动力学问题类同,可以采用模态叠加法或直接积分法。但从实际应用考虑,更多的是采用后者。本章将着重讨论求解瞬态热传导问题的直接积分方法,包括它的算法步骤和解的稳定性问题,并将介绍一种在实际分析中很有意义的、自动选择时间步长的方法。在讨论时间步长选择方法时也涉及到模态叠加法的基本概念。本章最后将讨论在求解得到温度场以后,如何求解结构内的热应力。对此除基本格式而外,还将简要介绍一些实际分析中应考虑的问题。

13.2 稳态热传导问题

13.2.1 稳态热传导有限元的一般格式

现以二维问题为例,说明用伽辽金法建立稳态热传导问题有限元格式的过程。构造近似场函数 $\tilde{\phi}$,并设 $\tilde{\phi}$ 已满足 Γ_1 边界上的强制边界条件(13.1.6)式。将近似函数代入场方程(13.1.14)式及边界条件(13.1.7)式和(13.1.8)式。因 $\tilde{\phi}$ 的近似性,将产生余量,即有

$$\left.\begin{aligned}
R_\Omega &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}\right)+\rho Q \\
R_{\Gamma_2} &= k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}n_y-q \\
R_{\Gamma_3} &= k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}n_y-h(\phi_a-\tilde{\phi})
\end{aligned}\right\} \tag{13.2.1}$$

用加权余量法建立有限元格式的基本思想是使余量的加权积分为零,即

$$\int_\Omega R_\Omega w_1\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_2}R_{\Gamma_2}w_2\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_3}R_{\Gamma_3}w_3\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{13.2.2}$$

式中 w_1, w_2, w_3 是权函数。上式的意义是使微分方程(13.1.14)和自然边界条件(13.1.7)式及(13.1.8)式在全域及边界上得到加权意义上的满足。

将(13.2.1)式代入(13.2.2)式并进行分部积分(参见 1.2.2 节中等效积分"弱"形式部分的(1.2.11)～(1.2.12)式)可以得到

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega}\left[\frac{\partial w_1}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right)+\frac{\partial w_1}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}\right)-\rho Q w_1\right]\mathrm{d}\Omega \\
&+\oint_{\Gamma} w_1\left(k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}n_y\right)\mathrm{d}\Gamma \\
&+\int_{\Gamma_2}\left(k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}n_y-q\right)w_2\mathrm{d}\Gamma \\
&+\int_{\Gamma_3}\left(k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}n_y-h(\phi_a-\tilde{\phi})\right)w_3\mathrm{d}\Gamma=0
\end{aligned}
\tag{13.2.3}
$$

将空间域 Ω 离散为有限个单元体，在典型单元内各点的温度ϕ可以近似地用单元的结点温度ϕ_i 插值得到

$$
\phi=\tilde{\phi}=\sum_{i=1}^{n_e}N_i(x,y)\,\phi_i=\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{\phi}^e \tag{13.2.4}
$$

$$
\boldsymbol{N}=[N_1\quad N_2\quad\cdots\quad N_{n_e}] \tag{13.2.5}
$$

式中 n_e 是每个单元的结点个数；$N_i(x,y)$是插值函数，它是 C_0 型插值函数，它亦具有下述性质

$$
N_i(x_j,y_j)=\begin{cases}0, & (\text{当 } j\neq i)\\ 1, & (\text{当 } j=i)\end{cases} \tag{13.2.6}
$$

及

$$
\sum N_i=1
$$

由于近似场函数是构造在单元中的，因此(13.2.3)式的积分可改写为对单元积分的总和。

用伽辽金法选择权函数

$$
w_1=N_j\qquad (j=1,2,\cdots,n_e) \tag{13.2.7}
$$

其中 n_e 是 Ω 域全部离散得到的结点总数。在边界上不失一般性地选择

$$
w_2=w_3=-w_1=-N_j\qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{13.2.8}
$$

因$\tilde{\phi}$已满足强制边界条件(在解方程前引入强制边界条件修正方程)，因此在 Γ_1 边界上不再产生余量，可令 w_1 在 Γ_1 边界上为零。

将以上各式代入(13.2.3)式则可以得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_e\int_{\Omega^e}\left[\frac{\partial N_j}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial x}\right)+\frac{\partial N_j}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{\phi}^e\mathrm{d}\Omega \\
&-\sum_e\int_{\Omega^e}\rho Q N_j\mathrm{d}\Omega-\sum_e\int_{\Gamma_2^e}N_j q\mathrm{d}\Gamma \\
&-\sum_e\int_{\Gamma_3^e}N_j h\,\phi_a\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_3^e}N_j h\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{\phi}^e\mathrm{d}\Gamma=0 \\
&(j=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}
\tag{13.2.9}
$$

写成矩阵形式则有

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^{\mathrm{T}} k_x \frac{\partial N}{\partial x} + \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^{\mathrm{T}} k_y \frac{\partial N}{\partial y} \right] \phi^e \mathrm{d}\Omega$$

$$+ \sum_e \int_{\Gamma_3^e} h N^{\mathrm{T}} N \, \phi^e \mathrm{d}\Gamma - \sum_e \int_{\Gamma_2^e} N^{\mathrm{T}} q \mathrm{d}\Gamma$$

$$- \sum_e \int_{\Gamma_3^e} N^{\mathrm{T}} h \, \phi_a \mathrm{d}\Gamma - \sum_e \int_{\Omega^e} N^{\mathrm{T}} \rho Q \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (13.2.10)$$

(13.2.10)式是 n 个联立的线性代数方程组，用以确定 n 个结点温度 ϕ_i。按照一般有限元格式(13.2.10)式可表示为

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{P} \qquad (13.2.11)$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 称为热传导矩阵；$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n]^{\mathrm{T}}$ 是结点温度列阵；$\boldsymbol{P}$ 是温度载荷列阵。矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的元素分别表示如下

$$K_{ij} = \sum_e \int_{\Omega^e} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega + \sum_e \int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j \mathrm{d}\Gamma \qquad (13.2.12)$$

$$P_i = \sum_e \int_{\Gamma_2^e} N_i q \mathrm{d}\Gamma + \sum_e \int_{\Gamma_3^e} N_i h \, \phi_a \mathrm{d}\Gamma + \sum_e \int_{\Omega^e} N_i \rho Q \mathrm{d}\Omega \qquad (13.2.13)$$

(13.2.12)式中的第一项是各单元对热传导矩阵的贡献，第二项是第三类热交换边界条件对热传导矩阵的修正。(13.2.13)式中的三项分别为给定热流、热交换以及热源引起的温度载荷。可以看出热传导矩阵和温度载荷列阵都是由单元相应的矩阵集合而成。可将(13.2.12)及(13.2.13)式改写成单元集成的形式

$$K_{ij} = \sum_e K_{ij}^e + \sum_e H_{ij}^e \qquad (13.2.14)$$

$$P_i = \sum_e P_{q_i}^e + \sum_e P_{H_i}^e + \sum_e P_{Q_i}^e \qquad (13.2.15)$$

式中

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega \qquad (13.2.16)$$

$$H_{ij}^e = \int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j \mathrm{d}\Gamma \qquad (13.2.17)$$

$$P_{qi}^e = \int_{\Gamma_2^e} N_i q \mathrm{d}\Gamma \qquad (13.2.18)$$

$$P_{Hi}^e = \int_{\Gamma_3^e} N_i h \, \phi_a \mathrm{d}\Gamma \qquad (13.2.19)$$

$$P_{Qi}^e = \int_{\Omega^e} N_i \rho Q \mathrm{d}\Gamma \qquad (13.2.20)$$

以上就是二维稳定热传导问题有限元的一般格式。稳态热传导问题也存在变分的泛函，由变分法建立的有限元方程与用伽辽金法建立的有限元方程是一致的，读者可以作为练习加以验证。

如前所述，热传导问题属于 C_0 型问题，并由于温度场是标量场，有限元格式相对比较简单，所以上列表达格式对应于不同单元的具体形式就不一一列举，这里仅将具有显式表达式的平面三角形单元加以具体化。

13.2.2 平面3结点三角形单元

我们现在讨论最简单而又十分有用的3结点三角形单元稳态热传导问题的有限元格式。

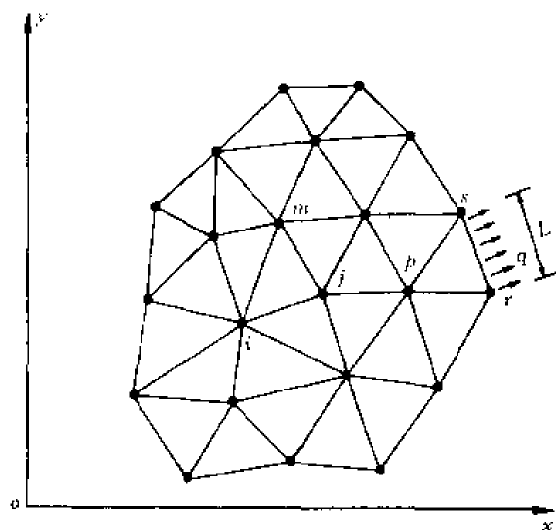


图13.1 二维域划分为三角形单元

根据2.2.1节第(2.2.8)式，插值函数是

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (i,j,m)$$

对于任一单元 ijm，可将插值函数求导代入(13.2.16)式得到热传导矩阵元素

$$K_{ij}^e = \frac{k_x}{4A} b_i b_j + \frac{k_y}{4A} c_i c_j \tag{13.2.21}$$

单元热传导矩阵是

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{k_x}{4A}\begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ \text{对} & b_j b_j & b_j b_m \\ & \text{称} & b_m b_m \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4A}\begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ \text{对} & c_j c_j & c_j c_m \\ & \text{称} & c_m c_m \end{bmatrix} \tag{13.2.22}$$

对于具有第三类边界条件的边界单元，如 rsp 单元，除按(13.2.22)式计算单元热传导矩阵外，还应计算由于第三类边界条件引起的对热传导矩阵的修正。修正项可将插值函数代入(13.2.17)式得到

$$\left.\begin{aligned} H_{sr}^e = H_{rs}^e = \int_l h N_r N_s \mathrm{d}l = \frac{1}{6} hL \\ H_{rr}^e = H_{ss}^e = \int_l h N_s^2 \mathrm{d}l = \frac{1}{3} hL \end{aligned}\right\} \tag{13.2.23}$$

式中 L 是对流边界 rs 的边长。若单元中只有 rs 边为对流换热边界，则对单元热传导矩阵的修正是

$$H^e = \frac{1}{6}hL\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{13.2.24}$$

单元结点编码顺序是 r,s,p。

单元的温度载荷可由(13.2.18)～(13.2.20)式求得。当热源密度 Q 以及给定热流 q 都是常量时

$$\begin{aligned}
&P_{Q_i}^e = \frac{1}{3}\rho QA \quad (i,j,m)\\
&P_{H_i}^e = \frac{1}{2}h\,\phi_a L \quad (i = r,s) \quad (\text{当 } \Gamma_3 \text{ 为 } r\text{-}s \text{ 边时})\\
&P_{q_i}^e = \frac{1}{2}qL \qquad (i=r,s) \quad (\text{当 } \Gamma_2 \text{ 为 } r\text{-}s \text{ 边时})
\end{aligned} \tag{13.2.25}$$

至于轴对称 3 结点环状单元稳态热传导的有限元格式，读者可根据(13.1.15)及(13.1.10)式按照柱坐标推导作为练习。

13.3 瞬态热传导问题

13.3.1 瞬态热传导有限元的一般格式

瞬态温度场与稳态温度场主要的差别是瞬态温度场的场函数温度不仅是空间域 Ω 的函数，而且还是时间域 t 的函数。但是时间和空间两种域并不耦合，因此建立有限元格式时可以采用部分离散的方法。

我们仍以二维问题为例来建立瞬态温度场有限元的一般格式。首先将空间域 Ω 离散为有限个单元体，在典型单元内温度 ϕ 仍可以近似地用结点温度 ϕ_i 插值得到，但要注意此时结点温度是时间的函数：

$$\phi = \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(x,y)\,\phi_i(t) \tag{13.3.1}$$

插值函数 N_i 只是空间域的函数，它与以前讨论过的问题一样，也应具有插值函数的基本性质。构造 $\tilde{\phi}$ 时已满足 Γ_1 上的边界条件，因此(13.3.1)式代入场方程(13.1.5)和边界条件(13.1.7)，(13.1.8)式时将产生余量

$$R_\Omega = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}\right) + \rho Q - \rho c\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} \tag{13.3.2}$$

$$R_{\Gamma_2} = k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}n_x + k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}n_y - q \tag{13.3.3}$$

$$R_{\Gamma_3} = k_x\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}n_x + k_y\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}n_y - h(\phi_a - \tilde{\phi}) \tag{13.3.4}$$

令余量的加权积分为零，即

$$\int_\Omega R_\Omega w_1\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_2} R_{\Gamma_2}w_2\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_3} R_{\Gamma_3}w_3\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{13.3.5}$$

按伽辽金法选择权函数

$$w_1 = N_j \qquad (j = 1,2,\cdots,n_e)$$
$$w_2 = w_3 = -w_1 \tag{13.3.6}$$

代入(13.3.5)式，与稳态温度场建立有限元格式的过程类同，经分部积分后可以得到用以确定 n 个结点温度 ϕ_i 的矩阵方程

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{P} \tag{13.3.7}$$

这是一组以时间 t 为独立变量的线性常微分方程组。式中 $\boldsymbol{C}$ 是热容矩阵，$\boldsymbol{K}$ 是热传导矩阵，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 都是对称正定矩阵。$\boldsymbol{P}$ 是温度载荷列阵，$\boldsymbol{\phi}$ 是结点温度列阵，$\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 是结点温度对时间的导数列阵，$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathrm{d}\boldsymbol{\phi}/\mathrm{d}t$。矩阵 $\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的元素由单元相应的矩阵元素集成：

$$\left.\begin{aligned} K_{ij} &= \sum_e K_{ij}^e + \sum_e H_{ij}^e \\ C_{ij} &= \sum_e C_{ij}^e \\ P_i &= \sum_e P_{Q_i}^e + \sum_e P_{q_i}^e + \sum_e P_{H_i}^e \end{aligned}\right\} \tag{13.3.8}$$

单元的矩阵元素由下列各式给出

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e}\left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{13.3.9}$$

是单元对热传导矩阵的贡献；

$$H_{ij}^e = \int_{\Gamma_3^e} h N_i N_j \mathrm{d}\Gamma \tag{13.3.10}$$

是单元热交换边界对热传导矩阵的修正；

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \rho c N_i N_j \mathrm{d}\Omega \tag{13.3.11}$$

是单元对热容矩阵的贡献；

$$P_{Q_i}^e = \int_{\Omega^e} \rho Q N_i \mathrm{d}\Omega \tag{13.3.12}$$

是单元热源产生的温度载荷；

$$P_{q_i}^e = \int_{\Gamma_2^e} q N_i \mathrm{d}\Gamma \tag{13.3.13}$$

是单元给定热流边界的温度载荷；

$$P_{H_i}^e = \int_{\Gamma_3^e} h\,\phi_a N_i \mathrm{d}\Gamma \tag{13.3.14}$$

是单元对流换热边界的温度载荷。

至此，已将时间域和空间域的偏微分方程问题在空间域内离散为 n 个结点温度 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 的常微分方程的初值问题。对于给定温度值的边界 Γ_1 上的 n_1 个结点，方程组(13.3.7)中相应的式子应引入以下条件

$$\phi_i = \bar{\phi}_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n_1) \tag{13.3.15}$$

式中 i 是 Γ_1 上 n_1 个结点的编号。

13.3.2 一阶常微分方程组的数值积分

对常微分方程组采用数值积分方法求解的基本概念是将时间域离散化，用在离散的时间点上满足方程组代替在时间域上处处满足方程组。对于只有一阶导数的常微分方程组如(13.3.7)式，时间域的离散可以采用简单的两点循环公式。

1. 用加权余量法建立两点循环公式

经空间离散以后，得到的是常微分方程组(13.3.7)，其未知量即结点温度向量$\boldsymbol{\phi}$是时间的函数。为求解，和以前讨论的空间离散方法类同，进一步对时间域进行离散，即将时间也分成若干单元，$\boldsymbol{\phi}(t)$在每一个时间单元内可以表示成

$$\boldsymbol{\phi}(t) \approx \tilde{\boldsymbol{\phi}}(t) = \sum N_i(t)\boldsymbol{\phi}_i \tag{13.3.16}$$

这里$\boldsymbol{\phi}_i$是在时刻i时的$\boldsymbol{\phi}(t)$的一组结点值。插值函数$N_i(t)$对于向量$\boldsymbol{\phi}$中每个分量都取相同形式的函数，因此，$N_i(t)$是一个标量函数。

当常微分方程组中只包含对时间的一阶导数时，对插值函数N_i的最低要求是N_i至少是一次多项式，单元至少有二个结点。

取一个典型的时间单元长度Δt，单元内$\boldsymbol{\phi}$由结点值$\boldsymbol{\phi}_n$及$\boldsymbol{\phi}_{n+1}$插值得到

$$\boldsymbol{\phi} = N_n\boldsymbol{\phi}_n + N_{n+1}\boldsymbol{\phi}_{n+1} \tag{13.3.17}$$

$\boldsymbol{\phi}$的一阶导数可表示成

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \dot{N}_n\boldsymbol{\phi}_n + \dot{N}_{n+1}\boldsymbol{\phi}_{n+1} \tag{13.3.18}$$

插值函数表示在图13.2中。插值函数及其一阶导数可以用局部变量ξ给出

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{t}{\Delta t} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1) \\ &N_n = 1 - \xi,\ \dot{N}_n = -\frac{1}{\Delta t} \\ &N_{n+1} = \xi,\ \dot{N}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \tag{13.3.19}$$

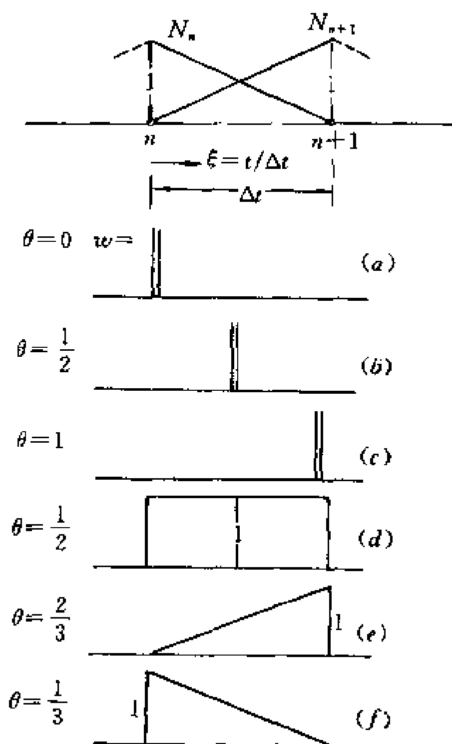


图13.2 两点循环公式的插值函数及权函数

由于采用(13.3.17)式的近似插值，在单元中方程(13.3.7)必然产生余量。对于一个单元建立典型的加权余量格式

$$\int_0^1 w[\boldsymbol{C}(\dot{N}_n\boldsymbol{\phi}_n + \dot{N}_{n+1}\boldsymbol{\phi}_{n+1}) + \boldsymbol{K}(N_n\boldsymbol{\phi}_n + N_{n+1}\boldsymbol{\phi}_{n+1}) - \boldsymbol{P}]\mathrm{d}\xi = 0 \tag{13.3.20}$$

当求解的是个初值问题时，一组参量$\boldsymbol{\phi}_n$假定为已知，利用方程(13.3.20)就可以用来近似确定另一组参数$\boldsymbol{\phi}_{n+1}$。将(13.3.19)式代入(13.3.20)式就可以得到时间单元前后结点上两组参量的关系式

$$\left(K\int_0^1 w\xi \mathrm{d}\xi + C\int_0^1 w\frac{\mathrm{d}\xi}{\Delta t}\right)\phi_{n+1} + \left(K\int_0^1 w(1-\xi)\mathrm{d}\xi - C\int_0^1 w\frac{\mathrm{d}\xi}{\Delta t}\right)\phi_n - \int_0^1 wP\mathrm{d}\xi = 0 \tag{13.3.21}$$

式中可以代入不同的权函数。在以上讨论中假定热传导矩阵 K 和热容矩阵 C 不随时间 t 而变化。

(13.3.21)式可以表达为任何权函数都适用的一般形式：

$$(C/\Delta t + K\theta)\phi_{n+1} + [-C/\Delta t + K(1-\theta)]\phi_n = \bar{P} \tag{13.3.22}$$

式中

$$\theta = \int_0^1 w\xi \mathrm{d}\xi \Big/ \int_0^1 w\mathrm{d}\xi, \quad \bar{P} = \int_0^1 wP\mathrm{d}\xi \Big/ \int_0^1 w\mathrm{d}\xi \tag{13.3.22a}$$

当 ϕ_n 和 $\bar{P}$ 都已知时，就可由(13.3.22)式求得下一时刻的 ϕ_{n+1}。这就是两点循环公式。

一种很方便的做法是假定 P 采用与未知场函数 ϕ 相同的插值，那么就可以得到

$$\bar{P} = P_{n+1}\theta + P_n(1-\theta) \tag{13.3.23}$$

显然(13.3.21)式是一组具有修正加权载荷项的差分公式。图 13.2 中给出一组权函数及相应的 θ 值。前面三个(a)～(c)，集中在点 n,$n+1/2$ 以及 $n+1$ 上加权，得到的是有名的前差分(Euler 差分公式)，中心差分(Crank-Nicholson 差分公式)和后差分公式。(d)为单元内等于常数的权函数，其结果和中心差分法相同。(e)和(f)为伽辽金型的权函数。

以上讨论的过程是把加权余量的格式建立在一个时间单元 Δt 上，建立了 ϕ_{n+1} 和 ϕ_n 间的递推关系。对于整个时间域 t，可以划分成若干时间单元，由逐步递推求得时间域内各瞬时的场函数 $\phi(t)$ 值。

2. 用最小二乘法建立两点公式

最小二乘法是用域内误差的平方作为变分的泛函。物理意义是近似场函数在域内形成的误差的平方和达到最小值，以此来确定近似的场函数。当近似函数仍采用(13.3.17)式的线性插值时，最小二乘法的变分泛函是

$$\begin{aligned}\Pi = \int_0^1 &[C(\dot{N}_n\phi_n + \dot{N}_{n+1}\phi_{n+1}) + K(N_n\phi_n + N_{n+1}\phi_{n+1}) - P]^{\mathrm{T}} \cdot \\ &[C(\dot{N}_n\phi_n + \dot{N}_{n+1}\phi_{n+1}) + K(N_n\phi_n + N_{n-1}\phi_{n+1}) - P]\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{13.3.24}$$

假定 ϕ_n 已知，对 ϕ_{n+1} 变分使泛函 Π 为极小。经过变换最后可以得到两点循环公式是

$$\begin{aligned}&[C^{\mathrm{T}}C/\Delta t + (K^{\mathrm{T}}C + C^{\mathrm{T}}K)/2 + K^{\mathrm{T}}K\Delta t/3]\phi_{n+1} \\ &\quad + [-C^{\mathrm{T}}C/\Delta t - (K^{\mathrm{T}}C - C^{\mathrm{T}}K)/2 + K^{\mathrm{T}}K\Delta t/6]\phi_n \\ &\quad - K^{\mathrm{T}}\int_0^1 P\xi\mathrm{d}\xi/\Delta t^2 - C^{\mathrm{T}}\int_0^1 P\mathrm{d}\xi/\Delta t = 0\end{aligned} \tag{13.3.25}$$

由上式可明显看到计算工作量是十分庞大的。但是由最小二乘法建立的方程总是对称方程组(系数矩阵具有对称性)，即使 K 和 C 矩阵是不对称的也是这样。

为了比较前面讨论过的这些两点公式，我们讨论一个简单情况

$$K = C = 1, \quad P = 0$$

这就是一个单变量的方程，初值取 $\phi_0 = 1$。图 13.3 给出了用不同公式的计算结果，时间步

长取 $\Delta t=0.5$ 及 $\Delta t=0.9$。在这个算例中，最小二乘具有较高的精度，但也需花费较多的计算费。在此同一算例中，中心差分公式取得了仅次于最小二乘法的良好精度。这种方法在工程实际中使用最多，但是中心差分经常出现解的振荡现象，为此，后差分公式($\theta=1$)也是常被推荐使用的。

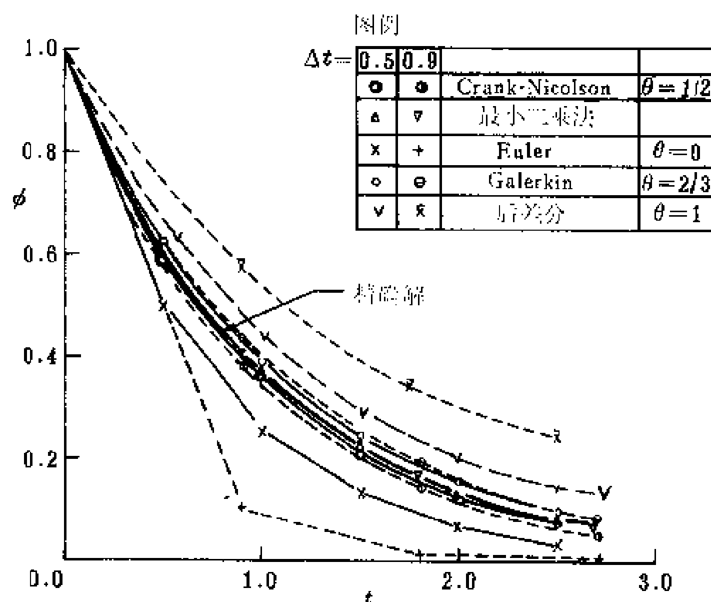


图 13.3 不同时间步长对初值问题的影响

图 13.4 中给出了同一问题采用较大的时间步长 $\Delta t=1.5$ 以及 $\Delta t=2.5$ 时计算的结果。可以清楚地看到前差分($\theta=0$)和中心差分($\theta=1/2$)的解出现振荡，甚至发散，而后差分却给出了稳定的解答。关于解的稳定性将在下一节讨论。

13.3.3 解的稳定性

当利用时间逐步积分方法求解常微分方程组(13.3.7)式时，讨论解的稳定性问题就是要回答在时间步长 Δt 取不同数值时，计算过程中的误差会不会无限增长。对于一定的积分方法，如果时间步长取任意值，误差都不会无限增长，则称此方法是无条件稳定的；如果时间步长只有满足一定条件时，才具有上述性质，则称此方法是有条件稳定的。

讨论解的稳定性问题的常用方法，首先是利用 n 阶联立方程组(13.3.7)式的特征向量将方程转换为 n 个互不耦合的单自由度方程，然后选择其一个典型方程进行讨论。为此我们首先求解热传导方程的特征值问题。

(13.3.7)式的齐次形式是：

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}=0 \tag{13.3.26}$$

设解具有指数形式

$$\boldsymbol{\phi}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\,e^{-\omega t} \tag{13.3.27}$$

代入(13.3.26)式得到

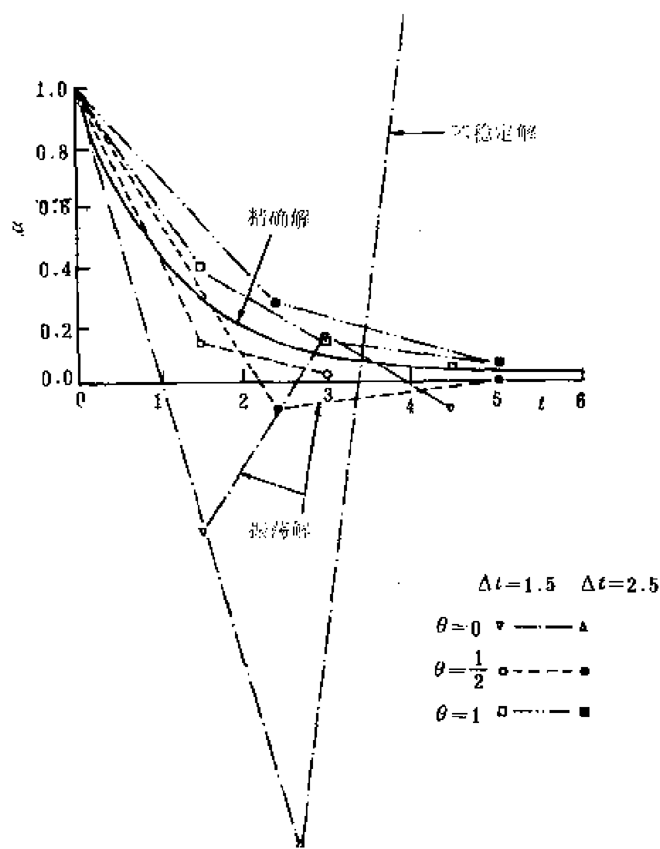


图 13.4 解的稳定性

$$(-\omega \boldsymbol{C}+\boldsymbol{K})\hat{\boldsymbol{\phi}} = 0 \tag{13.3.28}$$

对于(13.3.28)式，若 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 要有非零解，则要求

$$|-\omega \boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}| = 0 \tag{13.3.29}$$

这是个广义特征值问题。(13.3.29)式是特征方程，用以确定 n 个特征值 ω_i。当 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 是正定矩阵时，ω 是正实数，且 $0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n$。每个特征值 ω_i 代入(13.3.28)式可求得一组相应的 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_i$ 值，称为特征向量，共有 n 个，有互为正交的性质。齐次解的一般形式可写作

$$\boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^{n} A_i \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \, \mathrm{e}^{-\omega_i t} \tag{13.3.30}$$

对于非齐次方程组的解可由下列线性组合得到

$$\boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \, y_i = [\hat{\boldsymbol{\phi}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_2 \quad \cdots]\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{13.3.31}$$

式中 $y_i(t)$ 是时间的函数。

将(13.3.31)式代入(13.3.7)式并前乘 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_i^T$ $(i=1,\cdots,n)$，则可得到一组互不耦合的方程组

$$C_i\dot{y}_i + K_i y_i - P_i = 0 \quad (i = 1 \sim n) \tag{13.3.32}$$

其中

$$C_i = \hat{\boldsymbol{\phi}}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i$$

$$K_i = \hat{\boldsymbol{\phi}}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \tag{13.3.33}$$

$$P_i = \hat{\boldsymbol{\phi}}_i^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{P}$$

在(13.3.32)式的推导中，利用了特征向量的正交性，即当 $i \neq j$ 时有

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}_j = \hat{\boldsymbol{\phi}}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j = 0 \tag{13.3.34}$$

收(13.3.28)式可以有

$$\omega_i \boldsymbol{C}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i = \boldsymbol{K}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}_i \tag{13.3.35}$$

两边前乘$\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}}$则得到

$$\omega_i C_i = K_i \tag{13.3.36}$$

即

$$\phi_i = K_i / C_i \tag{13.3.37}$$

对于两点公式解的稳定性条件，我们利用一组互不耦合的方程(13.3.32)式来进行讨论比较方便，也易于理解。显然，两点公式(13.3.22)式也适用于(13.3.32)式，并因为稳定性讨论是要回答误差的影响，因此只要考虑它的齐次形式(即 $P_i = 0$)，对它可以写出两点循环式如下：

$$(C_i/\Delta t + K_i\theta)(y_i)_{n+1} + [-C_i/\Delta t + K_i(1-\theta)](y_i)_n = 0 \tag{13.3.38}$$

$(y_i)_{n+1}$和$(y_i)_n$间的关系可以表示为

$$(y_i)_{n+1} = (y_i)_n \lambda \tag{13.3.39}$$

这样(13.3.38)式就成为

$$\lambda(C_i/\Delta t + K_i\theta) + [-C_i/\Delta t + K_i(1-\theta)] = 0 \tag{13.3.40}$$

由(13.3.39)式可以看到若$|\lambda| > 1$，则解是发散的，在实际求解中应该防止发生。要求得到稳定的解，必须满足$|\lambda| < 1$。当然在$|\lambda| < 1$ 情况下，如果 $\lambda < 0$，这时解虽然稳定，但具有振荡的性质，这不符合瞬态热传导问题的物理特点，也不是我们所希望的。

由(13.3.40)式得到

$$\lambda = \frac{1 - K_i(1-\theta)\Delta t / C_i}{1 + K_i\theta\Delta t / C_i} \tag{13.3.41}$$

代入(13.3.37)式则可写作

$$\lambda = \frac{1 - \omega_i \Delta t(1-\theta)}{1 + \omega_i \theta \Delta t} \tag{13.3.42}$$

ω_i 为正实数。因为上式的最大值为正值且小于 1，因此要求$|\lambda| < 1$，即要求(13.3.42)式的右端必须大于-1，即

$$1 - \omega_i \Delta t(1-\theta) > -1 - \omega_i \Delta t \theta$$

或写作

$$\omega_i \Delta t(2\theta - 1) > -2 \tag{13.3.43}$$

这就是获得稳定解的条件。可以看到当 $\theta \geqslant 1/2$ 时，公式的解答是无条件稳定的。当

$0<\theta<1/2$时，是条件稳定，要求

$$\omega_i \Delta t < \frac{2}{1-2\theta} \tag{13.3.44}$$

因此，图 13.2 中所示后差分(c)及伽辽金型权函数(e)以及中心差分(b)都将得到无条件稳定的解答，而前差分(a)只是条件稳定，必须控制时间步长 Δt 以得到稳定的解答。

图 13.5 中给出了某些 θ 值时，λ 随时间步长 $\omega_i\Delta t$ 变化的情况。从图中可以看到后差分($\theta=1$)在时间步长很大时仍能保持解的良好性能，既稳定又不振荡。而对于中心差分($\theta=1/2$)，伽辽金($\theta=2/3$)方案，当时间步长较大时，λ 将趋向于-1 和$-1/2$，$\lambda<0$ 意味着即使解是稳定的，但却是振荡的。特别是前差分($\theta=0$)方案，在时间步长不太大时，已出现 $\lambda<-1$，即解不稳定的情况。由图中还可以看出，时间步长比较大时，后差分与中心差分等相比，具有较高的精度。虽然理论上后者比前者有较高的精度。

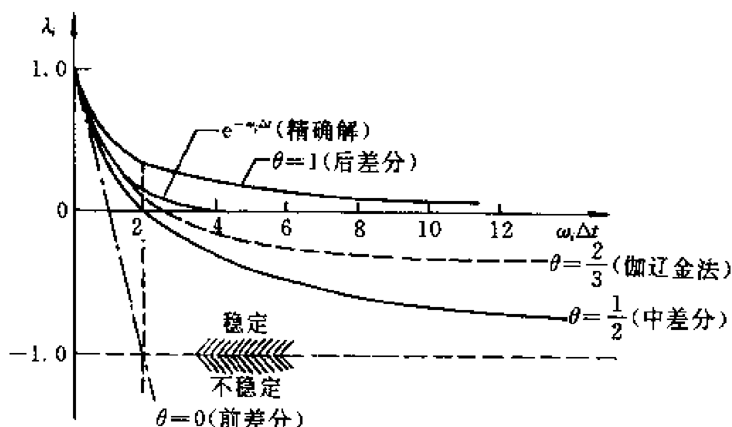


图 13.5 不同循环公式随时间步长的变化

一个多自由度体系的时间响应问题是上述全部响应模态的组合，并且响应的主要部分一般是低阶特征值 ω_i 的模态。因此，实际计算中当采用无条件稳定公式时，一般可选取远超过获得高阶特征值 ω_i 的高精度解所要求的时间步长，但是具体方案如果是属于随 $\omega_i\Delta t$ 增大，λ 趋于-1 的情况，则解仍会出现振荡。特别是在起始阶段以及载荷发生突变时，解容易发生振荡，因此应该尽量避免载荷的突变，若不可避免则应采取特殊措施处理。具体做法可参考文献[1]。

13.3.4 时间步长的选择

在实际问题中，很多瞬态温度场出现在启动或关车的一段时间内，经过时间 t_s 后温度场趋向稳定，经常需要了解的是在 t_s 时间内物体温度场的变化。由于实际结构的材料、几何尺寸、各种加热或冷却的边界条件不同，结构温度场达到稳态所需的时间 t_s 可能相差很大，因此时间步长 Δt 的选取不仅应考虑解的稳定性要求，也应参照到达稳态所需时间。Δt 的合理选取与计算精度以及计算费用密切相关。在实际计算中可以首先估算结构温度场到达稳态所需的时间 t_s，然后根据 t_s 选取合理的 Δt，在计算过程中根据解的稳定情况再作适当调正。

温度场到达稳态的时间可以用以下方法估算：瞬态温度场方程(13.3.7)式的解可以看作由两部分组成，即齐次方程组的通解和方程组的一个特解之和，特解就是稳态温度场，通解就是(13.3.30)式。当通解$\phi(t)$趋于零时，温度场即趋于稳态。由于只需要估计到达稳态所需的时间t_s，可以对问题作以下的简化：在(13.3.30)式中，当时间足够长时，较大的特征值ω_i对应的$e^{-\omega_i t}$项迅速趋于零，这时可以近似认为通解主要由第一特征值及特征向量构成

$$\phi \approx \hat{\phi}_1 e^{-\omega_1 t} \tag{13.3.45}$$

到达稳态的时间t_s应满足$e^{-\omega_1 t_s} \approx 0$，若近似地认为$e^{-\omega_1 t_s}=0.01$时，则$\omega_1 t_s=4.6$，即

$$t_s = \frac{4.6}{\omega_1} \tag{13.3.46}$$

所以估计t_s的问题就归结为求解最小特征值ω_1的问题。

在计算机程序中加入用反迭代法求解方程组(13.3.26)的最小特征值ω_1的子程序是很方便的(反迭代法可参见14.6.1节)。计算利用公式(13.3.29)式，每反迭代一次将突出一次ω_1的作用，通过若干次反迭代就能求得最小特征值ω_1的较好近似解。具体计算步骤是：

1. 开始计算

   ① 形成$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{C}$。

   ② 按所给边界条件修正$\boldsymbol{K}$。

   ③ 给初值$(\hat{\phi}_1)_0^{\mathrm{T}}=[1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]$。

   ④ 计算$\boldsymbol{C}(\hat{\phi}_1)_0$。

2. 反迭代若干次($k=0,1,2,\cdots$)，对于每次反迭代应作

   ① 解线性代数方程组$\boldsymbol{K}(\hat{\phi}_1)_{k+1}=\boldsymbol{C}(\hat{\phi}_1)_k$求得$(\hat{\phi}_1)_{k+1}$

   ② 计算 $\boldsymbol{C}(\hat{\phi}_1)_{k+1}$

   ③ 计算 $$\omega(k+1)=\frac{(\hat{\phi}_1)_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\hat{\phi}_1)_k}{(\hat{\phi}_1)_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\hat{\phi}_1)_{k+1}}$$

   ④ 检查 $$\left|\frac{\omega(k+1)-\omega(k)}{\omega(k+1)}\right|<\varepsilon$$

ε为容许误差。若上式成立，则计算结束，$\omega_1=\omega(k+1)$；若误差不满足要求，则继续以下计算

⑤ $$\boldsymbol{C}(\hat{\phi}_1)=\frac{\boldsymbol{C}(\hat{\phi}_1)_{k+1}}{(\hat{\phi}_1)_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\hat{\phi}_1)_{k+1}}$$

返回①作下一次迭代。

在最小特征值ω_1求得以后，按(13.3.46)式可以估算到达稳态温度场的时间t_s。瞬态分析的时间步长Δt可取$\Delta t=t_s/N$。其中N为估计的分步数，根据精度要求选择，通常可取$N=20\sim30$，实际计算中可按下式判断是否到达稳态

$$\frac{\|\phi_n - \phi_{n-1}\|}{\|\phi_n\|} < \mathrm{er} \tag{13.3.47}$$

其中 ϕ_n 和 ϕ_{n-1} 是本时间步 n 和前一时间步 $n-1$ 计算得到的温度场，$\|\phi_n-\phi_{n-1}\|$ 和 $\|\phi_n\|$ 分别表示 $\phi_n-\phi_{n-1}$ 和 ϕ_n 的范数，er 是一小数，例如取 er=1%。如果 er 取得很小，可能使(13.3.47)式很难满足，从而使计算时间大大增加。当然 er 取得较大，可能使最后计算得到的 ϕ_n 和实际稳态温度场 ϕ_s 有相当大的差别。所以建议在(13.3.47)式满足以后，最好再进行一次稳态温度场的计算(即在(13.3.22)式中令 $\boldsymbol{C}=0,\theta=1$)。为减少时间步长的数目，根据瞬态温度场变化的特点(参见(13.3.45)式)，可以考虑采用时间步长逐渐加大的变步长的算法。但这样一来，每变化一次时间步长，需要重新形成和分解求解 ϕ_{n+1} 的系数矩阵 $(\boldsymbol{C}/\Delta t+\boldsymbol{K}\theta)$，这一计算步骤所付出的代价可能抵销掉因分步数减少而带来的好处。

13.3.5 时间域离散的三点循环公式

1. 线性插值函数的三点循环公式

和在 13.3.2 节中只考虑一个典型的时间单元 Δt，建立两点循环公式的方法类同，把

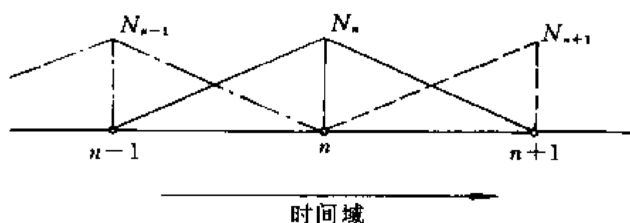


图 13.6 用于全时间域的线性插值函数

整个时间域离散成若干时间单元，每个时间单元内仍采用线性插值函数，见图 13.6。若在整个时间域上同时进行积分，除非权函数限制在一个单元以内，典型公式中将包括多组 ϕ_i 值。例如采用伽辽金方式选取插值函数 $w_j=N_j$，则方程中将包含三组值

$$(\boldsymbol{C}/2\Delta t+\boldsymbol{K}/6)\boldsymbol{\phi}_{n+1}+(2\boldsymbol{K}/3)\boldsymbol{\phi}_n+(-\boldsymbol{C}/2\Delta t+\boldsymbol{K}/6)\boldsymbol{\phi}_{n-1}-\bar{\boldsymbol{P}}=0 \tag{13.3.48}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{P}_{n+1}/6-2\boldsymbol{P}_n/3+\boldsymbol{P}_{n-1}/6$$

若两组初值已知，则可由上式求得下一组值。以上公式推导的方法与两点公式类同，只需改变积分区间。

2. 二次插值函数的三点循环公式

取时间单元 $2\Delta t$，单元中包括 3 个结点，二次插值函数如下

$$N_{n+1}=\xi(1+\xi)/2,\ N_n=(1-\xi)(1+\xi),\ N_{n-1}=-\xi(1-\xi)/2 \tag{13.3.49}$$

其中 $\xi=t/\Delta t$，$-1\leqslant\xi\leqslant1$。插值函数对时间的导数是

$$\dot{N}_{n+1}=\left(\frac{1}{2}+\xi\right)\Big/\Delta t,\quad \dot{N}_n=-2\xi/\Delta t,\quad \dot{N}_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}+\xi\right)\Big/\Delta t \tag{13.3.50}$$

对典型的时间单元写出加权余量的公式

$$\int_{-1}^{1}W[\boldsymbol{C}(\dot{N}_{n-1}\boldsymbol{\phi}_{n-1}+\dot{N}_n\boldsymbol{\phi}_n+\dot{N}_{n+1}\boldsymbol{\phi}_{n+1})$$

$$+ \boldsymbol{K}(N_{n-1}\boldsymbol{\phi}_{n-1} + N_n\boldsymbol{\phi}_n + N_{n+1}\boldsymbol{\phi}_{n+1}) - \boldsymbol{P}]\mathrm{d}\xi = 0 \qquad (13.3.51)$$

与推导(13.3.22)式类同，可以得到

$$[\gamma\boldsymbol{C}/\Delta t + \beta\boldsymbol{K}]\boldsymbol{\phi}_{n+1} + \left[(1 - 2\gamma)\boldsymbol{C}/\Delta t + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right)\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{\phi}_n$$

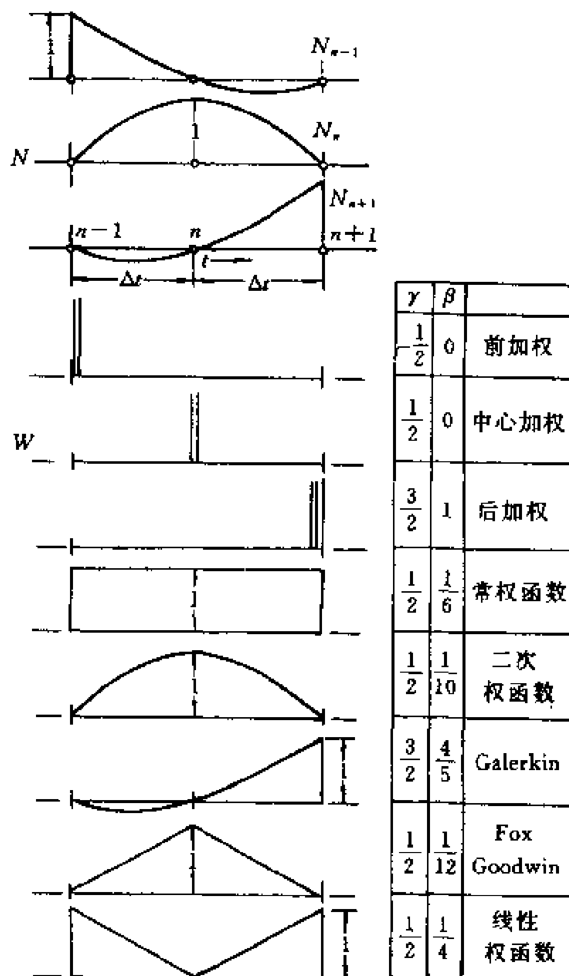
$$+ \left[-(1 - \gamma)\boldsymbol{C}/\Delta t + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma\right)\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{\phi}_{n-1} - \overline{\boldsymbol{P}} = 0 \qquad (13.3.52)$$

上式中

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \int_{-1}^{1} w\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\xi \Big/ \int_{-1}^{1} w\mathrm{d}\xi \\ \beta &= \int_{-1}^{1} w\,\frac{1}{2}\xi(1 + \xi)\mathrm{d}\xi \Big/ \int_{-1}^{1} w\mathrm{d}\xi \\ \overline{\boldsymbol{P}} &= \int_{-1}^{1} w\boldsymbol{P}\mathrm{d}\xi \Big/ \int_{-1}^{1} w\mathrm{d}\xi \end{aligned}\right\} \qquad (13.3.53)$$

若 $\boldsymbol{P}$ 采用与 $\boldsymbol{\phi}$ 相同插值，则

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \beta\boldsymbol{P}_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right)\boldsymbol{P}_n + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma\right)\boldsymbol{P}_{n-1} \qquad (13.3.54)$$



γ	β	
$-\frac{1}{2}$	0	前加权
$\frac{1}{2}$	0	中心加权
$\frac{3}{2}$	1	后加权
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	常权函数
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	二次权函数
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{5}$	Galerkin
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	Fox Goodwin
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	线性权函数

图 13.7　二点循环公式的插值函数及权函数

二次插值函数、不同的权函数及相应的 γ,β 值见图 13.7。

当采用三点循环公式时，无论是(13.3.48)式，还是(13.3.52)式，都有一个起步问题，即首先要确定 ϕ_{-1}，然后才可能利用它们计算 $\phi_1,\phi_2,\cdots$。对此需要采取专门措施，例如可先用(13.3.7)式计算出 $\dot{\phi}_0$，即

$$\dot{\phi}_0 = C^{-1}(P_0 - K\phi_0) \tag{13.3.55}$$

其中 ϕ_0,P_0 是给定的初始值。再用下式确定 ϕ_{-1}

$$\phi_{-1} = \phi_0 - \dot{\phi}_0\Delta t \tag{13.3.56}$$

采用三点循环公式时，同样也存在稳定性问题，可以仿照本节所述方法和步骤进行分析。读者可以自己进行练习。

13.4 热应力的计算

当物体各部分温度发生变化时，物体将由于热变形而产生线应变 $\alpha(\phi-\phi_0)$，其中 α 是材料的线膨胀系数，ϕ 是弹性体内任一点现时的温度值，ϕ_0 是初始温度值。如果物体各部分的热变形不受任何约束时，则物体上有变形而不引起应力。但是，物体由于约束或各部分温度变化不均匀，热变形不能自由进行时，则在物体中产生应力。物体由于温度变化而引起的应力称为"热应力"或"温度应力"。当弹性体的温度场 ϕ 已经求得时，就可以进一步求出弹性体各部分的热应力。

物体由于热膨胀只产生线应变，剪切应变为零。这种由于热变形产生的应变可以看作是物体的初应变，计算热应力时只需算出热变形引起的初应变 ε_0，求得相应的初应变引起的等效结点载荷 $P_{\varepsilon0}$（简称温度载荷），然后按通常求解应力一样解得由于热变形引起的结点位移 a，然后可以由 a 求得热应力 σ。也可以将热变形引起的等效结点载荷 $P_{\varepsilon0}$ 与其它载荷项合在一起，求得包括热应力在内的综合应力。计算应力时应包括初应变项

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) \tag{13.4.1}$$

其中 ε_0 是温度变化引起温度应变，它现在是作为初应变出现在应力应变关系式中，对于三维问题是

$$\varepsilon_0 = \alpha(\phi - \phi_0)[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}} \tag{13.4.2}$$

式内 α 是材料的热膨胀系数(1/℃)，ϕ_0 是结构的初始温度场。

如将(13.4.1)式代入虚位移原理的表达式(1.4.42)式，则可得到包含温度应变在内，用以求解热应力问题的最小位能原理，它的泛函表达式如下

$$\Pi_p(u) = \int_\Omega\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}D\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{T}}D\varepsilon_0 - u^{\mathrm{T}}f\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_\sigma}u^{\mathrm{T}}\bar{T}\mathrm{d}\Gamma \tag{13.4.3}$$

将求解域 Ω 进行有限元离散，从 $\delta\Pi_p=0$ 将可得到有限元求解方程

$$Ka = P \tag{13.4.4}$$

和不包含温度应变的有限元求解方程相区别的是载荷向量中包括由温度应变引起的温度载荷。即

$$P = P_f + P_T + P_{\varepsilon_0} \tag{13.4.5}$$

其中 P_f,P_T 是体积载荷和表面载荷引起的载荷项,P_{ε_0}是温度应变引起的载荷项

$$P_{\varepsilon_0} = \sum_e \int_{\Omega_e} B^T D \varepsilon_0 d\Omega \qquad (13.4.6)$$

从以上各式可见,结构热应力问题和无热载荷的应力分析问题相比,除增加一项以初应变形式出现的温度载荷项 P_{ε_0}而外,是完全相同的。以下只就实际分析中遇到的一些问题进行简要的讨论。

13.4.1 壳体温度单元

实际工程中需要进行热应力分析的结构,很大一类属于壳体或壳体和块体组合的结构,例如电力、核能、石化等工业部门大量存在的容器和管道即是这类结构。为使温度场和热应力的分析,利用同一个网格进行,必需有和板壳应力单元相匹配的板壳温度单元。

原则上可以利用在厚度方向设置两个结点的实体单元对板壳结构进行离散。但是和板壳应力单元类似,对于温度壳元而言,也应注意避免由于厚度方向和其他二个方向的传导矩阵的系数相差过大而引起的数值上的困难。对此,用于板壳应力单元的引入主从自由度或相对自由度的方法也完全适用。不过对于温度板壳元,这二种方法完全是等价的。

引入相对自由度的方法,对于最一般的三维壳元,完全可以仿效12.4节的做法。只是现在其中位移场$[u,v,w]$被温度场 ϕ,结点位移$[u_i,v_i,w_i]$被结点温度 ϕ_i 所代替,表达格式更为简化了。例如(12.4.6)式现在应改表示为

$$\left.\begin{aligned} \bar{\phi}_i &= \frac{1}{2}(\phi_i - \phi_{i+4}) \\ \bar{\phi}_{i+4} &= \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+4}) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2,3,4,9,10,11,12) \qquad (13.4.7)$$

其中 $\bar{\phi}_{i+1}$是上下表面结点对的温度的平均值,代表中面上对应结点的温度值;$\bar{\phi}_i$ 是上下表面结点对温度差之半,代表上表面结点温度和中面结点温度之差,也即相对温度。

相对自由度壳元的传导矩阵 $\bar{K}$,热容矩阵 $\bar{C}$,和热载向量 $\bar{P}$ 可以按标准步骤导出,这里不一一列举。可以指出,如引入新的结点参数

$$\psi_i = \frac{2\bar{\phi}_i}{h} = \frac{1}{h}(\phi_i - \phi_{i+4}) \quad (i = 1,2,3,4,9,10,11,12) \qquad (13.4.8)$$

式中 h 是壳体厚度,则 ψ_i 代表上下表面之间的温度梯度。它和壳体应力单元中的转动自由度类似。但是壳体应力单元3个相对位移自由度经类似上式的改写以后,在主从自由度方法中,只保留2个转动自由度,厚度方向相对位移被略去了,所以主从自由度的壳体单元中,中面上每个结点只有5个自由度,而不像相对自由度壳元,每个结点对仍保留6个自由度。但现在温度壳元,不管是采用 $\bar{\phi}_{i+1}$和 $\bar{\phi}_i$,还是采用 $\bar{\phi}_{i+1}$和 ψ_i,每个结点对或中面结点总是2个结点参数。它们之间仅是表达形式上的区别,而其实质是完全相同的。例如文献[2]就是采用 $\bar{\phi}_{i+1}$和 $\bar{\phi}_i$ 作为结点自由度构造三维温度壳元的。

最后还可指出,上述温度壳元,由于厚度方向只有2个结点,温度梯度是常数,不可能同时满足上下边界条件,用于瞬态温度场分析,特别是瞬态开始阶段,可能产生较大误差。文献[3]构造了一种在厚度方向温度为二次分布的壳体元,同时在导出单元矩阵以前,引入上下表面的边界条件,只保留中面结点温度作为独立自由度进入有限元求解方程。此种

温度壳元既具有更高精度，又具有很高的计算效率，在实际应用中，取得很好的效果。

13.4.2 非协调元在热应力分析中的应用

正如在5.5节中已经指出的，包含内部自由度的实体单元是一种很有效的单元，在实际分析中得到很广泛的应用。当然，在热应力分析也经常采用这种单元。但是有两点需要予以注意。首先是单元载荷向量的计算。我们从(13.4.6)式已知，对于不包含非协调项的常规单元，由温度应变引起的载荷向量的计算表达式。对于包含非协调项的单元，单元的载荷向量中还应包含 $\int_{\Omega_e}\overline{B}^{\mathrm{T}}D\varepsilon_0\mathrm{d}\Omega$ 项，其中 $\overline{B}$ 是非协调位移的应变矩阵(参见(5.5.7)～(5.5.8)式)。当包括温度载荷时，非协调元的单元求解方程仍如(5.5.7)式所示，但(5.7.8)式表示的载荷向量中应增加温度载荷的贡献，即修改为

$$
\left.\begin{aligned}
P_u^{(e)} &= \int_{\Omega_e}N^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^e}N^{\mathrm{T}}\overline{T}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_e}B^{\mathrm{T}}D\varepsilon_0\mathrm{d}\Omega \\
P_\sigma^{(e)} &= \int_{\Omega_e}\overline{N}^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^e}\overline{N}^{\mathrm{T}}\overline{T}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_e}\overline{B}^{\mathrm{T}}D\varepsilon_0\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}\right\} \tag{13.4.9}
$$

其它(5.5.9)～(5.5.10)式仍保持不变。

应给予注意的另一点是温度场分析和应力场所采用的单元类型之间的匹配问题。从(13.4.1)式可见，由结点位移引起的应变 ε 和由温度引起的应变 ε_0 出现在同一关系式。我们知道 ε 是由位移场的导数得到，而 ε_0 直接由温度场得到，所以合理的匹配应该是位移场的插值函数比温度场的插值函数高一个幂次。这在通常的情况下，将使这两者分析无法用同一网格进行。而在采用非协调元的情况下却可以方便地实现。即用包含内自由度的非协调元作应力场分析，而用不包含内自由度的常规元作温度场分析。从5.5.7节已知，相同结点数的非协调元和常规元比较，由于非协调元使常规元的插值函数中非完全的二次项补全而具有高一阶的精度，这恰好满足使 ε 和 ε_0 相匹配的要求。计算实例表明，如此选择取得很好的计算结果。

算例[4]：厚壁圆筒受内外壁温差作用的热应力计算。由于对称，只取1/4用三维8结点实体单元计算(如图13.8所示)。圆筒的上、下两端固定，内外壁温度分别为 $T_i=10$℃和 $T_0=40$℃，其余参数如下：$r_i=8\mathrm{cm}$，$r_0=10\mathrm{cm}$，$h=2\mathrm{cm}$，$E=2.1\times10^5\mathrm{MPa}$，$\nu=0.3$，$\alpha=1.2\times10^{-5}$。高度方向1个单元，周向5个单元。径向取2个单元和4个单元两种方案。计算有三种方案：A. 计算温度采用常规协调元，计算应力采用非协调元，即本节推荐的方案；B. 和方案 A 的区别是计算温度载荷时(13.4.9)的第2式中未引入和非协调位移相关的第3项，这是某些通用程序采用的方案；C. 计算温度和应力均采用协调单元，即通常惯用的方案。计算结果列于表13.1和表13.2。

表13.1 径向划分二层单元的计算结果和理论值的比较

	σ_{θ_T}	σ_{θ_A}	σ_{θ_B}	σ_{θ_C}	δ_A	δ_B	δ_C
$r=8$	580.0	560.4	755.0	793.0	3.38%	30.2%	36.7%
$r=10$	−500.0	−490.8	−835.2	−688.8	1.84%	67.0%	37.8%

表 13.2　径向划分四层单元的计算结果和理论值的比较

	σ_{θ_T}	σ_{θ_A}	σ_{θ_B}	σ_{θ_C}	δ_A	δ_B	δ_C
$r=8$	580.0	568.7	740.5	752.5	1.95%	27.6%	29.7%
$r=10$	−500.0	−494.2	−821.1	−646.3	1.16%	64.2%	29.3%

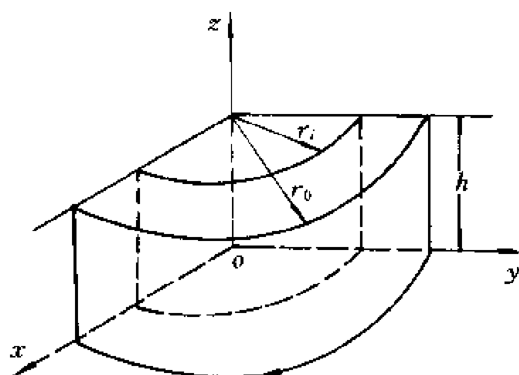


图 13.8　厚壁圆筒的计算模型

表中 σ_{θ_T} 是周向应力的理论值，σ_{θ_A}，σ_{θ_B}，σ_{θ_C} 分别是方案 A，B，C 的计算结果（单位：MPa）。δ_A，δ_B，δ_C 分别是它们和理论值相比较的误差。从结果可见，方案 A 具有很好的精度，而方案 B 和 C 则有很大的误差。特别是方案 B 由于理论上存在问题，结果更不能接受。而且从网格划细时的收敛性考查中可以发现，方案 A 收敛较快，方案 C 收敛很慢，方案 B 则基本上不具有收敛性。因此本节指出的在采用非协调元计算热应力时的两个注意点是非常必要的。这样可以得到一个分析结构温度场和热应力问题的很有实际意义的有效方案。

13.5　小　结

材料性质不依赖于温度的稳态温度场问题和线弹性静力学问题类似，同属不依赖于时间的平衡问题，有限元表达格式基本相同，只是稳态温度场问题由于场变量是标量，更为简单一些。而瞬态热传导问题则和下一章讨论的结构动力学问题类似，同属依赖于时间的传播问题。在空间域有限元离散后，得到的常微分方程组，通常需要用数值积分方法求解。它的具体求解方案及其解的稳定性和时间步长选择等问题是关系到求解过程的稳定性、收敛性及计算效率的基本问题，是求解瞬态热传导问题时应予关注的中心。在下一章动力学问题的讨论以后，将对这几个基本问题有进一步的认识和理解。

热应力问题，特别是由于设备起动、关闭以及热力载荷突然变化引起的瞬态热应力问题，对结构的强度和安全性至关重要。实际分析中，通常希望用同一个网格完成温度场和由之引起的应力场的有限元分析。对于适合用实体单元离散的结构，可以方便地实现。而对于适合用板壳单元进行离散的结构，应构造和板壳应力单元相匹配的板壳温度单元。如

厚度不是太薄。为简单起见，可考虑直接采用在厚度方向只有二个结点的实体单元。如厚度比较薄，为避免由于不同方向热传导矩阵系数相差过大而引起的数值困难，可考虑采用在厚度方向引入相对自由度或温度梯度作为新的自由度的单元。为能更好地描述瞬态变化较为激烈、温度在厚度方向呈非线性分布的情况，还可考虑采用在本章最后简要提到的文[3]中壳体温度单元。

实际分析中，考虑材料热传导系数 k 和热容系数 c 以及介质间的换热系数 h 随温度的变化常常是必要的，它可能对实际温度场的计算结果有很大的影响。这问题属于物理非线性问题，在此暂不讨论。在第 15 章讨论物理非线性问题有限单元法时阐述的原则和方法将可用于非线性温度场的求解。

习　题

13.1 导出稳态热传导问题的变分原理，并导出求解稳态温度场的有限元表达格式。

13.2 用加权余量的伽辽金法导出轴对称瞬态热传导问题 3 结点三角形单元的有限元格式。

13.3 导出求解瞬态热传导问题的数值积分方法的三点循环公式(13.3.48)式。

13.4 采用 13.3.3 节所阐述的方法和步骤分析三点循环公式(13.3.52)式的稳定性条件。

13.5 如何将在厚度方向设置两个结点的三维实体温度单元改写为相对自由度单元，并导出它的单元传导矩阵、热容矩阵和热载向量。

13.6 如何将在厚度方向设置两个结点的三维实体温度单元改写成用中面温度和中面温度梯度为自由度的壳体温度单元，并导出它的单元传导矩阵，热容矩阵和热载向量。

13.7 导出用非协调单元分析热应力问题的求解方程，并在单元层次凝聚掉内部自由度 α，导出只包含结点自由度 $\boldsymbol{a}$ 的求解方程。

参考文献

1　Wood W L and Lewis R H. A Comparison of Time Marching Schemes for The Transient Heat Conduction Eguation. Int. J. Num. Mech. Eng., 1975, 9,679～89

2　Surana K S and Phillips R K. Three Dimensional Curved Shell Finite Element for Heat Conduction. Computers & Structures, 1987, 25,775～785

3　王勖成，唐永进．一般壳体温度场的有限元分析．清华大学学报，1989，29 卷 5 期，103～112

4　唐永进，王勖成．Wilson 非协调元在温度应力分析中的应用．力学与实验，1990，第 12 卷第 4 期，35～37 页

第14章　动力学问题的有限单元法

14.1 引　　言

动力学问题在国民经济和科学技术的发展中有着广泛的应用领域。最经常遇到的是结构动力学问题，它有两类研究对象。一类是在运动状态下工作的机械或结构，例如高速旋转的电机、汽轮机、离心压缩机，往复运动的内燃机、冲压机床，以及高速运行的车辆、飞行器等，它们承受着本身惯性及与周围介质或结构相互作用的动力载荷。如何保证它们运行的平稳性及结构的安全性，是极为重要的研究课题。另一类是承受动力载荷作用的工程结构，例如建于地面的高层建筑和厂房，石化厂的反应塔和管道，核电站的安全壳和热交换器，近海工程的海洋石油平台等，它们可能承受强风、水流、地震以及波浪等各种动力载荷的作用。这些结构的破裂、倾覆和垮塌等破坏事故的发生，将给人民的生命财产造成巨大的损失。正确分析和设计这类结构，在理论和实际上也都是具有意义的课题。

动力学研究的另一重要领域是波在介质中的传播问题。它是研究短暂作用于介质边界或内部的载荷所引起的位移和速度的变化，如何在介质中向周围传播，以及在界面上如何反射、折射等的规律。它的研究在结构的抗震设计、人工地震勘探、无损探伤等领域都有广泛的应用背景，因此也是近廿多年一直受到工程和科技界密切关注的课题。

在进入本章主要内容的讨论以前，先对弹性动力学问题的基本方程和动力学有限元方法的基本格式作一简要的引述和讨论。

三维弹性动力学的基本方程是

平衡方程　$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho u_{i,tt}+\mu u_{i,t}$　（在 V 域内）　(14.1.1)

几何方程　$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$　（在 V 域内）　(14.1.2)

物理方程　$\sigma_{ij}=D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$　（在 V 域内）　(14.1.3)

边界条件　$u_i=\bar{u}_i$　（在 S_u 边界上）　(14.1.4)

$\sigma_{ij}n_j=\bar{T}_i$　（在 S_σ 边界上）　(14.1.5)

初始条件

$$\left.\begin{aligned}u_i(x,y,z,0)&=u_i(x,y,z)\\u_{i,t}(x,y,z,0)&=u_{i,t}(x,y,z)\end{aligned}\right\}\qquad(14.1.6)$$

(14.1.1)式中 ρ 是质量密度；μ 是阻尼系数；$u_{i,tt}$和 $u_{i,t}$分别是 u_i 对 t 的二次导数和一次导数，即分别表示 i 方向的加速度和速度。$\rho u_{i,tt}$和 $\mu u_{i,t}$分别代表惯性力和阻尼力（取负值）。平衡方程中出现惯性力和阻尼力这是弹性动力学和静力学相区别的基本特点之一。以上各式中的各个符号和第1章引述的弹性静力学方程的相同，只是由于在现在的情况下，载荷是时间的函数，因此位移、应变、应力也是时间的函数。也正因为如此，动力学问题的定解条件中还应包括初始条件(14.1.6)式。

现以三维实体动力分析为例，用有限元法求解的基本步骤如下。

1. 连续区域的离散化

在动力分析中，因为引入了时间坐标，我们所处理的是四维(x,y,z,t)问题。在有限元分析中一般采用部分离散的方法，即只对空间域进行离散，这样一来，此步骤和静力分析相同。

2. 构造插值函数

由于只对空间域进行离散，所以单元内位移 u,v,w 的插值表示是

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y,z)u_i(t) \\ v(x,y,z,t) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y,z)v_i(t) \\ w(x,y,z,t) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y,z)w_i(t) \end{aligned}\right\} \tag{14.1.7}$$

或

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e \tag{14.1.8}$$

其中

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{Bmatrix},\ \boldsymbol{N} = [\boldsymbol{N}_1 \quad \boldsymbol{N}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{N}_n]$$

$$\boldsymbol{N}_i = N_i \boldsymbol{I}_{3\times 3} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{a}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{Bmatrix},\ \boldsymbol{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \\ w_i(t) \end{Bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

上列各符号的意义与静力分析情况相同，只是结点参数 $\boldsymbol{a}^e$ 或 $\boldsymbol{a}_i$ 现在是时间的函数。

3. 形成系统的求解方程

平衡方程(14.1.1)式及力的边界条件(14.1.5)式的等效积分形式的 Galerkin 提法可表示如下

$$\int_V \delta u_i(\sigma_{ij,j} + f_i - \rho u_{i,tt} - \mu u_{i,t})\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \delta u_i(\sigma_{ij}n_j - \overline{T}_i)\mathrm{d}S = 0 \tag{14.1.9}$$

对上式的第一项$\int_V \delta u_i \sigma_{ij,j}\mathrm{d}V$ 进行分部积分，并代入物理方程，则从上式可以得到

$$\begin{aligned} &\int_V (\delta\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \delta u_i u_{i,tt} + \delta u_i \mu u_{i,t})\mathrm{d}V \\ &= \int_V \delta u_i f_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \delta u_i \overline{T}_i \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{14.1.10}$$

将位移空间离散后的表达式(14.1.8)，(现在情况下，$u_1=u,u_2=v,u_3=w$)代入上式，并注意到结点位移变分 $\delta\boldsymbol{a}$ 的任意性，就最终得到系统的求解方程(现在情况下又称运动方程)

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}(t) + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{a}}(t) + \boldsymbol{k}\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{Q}(t) \tag{14.1.11}$$

其中 $\ddot{\boldsymbol{a}}(t)$和 $\dot{\boldsymbol{a}}(t)$分别是系统的结点加速度向量和结点速度向量，$\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{Q}(t)$分别是

系统的质量矩阵,阻尼矩阵、刚度矩阵和结点载荷向量,分别由各自的单元矩阵和向量集成

$$M^e = \sum_e M^e, \quad K = \sum K^e, \quad C = \sum C^e, \quad Q = \sum Q^e \tag{14.1.12}$$

$$M^e = \int_{V_e} \rho N^T N dV, \quad K^e = \int_{V_e} B^T D B dV, \quad C^e = \int_{V_e} \mu N^T N dV \tag{14.1.13}$$

分别是单元的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵。

$$Q^e = \int_{V_e} N^T f dV + \int_{S_\sigma^e} N^T T dS \tag{14.1.14}$$

是单元载荷向量。

如果忽略阻尼的影响,则运动方程简化为

$$M\ddot{a}(t) + Ka(t) = Q(t) \tag{14.1.15}$$

如果上式的右端项为零,则上式表达的是系统的自由振动方程。

4. 求解运动方程

运动方程(14.1.11)或(14.1.15)式的求解方法是本章着重讨论的内容。详见 14.3, 14.4 等节。

5. 计算结构的应变和应力

一经从(14.1.11)式或(14.1.15)式解得结点的位移向量 $a(t)$,则可利用(14.1.2)和(14.1.3)式计算所需要的应变 $\varepsilon(t)$和应力 $\sigma(t)$。

从以上各步骤可以看出,和静力分析相比较,在动力分析中,由于惯性力和阻尼力出现在平衡方程中,因此引入了质量矩阵和阻尼矩阵,最后得到的求解方程不是代数方程组,而是常微分方程组。其他计算步骤和静力分析是完全相同的。

(14.1.13)式表达的质量矩阵和阻尼矩阵只是实际分析中可采用的形式之一,其他表达形式以及一般性质将在下一节进一步讨论。

关于二阶常微分方程组的解法,原则上可利用求解常微分方程组的常用方法(例如 Runge-Kutta 方法)求解,但是在有限元动力分析中,因为矩阵阶数很高,用这些常用算法一般是不经济的,所以只对少数有效的方法有兴趣。这些方法可以分为两类:直接积分法和振型叠加法。

直接积分法是直接对运动方程进行积分。而振型叠加法是首先求解一无阻尼的自由振动,即求解右端为零的(14.1.15)式,从数学上看这是一矩阵特征值问题,然后用解得的特征向量,即固有振型对运动方程(14.1.11)式进行变换,如果阻尼矩阵是振型阻尼矩阵,则变换后的运动方程,各自由度是互不耦合的。最后对各个自由度的运动方程进行积分并进行叠加,从而得到问题的解答。这两类方法本质上是等价的,究竟采用何种方法主要取决于求解具体问题的计算效率。

在本章中,关于直接积分法着重研究不同数值积分方案的特点和步骤。并适当讨论解的稳定性问题。关于振型叠加法着重研究大型矩阵特征值问题的解法。

和静力分析相比,动力分析的计算工作量要大得多,因此提高效率、节省计算工作量的数值方案和方法是动力分析研究工作中的重要组成部分,为此在本章最后将扼要地介

绍两种得到普遍应用的减缩自由度的方法：主从自由度法和模态综合法。主从自由度法的基本思想是将系统的自由度（位移向量）分为两部分，一部分称主自由度，另部分称从自由度。后者按一定的关系依赖于前者，从而使求解系统运动方程的计算工作量有所减少，但对此系统的较高阶频率和振型的精度影响甚小。模态综合法的基本思想是将子结构法用于动力分析，但和静力分析子结构的区别是最后进入系统运动方程的自由度，除各子结构交界面上的自由度，还包括以各子结构的主要振型为坐标的自由度，但是总的自由度数仍大大少于原系统的自由度数，所以模态综合法本质上也是一种减缩自由度的方法。

14.2 质量矩阵和阻尼矩阵

14.2.1 协调质量矩阵和集中质量矩阵

上节（14.1.13）式所表达的单元质量矩阵

$$\boldsymbol{M}^e = \iiint_{V_e} \rho \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} \mathrm{d}V$$

称为协调质量矩阵或一致质量矩阵，这是因为导出它时，和导出刚度矩阵所根据的原理（Galerkin 方法）及所采用位移插值函数是一致的，同时质量分布也是按照实际分布情况考虑的。此外，在有限元法中还经常采用所谓集中（或团聚）质量矩阵。它假定单元的质量集中在结点上，这样得到的质量矩阵是对角线矩阵。

现以两种典型单元为例，表明上述两种不同质量矩阵的具体表达式以及它们之间的区别。

1. 平面应力-应变单元：单元形式采用 2.2 节所讨论的 3 结点三角形单元

协调质量矩阵：位移插值函数是

$$\boldsymbol{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]\boldsymbol{I} \tag{14.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是 2×2 单位矩阵。

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2A \quad (i = 1,2,3)$$

系数 a_i, b_i, c_i 见（2.2.6）式，A 是三角形单元面积。

按（14.1.13）式可以算得单元的协调质量矩阵

$$\boldsymbol{M}^e = \frac{W}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{14.2.2}$$

其中 $W=\rho t A$ 是单元的质量，t 是单元的厚度。

集中质量矩阵:单元的每个结点上集中三分之一的质量,这样就得到单元的集中质量矩阵

$$
M^e = \frac{W}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14.2.3}
$$

2. 梁弯曲单元:单元形式采用 9.2 节所讨论的二结点单元

协调质量矩阵:位移插值函数是

$$
N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]
$$

其中:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3, \qquad & N_2 &= x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3 \\
N_3 &= \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3, \qquad & N_4 &= -\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3
\end{aligned} \tag{14.2.4}
$$

按(14.1.13)式可以算得单元的协调质量矩阵

$$
M^e = \frac{W}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ \text{对} & & 156 & 22l \\ & \text{称} & & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{14.2.5}
$$

其中 l 是单元长度,$W=\rho lA$ 是单元的质量,A 是截面面积。

集中质量矩阵:每个结点集中二分之一的质量,并略去转动项,得到单元的集中质量矩阵为

$$
M^e = \frac{W}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14.2.6}
$$

在实际分析中,协调质量矩阵和集中质量矩阵都有应用,一般情况下,两者给出的结果也相差不多。从(14.1.13)式可以看到质量矩阵积分表达式的被积函数是插值函数的平方项,而刚度矩阵则是其导数的平方项,因此在相同精度要求条件下,质量矩阵可用较低阶的插值函数,而集中质量矩阵从实质上看,正是这样一种替换方案。替换的好处是使计算得到简化,特别是采用直接积分的显式方案(见 14.3 节)求解运动方程时,如果阻尼矩阵也采用对角矩阵,可以省去等效刚度矩阵的分解步骤,这点在非线性分析中将有更明显的意义。

另外从(14.2.6)式可以看到,对于结点参数中包含转动的梁、板、壳一类单元,由于集中质量矩阵中略去了转动项,如采用显式直接积分方法求解运动方程,还可使方程的自由度数进一步减少。

采用集中质量矩阵遇到的困难是对于高次单元如何将单元的质量分配到各个结点上，不像上述两例那样明显而简单，可能有多种选择，不易把握。另外，如果单元位移是协调的，同时单元刚度矩阵的积分也是精确的，则采用协调质量矩阵时，求得结构的频率将代表真实频率的上限，这点对设计工作是有意义的。

14.2.2 振型阻尼矩阵

(14.1.13)式所表示的单元阻尼矩阵

$$\boldsymbol{C}^e = \int_{V_e} \mu \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} \mathrm{d}V$$

基于和协调质量矩阵的同样理由称为协调阻尼矩阵。它是假定阻尼力正比于质点运动速度的结果，通常均将介质阻尼简化为这种情况。这时单元阻尼矩阵比例于单元质量矩阵。

除此而外，还有比例于应变速度的阻尼，例如由于材料内摩擦引起的结构阻尼通常可简化为这种情况，这时阻尼力可表示成 $\mu \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，这样一来，可以得到单元阻尼矩阵

$$\boldsymbol{C}^e = \mu \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d}V \tag{14.2.7}$$

此单元阻尼矩阵比例于单元刚度矩阵。

在以后的讨论中，将知道系统的固有振型对于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 是具有正交性的，因此固有振型对于比例于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 也是具有正交性的。所以这种阻尼矩阵称为比例阻尼或振型阻尼。今后还知道，利用系统的振型矩阵对运动方程进行坐标变换时，振型阻尼矩阵经变换后和质量矩阵及刚度矩阵的情况相同，将是对角矩阵。这样一来，经变换后运动方程的各个自由度之间将是互不耦合的(见 14.4 节)，因此每个方程可以独立地求解，这将对计算带来很大方便。

但应指出，(14.1.13)式和(14.2.7)式中的比例系数，在一般情况下是依赖于频率的。因此在实际分析中，要精确地决定阻尼矩阵是相当困难。通常允许将实际结构的阻尼矩阵简化为 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的线性阻合，即

$$\boldsymbol{C} = \alpha \boldsymbol{M} + \beta \boldsymbol{K} \tag{14.2.9}$$

其中 α,β 是不依赖于频率的常数。这种振型阻尼称为 Rayleigh 阻尼。

14.3 直接积分法

直接积分是指在积分运动方程之前不进行方程形式的变换，而直接进行逐步数值积分。通常的直接积分法是基于两个概念，一是将在求解域 $0<t<T$ 内的任何时刻 t 都应满足运动方程的要求，代之以仅在一定条件下近似地满足运动方程，例如可以仅在相隔 Δt 的离散的时间点满足运动方程。二是在一定数目的 Δt 区域内，假设位移 $\boldsymbol{a}$，速度 $\dot{\boldsymbol{a}}$，加速度 $\ddot{\boldsymbol{a}}$ 的函数形式。

在以下的讨论中，假定时间 $t=0$ 的位移 $\boldsymbol{u}_0$，速度 $\dot{\boldsymbol{u}}_0$，加速度 $\ddot{\boldsymbol{u}}_0$ 已知。并假定时间求解域 $0\sim T$ 被等分为 n 个时间间隔 $\Delta t(=T/n)$。在讨论具体算法时，假定 $0,\Delta t,2\Delta t,\cdots,t$ 时刻的解已经求得，计算的目的在于求 $t+\Delta t$ 时刻的解，由此求解过程建立起求解所有离散

时间点解的一般算法步骤。

14.3.1 中心差分法

对于数学上是二阶常微分方程组的运动方程(14.1.11)式，理论上，不同的有限差分表达式都可以用来建立其逐步积分公式。但是从计算效率考虑，现在仅介绍在求解某些问题时很有效的中心差分法。

在中心差分法中，加速度和速度可以用位移表示为

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_t = \frac{1}{\Delta t^2}(\boldsymbol{a}_{t-\Delta t} - 2\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_{t+\Delta t}) \tag{14.3.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_t = \frac{1}{2\Delta t}(-\boldsymbol{a}_{t-\Delta t} + \boldsymbol{a}_{t+\Delta t}) \tag{14.3.2}$$

时间 $t+\Delta t$ 的位移解答 $\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$，可由下面时间 t 的运动方程应得到满足而建立，即

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}_t + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}_t + \boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{Q}_t \tag{14.3.3}$$

为此将(14.3.1)式和(14.3.2)式代入上式，得到

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \frac{1}{2\Delta t}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{Q}_t - \left(\boldsymbol{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{a}_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} - \frac{1}{2\Delta t}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{a}_{t-\Delta t} \tag{14.3.4}$$

如已经求得 $\boldsymbol{a}_{t-\Delta t}$ 和 $\boldsymbol{a}_t$，则从上式可以进一步解出 $\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$。所以上式是求解各个离散时间点解的递推公式，这种数值积分方法又称逐步积分法。需要指出的是，此算法有一个起步问题。因为当 $t=0$ 时，为了计算 $\boldsymbol{a}_{\Delta t}$，除了从初始条件已知的 $\boldsymbol{a}_0$ 而外，还需要知道 $\boldsymbol{a}_{-\Delta t}$，所以必须用一专门的起步方法。为此利用(14.3.1)式和(14.3.2)式可以得到

$$\boldsymbol{a}_{-\Delta t} = \boldsymbol{a}_0 - \Delta t\dot{\boldsymbol{a}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\boldsymbol{a}}_0 \tag{14.3.5}$$

上式中 $\dot{\boldsymbol{a}}_0$ 可从给定的初始条件得到，而 $\ddot{\boldsymbol{a}}_0$ 则可以利用 $t=0$ 时的运动方程(14.3.3)式得到。

至此，我们可将利用中心差分法逐步求解运动方程的算法步骤归结如下：

1. 初始计算

(1) 形成刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$，质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$。

(2) 给定 $\boldsymbol{a}_0$，$\dot{\boldsymbol{a}}_0$ 和 $\ddot{\boldsymbol{a}}_0$。

(3) 选择时间步长 Δt，$\Delta t<\Delta t_{cr}$，并计算积分常数 $c_0=\frac{1}{\Delta t^2}$，$c_1=\frac{1}{2\Delta t}$，$c_2=2c_0$，$c_3=1/c_2$。

(4) 计算 $\boldsymbol{a}_{-\Delta t}=\boldsymbol{a}_0-\Delta t\dot{\boldsymbol{a}}_0+c_3\ddot{\boldsymbol{a}}_0$

(5) 形成有效质量矩阵 $\hat{\boldsymbol{M}}=c_0\boldsymbol{M}+c_1\boldsymbol{C}$

(6) 三角分解 $\hat{\boldsymbol{M}}$：$\hat{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{LDL}^T$

2. 对于每一时间步长

(1) 计算时间 t 的有效载荷

$$\hat{\boldsymbol{Q}}_t = \boldsymbol{Q}_t - (\boldsymbol{K} - c_2\boldsymbol{M})\boldsymbol{a}_t - (c_0\boldsymbol{M} - c_1\boldsymbol{C})\boldsymbol{a}_{t-\Delta t}$$

(2) 求解时间 $t+\Delta t$ 的位移

$$\boldsymbol{LDL}^T\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} = \hat{\boldsymbol{Q}}_t$$

(3) 如果需要，计算时间 t 的加速度和速度

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_t = c_0(\boldsymbol{a}_{t-\Delta t} - 2\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_{t+\Delta t})$$
$$\dot{\boldsymbol{a}}_t = c_1(-\boldsymbol{a}_{t-\Delta t} + \boldsymbol{a}_{t+\Delta t})$$

关于中心差分法还需着重指出以下两点：

(1) 中心差分法是显式算法。这是由于递推公式是从时间 t 的运动方程导出的，因此 $\boldsymbol{K}$ 矩阵不出现在递推公式(14.3.4)式的左端。当 $\boldsymbol{M}$ 是对角矩阵，$\boldsymbol{C}$ 可以忽略，或也是对角矩阵时，则利用递推公式求解运动方程时不需要进行矩阵的求逆，仅需要进行矩阵乘法运算以获得方程右端的有效载荷，然后可用下式得到位移的各个分量

$$a_{t+\Delta t}^{(i)} = \hat{Q}_t^{(i)}/(c_0 M_{ii}) \tag{14.3.6}$$

或

$$a_{t+\Delta t}^{(i)} = \hat{Q}_t^{(i)}/(c_0 M_{ii} + c_1 C_{ii}) \tag{14.3.7}$$

其中 $a_{t+\Delta t}^{(i)}$和 $\hat{Q}_{t+\Delta t}^{(i)}$分别是向量 $\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$和 $\hat{\boldsymbol{Q}}_t$ 的第 i 分量，M_i 和 C_{ii}分别是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 个对角元素，并假定 $M_{ii}>0$。

显式算法的上述优点在非线性分析中将更有意义。因为非线性分析中，每个增量步的刚度矩阵是被修改了的。这时采用显式算法，避免了矩阵求逆的运算，计算上的好处更加明显。

(2) 中心差分法是条件稳定算法。即利用它求解具体问题时，时间步长 Δt 必须小于由该问题求解方程性质所决定的某个临界值 Δt_{cr}，否则算法将是不稳定的。关于算法稳定性的概念和稳定性的条件，我们将在 14.5 节讨论。这里先给出中心差分法解的稳定性条件是

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \tag{14.3.8}$$

其中 T_n 是有限元系统的最小固有振动周期。原则上说可以利用一般矩阵特征值问题的求解方法得到 T_n。实际上只需要求解系统中最小尺寸单元的最小固有振动周期 $\min(T_n^{(e)})$ 即可，因为理论上可以证明，系统的最小固有振动周期 T_n 总是大于或等于最小尺寸单元的最小固有振动周期 $\min(T_n^{(e)})$的。所以我们可以将 $\min(T_n^{(e)})$代入(14.3.8)式以确定临界时间步长 Δt_{cr}。从此可见，网格中最小尺寸的单元将决定中心差分法时间步长的选择。它的尺寸愈小，将使 Δt_{cr}愈小，从而使计算费用愈高。这点在划分有限元网格时要予以注意，以避免因个别单元尺寸过小，而使计算费用不合理的增加。

中心差分法比较适合用于波传播问题的求解。因为当介质的边界或内界的某个小的区域受到初始扰动以后，是逐步向介质内部或周围传播的。如果我们分析递推公式(14.3.4)式，将发现，当 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是对角矩阵，即算式是显式时，如给定某些结点以初始扰动(即给 $\boldsymbol{a}$ 中的某些分量以非零值)，在经过一个时间步长 Δt 后，和它们相关(在 $\boldsymbol{K}$ 中处于同一带宽内)的结点将进入运动，即 $\boldsymbol{a}$ 中和这些结点对应的分量将成为非零量。随着时间的推移，其它结点将按此规律依次进入运动。此特点正好和波传播的特点相一致。另一方面，研究波传播的过程需要采用小的时间步长，这正是中心差分法时间步长需受临界步长限制所要求的。

反之，对于结构动力学问题，如采用中心差分法一般就不太适合了。因为结构的动力响应中通常低频成分是主要的，从计算精度考虑，允许采用较大的时间步长，不必要因 Δt_{cr}的限制而使时间步长太小。因此，对于结构动力学问题，通常采用无条件稳定的隐式算

法，此时时间步长主要取决于精度要求。以下介绍的 Newmark 方法是应用最为广泛的一种隐式算法。

14.3.2 Newmark 方法

Newmark 积分方法实质上是线性加速度法的一种推广。它采用下列假设

$$\dot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\boldsymbol{a}}_t + [(1-\delta)\ddot{\boldsymbol{a}}_t + \delta\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t}]\Delta t \tag{14.3.9}$$

$$\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{a}_t + \dot{\boldsymbol{a}}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{\boldsymbol{a}}_t + \alpha\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{14.3.10}$$

其中 α 和 δ 是按积分精度和稳定性要求而决定的参数。当 $\delta=1/2$ 和 $\alpha=1/6$ 时，(14.3.9) 和(14.3.10)式相应于线性加速度法，因为这时它们可以从下面时间间隔 Δt 内线性假设的加速度表达式的积分得到

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\tau} = \ddot{\boldsymbol{a}}_t + (\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t} - \ddot{\boldsymbol{a}}_t)\tau/\Delta t \tag{14.3.11}$$

式中 $0\leqslant\tau\leqslant\Delta t$。Newmark 方法原来是从常平均加速度法这样一种无条件稳定积分方案而提出的，那时 $\delta=1/2$ 和 $\alpha=1/4$。Δt 内的加速度为

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\tau} = \frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{a}}_t + \ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t}) \tag{14.3.12}$$

和中心差分法不同，Newmark 方法中时间 $t+\Delta t$ 的位移解答 $\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$ 是通过满足时间 $t+\Delta t$ 的运动方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{Q}_{t+\Delta t} \tag{14.3.13}$$

而得到的。为此首先从(14.3.10)式解得

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{a}_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\boldsymbol{a}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\ddot{\boldsymbol{a}}_t \tag{14.3.14}$$

将上式代入(14.3.9)式，然后再一并代入(14.3.13)式，则得到从 $\boldsymbol{a}_t, \dot{\boldsymbol{a}}_t, \ddot{\boldsymbol{a}}_t$ 计算 $\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$ 的公式

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{K} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{a}_{t+\Delta t} = {}& \boldsymbol{Q}_{t+\Delta t} + \boldsymbol{M}\left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\boldsymbol{a}_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\boldsymbol{a}}_t + \left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\ddot{\boldsymbol{a}}_t\right] \\ & + \boldsymbol{C}\left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t}\boldsymbol{a}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha}-1\right)\dot{\boldsymbol{a}}_t + \left(\frac{\delta}{2\alpha}-1\right)\Delta t\ddot{\boldsymbol{a}}_t\right]\end{aligned} \tag{14.3.15}$$

至此，我们可将利用 Newmark 方法逐步求解运动方程的算法步骤归结如下：

1. 初始计算

(1) 形成刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$，质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$。

(2) 给定 $\boldsymbol{a}_0, \dot{\boldsymbol{a}}_0$ 和 $\ddot{\boldsymbol{a}}_0$

(3) 选择时间步长 Δt，参数 α 和 δ，并计算积分常数

$$\delta \geqslant 0.50,\ \alpha \geqslant 0.25(0.5+\delta)^2$$

$$c_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2},\ c_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t},\ c_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t},\ c_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1,$$

$$c_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1,\ c_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right),\ c_6 = \Delta t(1-\delta),\ c_7 = \delta\Delta t$$

(4) 形成有效刚度矩阵 $\hat{\boldsymbol{K}}$：$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K} + c_0\boldsymbol{M} + c_1\boldsymbol{C}$

(5) 三角分解 $\hat{\boldsymbol{K}}$：$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$

2. 对于每一时间步长

(1) 计算时间 $t+\Delta t$ 的有效载荷

$$\hat{\boldsymbol{Q}}_{t+\Delta t}=\boldsymbol{Q}_{t+\Delta t}+\boldsymbol{M}(c_0\boldsymbol{a}_t+c_2\dot{\boldsymbol{a}}_t+c_3\ddot{\boldsymbol{a}}_t)+\boldsymbol{C}(c_1\boldsymbol{a}_t+c_4\dot{\boldsymbol{a}}_t+c_5\ddot{\boldsymbol{a}}_t)$$

(2) 求解时间 $t+\Delta t$ 的位移

$$\boldsymbol{LDL}^T\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}=\hat{\boldsymbol{Q}}_{t+\Delta t}$$

(3) 计算时间 $t+\Delta t$ 的加速度和速度

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t}=c_0(\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{a}_t)-c_2\dot{\boldsymbol{a}}_t-c_3\ddot{\boldsymbol{a}}_t$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t}=\dot{\boldsymbol{a}}_t+c_6\ddot{\boldsymbol{a}}_t+c_7\ddot{\boldsymbol{a}}_{t+\Delta t}$$

从 Newmark 方法循环求解方程(14.3.15)式可见,有效刚度矩阵 $\hat{\boldsymbol{K}}$ 中包含了 $\boldsymbol{K}$,而一般情况下 $\boldsymbol{K}$ 总是非对角矩阵,因此在求解 $\boldsymbol{a}_{t+\Delta t}$时,$\hat{\boldsymbol{K}}$ 的求逆是必须的(当然,在线性分析中只需分解一次)。这是由于在导出(14.3.15)时,利用了 $t+\Delta t$ 时刻的运动方程(14.3.13)式。这种算法称为隐式算法。在 14.5 节中将证明,当 $\delta\geqslant0.5,\alpha\geqslant0.25(0.5+\delta)^2$ 时,Newmark 方法是无条件稳定的,即时间步长 Δt 的大小可不影响解的稳定性。此时 Δt 的选择主要根据解的精度确定,具体说可根据对结构响应有主要贡献的若干基本振型的周期来确定,例如 Δt 可选择为 T_p(对应若干基本振型周期中的最小者)的若干分之一。一般说 T_p 比结构系统的最小振动周期 T_n 大得多,所以无条件稳定的隐式算法以 $\hat{\boldsymbol{K}}$ 求逆为代价换得了比有条件稳定的显式算法可以采用大得多的时间步长 Δt。而且采用较大的 Δt 还可滤掉高阶不精确特征解对系统响应的影响。

14.3.3 算例

1. 考虑一两自由度系统,其运动方程是

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{a}}+\begin{bmatrix}6&-2\\-2&4\end{bmatrix}\boldsymbol{a}=\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix} \qquad ①$$

初始条件是:$t=0\quad \boldsymbol{a}_0=0,\ \dot{\boldsymbol{a}}_0=0$

已知此系统自由振动的周期 $T_1=4.45,T_2=2.8$,现用中心差分法求解系统的响应。时间步长(1)$\Delta t=T_2/10=0.28$,(2)$\Delta t=10T_2=28$。

首先利用①式于 $t=0$,可以计算得到

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_0=\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix}$$

现在按中心差分法所列步骤,进行计算:

(1) $\Delta t=0.28$,初始计算:

$$c_0=\frac{1}{(0.28)^2}=12.8,\qquad c_1=\frac{1}{2\times0.28}=1.79$$

$$c_2=2c_0=25.5,\qquad c_3=\frac{1}{c_2}=0.0392$$

$$\boldsymbol{a}_{-\Delta t}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}-0.28\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}+0.0392\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0.392\end{Bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{M}}=12.8\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}+1.79\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25.5&0\\0&12.8\end{bmatrix}$$

对于每一时间步长，先计算有效载荷

$$\hat{Q}_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 45.0 & 2 \\ 2 & 21.5 \end{bmatrix} a_t - \begin{bmatrix} 25.5 & 0 \\ 0 & 12.8 \end{bmatrix} a_{t-\Delta t} \qquad ②$$

再从下列方程计算 $t+\Delta t$ 时间的位移

$$\begin{bmatrix} 25.5 & 0 \\ 0 & 12.8 \end{bmatrix} a_{t+\Delta t} = \hat{Q}_t \qquad ③$$

由上式得到的每一时间步长的位移结果如下：

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
a_t	0	0.0307	0.168	0.487	1.02	1.70	2.40	2.91	3.07	2.77	2.04	1.02
	0.392	1.45	2.83	4.14	5.02	5.26	4.90	4.17	3.37	2.78	2.54	2.60

此结果将在 14.4.4 节中与精确解进行比较。

(2) $\Delta t=28$，按相同的步骤计算，发现

$$a_{\Delta t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3.83\times 10^3 \end{Bmatrix} \qquad a_{2\Delta t} = \begin{Bmatrix} 3.03\times 10^6 \\ -1.21\times 10^7 \end{Bmatrix}$$

再计算下去，位移将继续无限的增大，这是不稳定的典型表现。其原因是在条件稳定的中心差分方法中采用于远大于 $\Delta t_{cr}(=T_2/\pi)$的时间步长 $\Delta t(=28)$，现在的 Δt 是 $10T_2$。所以可不能得到有意义的结果。

2. 采用 Newmark 方法计算上述系统的响应，给定 $\alpha=0.25$，$\delta=0.5$。

(1) $\Delta t=0.28$，初始计算

$$a_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \dot{a}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \ddot{a}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$c_0 = 51.0,\quad c_1 = 7.14,\quad c_2 = 14.3,\quad c_3 = 1.00$$

$$c_4 = 1.00,\quad c_5 = 0.00,\quad c_6 = 0.14,\quad c_7 = 0.14$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 51.0\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & -2 \\ -2 & 55 \end{bmatrix}$$

对于每一时间步长计算有效载荷

$$\hat{Q}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (51a_t + 14.3\dot{a}_t + 1.0\ddot{a}_t)$$

然后求解 $a_{t+\Delta t}$：

$$\hat{K}a_{t+\Delta t} = \hat{Q}_{t+\Delta t}$$

并计算

$$\ddot{a}_{t+\Delta t} = 51.0(a_{t+\Delta t} - a_t) - 14.3\dot{a}_t - 1.0\ddot{a}_t$$

$$\dot{a}_{t+\Delta t} = \dot{a}_t + 0.14\ddot{a}_t + 10\ddot{a}_{t+\Delta t}$$

按上述步骤，得到每一时间步长的位移结果如下：

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
a_t	0.00673	0.0504	0.189	0.485	0.961	1.58	2.23	2.76	3.00	2.85	2.28	1.40
	0.364	1.35	2.68	4.00	4.95	5.34	5.13	4.48	3.64	2.90	2.44	2.31

此结果将在 14.4.4 节中与精确解进行比较。

(2) $\Delta t=28$,按相同步骤可得结果如下

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
a_t	0.393	1.44	0.632	1.29	0.782	1.17	0.875	1.09	0.929	1.05	0.960	1.03
	1.09	4.33	1.89	3.89	2.32	3.52	2.60	3.31	2.77	3.18	2.86	2.11

由于 Newmark 方法在参数 α,δ 采用现在具体数值的情况下是无条件稳定的，所以尽管 $\Delta t\gg T_2$，解仍是稳定的。当然由于 Δt 过大，也不能期望所得结果有很好的精度。这点用 14.4.4 节中所给出的精确解就可以检验出来。

14.4 振型叠加法

分析直接积分法的计算步骤可以看到，对于每一时间步长，其运算次数和半带宽 b 与自由度数 n 的乘积成正比。如果采用有条件稳定的中心差分法，还要求时间步长 Δt 比系统最小的固有振动周期 T_n 小得多(例如 $\Delta t=T_n/10$)。当 b 较大，且时间历程 $T\gg T_n$ 时，计算将是很费时的。而振型叠加法在一定条件下正是一种好的替代，可以取得比直接积分法高的计算效率。其要点是在积分运动方程以前，利用系统自由振动的固有振型将方程组转换为 n 个相互不耦合的方程(即 $b=1$ 的方程组)，对这种方程可以解析或数值地进行积分。当采用数值方法时，对于每个方程可以采取各自不同的时间步长，即对于低阶振型可采用较大的时间步长。这两者结合起来相对于直接积分法是很大的优点，因此当实际分析的时间历程较长，同时只需要少数较低阶振型的结果时，采用振型叠加法将是十分有利的。利用它求解运动方程可分为以下三个主要步骤。

14.4.1 将运动方程转换到正则振型坐标系

1. 求解系统的固有频率和固有振型

不考虑阻尼影响的系统自由振动方程是

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}(t)=0 \tag{14.4.1}$$

它的解可以假设为以下形式

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\phi}\sin\omega(t-t_0) \tag{14.4.2}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}$ 是 n 阶向量，ω 是向量 $\boldsymbol{\phi}$ 振动的频率，t 是时间变量，t_0 是由初始条件确定的时间常数。

将(14.4.2)式代入(14.4.1)式，就得到一广义特征值问题：

$$K\phi - \omega^2 M\phi = 0 \tag{14.4.3}$$

求解以上方程可以确定 ϕ 和 ω，结果得到 n 个特征解 $(\omega_1^2, \phi_1), (\omega_2^2, \phi_2), \cdots, (\omega_n^2, \phi_n)$，其中特征值 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 代表系统的 n 个固有频率，并有

$$0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$$

特征向量 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 代表系统的 n 个固有振型。它们的幅度可按以下要求规定，

$$\phi_i^T M \phi_i = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{14.4.4}$$

这样规定的固有振型又称为正则振型，今后所用的固有振型，只指这种正则振型。现在我们简述其性质。

2. 固有振型的性质

将特征解 $(\omega_i^2, \phi_i), (\omega_j^2, \phi_j)$ 代回方程(14.4.2)式，得到

$$K\phi_i = \omega_i^2 M\phi_i, \; K\phi_j = \omega_j^2 M\phi_j \tag{14.4.5}$$

上式前一式两端前乘以 ϕ_j^T，后一式两端前乘以 ϕ_i^T，并由 K 和 M 的对称性推知

$$\phi_j^T K\phi_i = \phi_i^T K\phi_j \tag{14.4.6}$$

所以可以得到

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\phi_j^T M\phi_i = 0 \tag{14.4.7}$$

由上式可见，当 $\omega_i \neq \omega_j$ 时，必有

$$\phi_j^T M\phi_i = 0 \tag{14.4.8}$$

上式表明固有振型对于矩阵 M 是正交的。和(14.4.4)式在一起，可将固有振型对于 M 的正则正交性质表示为

$$\phi_i^T M\phi_j = \begin{cases} 1, (i = j) \\ 0, (i \neq j) \end{cases} \tag{14.4.9}$$

将上式代回到(14.4.5)式，可得

$$\phi_i^T K\phi_j = \begin{cases} \omega_i^2, \; i = j \\ 0, \; i \neq j \end{cases} \tag{14.4.10}$$

如果定义

$$\Phi = [\phi_1 \; \phi_2 \; \cdots \; \phi_n]$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{14.4.11}$$

则特征解的性质还可表示成

$$\Phi^T M\Phi = I \qquad \Phi^T K\Phi = \Omega^2 \tag{14.4.12}$$

Φ 和 Ω^2 分别称为固有振型矩阵和固有频率矩阵。利用它们，原特征值问题可表示成

$$K\Phi = M\Phi\Omega^2 \tag{14.4.13}$$

3. 位移基向量的变换

引入变换

$$a(t) = \Phi x(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i x_i \tag{14.4.14}$$

其中

$$x(t) = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n]^T$$

此变换的意义是将 $a(t)$ 看成 ϕ_i 的线性组合，ϕ_i 可以看成是广义的位移基向量(坐标)，x_i 是广义的位移值。从数学上看，是将位移向量 $a(t)$ 从以有限元系统的结点位移为基向量的 n 维空间转换到以 ϕ_i 为基向量的 n 维空间。

将此变换代入运动方程(14.1.13)式，两端前乘以 Φ^T，并注意到 Φ 的正交性，则可得到新基向量空间内的运动方程

$$\ddot{x}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = \Phi^T Q(t) = R(t) \tag{14.4.15}$$

初始条件也相应地转换成

$$x_0 = \Phi^T M a_0 \qquad \dot{x}_0 = \Phi^T M \dot{a}_0 \tag{14.4.16}$$

在(14.4.15)式中的阻尼矩阵如果是振型阻尼，则从 Φ 的正交性可得

$$\phi_i^T C \phi_j = \begin{cases} 2\omega_i \xi_i, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases} \tag{14.4.17}$$

或

$$\Phi^T C \Phi = \begin{bmatrix} 2\omega_1\xi_1 & & & \\ & 2\omega_2\xi_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 2\omega_n\xi_n \end{bmatrix} \tag{14.4.18}$$

其中 $\xi_i (i=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 阶振型阻尼比，在此情况下，(14.4.15)式就成为 n 个相互不耦合的二阶常微分方程

$$\ddot{x}_i(t) + 2\omega_i\xi_i\dot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = r_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{14.4.19}$$

上列每一个方程相当于一个单自由度系统的振动方程，可以比较方便地求解。式中 $r_i(t) = \Phi^T Q(t)$，是载荷向量 $Q(t)$ 在振型 ϕ_i 上的投影。若 $Q(t)$ 是按一定的空间分布模式而随时间变化的，即

$$Q(t) = Q(s,t) = F(s)q(t) \tag{14.4.20}$$

则有

$$r_i(t) = \Phi_i^T F(s) q(t) = f_i q(t) \tag{14.4.21}$$

上式中引入符号 s 表示空间坐标，f_i 表示 $F(s)$ 在 ϕ_i 上的投影，是一常数。如 $F(s)$ 和 ϕ_i 正交，则 $f_i = 0$，从而得到 $r_i(t) \equiv 0, x_i(t) \equiv 0$。这表明结构响应中不包含 ϕ_i 的成分。亦即 $Q(s,t)$ 不能激起与 $F(s)$ 正交的振型 ϕ_i。需要求解的单自由度方程数也因之减少。

顺便指出：如果 C 是 Rayleigh 阻尼，即 $C = \alpha M + \beta K$ 则(14.4.18)式还提供了一个确定常数 α 和 β 的方法，如果根据试验或相近似结构的资料已知两个振型阻尼比 ξ_i 和 ξ_j，从(14.4.18)式可以得到二个方程，从而就解得

$$\alpha = \frac{2(\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i)}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)}\omega_i\omega_j \qquad \beta = \frac{2(\xi_j\omega_i - \xi_i\omega_j)}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)} \tag{14.4.22}$$

14.4.2 求解单自由度系统振动方程

单自由度系统的振动方程(14.4.19)的求解，在一般情况下可采用上节讨论的直接积分方法。但在振动分析中常常采用杜哈美(Duhamel)积分，又称为叠加积分。这个方法的基本思想是将任意激振力 $r_i(t)$分解为一系列微冲量的连续作用，分别求出系统对每个微冲量的响应，然后根据线性系统的叠加原理，将它们叠加起来，得到系统对任意激振的响应。杜哈美积分的结果是

$$x_i(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t r_i(\tau)e^{-\xi_i\bar{\omega}_i(t-\tau)}\sin\bar{\omega}_i(t-\tau)d\tau + e^{-\xi_i\bar{\omega}_i t}(a_i\sin\bar{\omega}_i t + b_i\cos\bar{\omega}_i t) \tag{14.4.23}$$

其中 $\bar{\omega}_i=\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}$，$a_i$，$b_i$ 是由起始条件决定的常数。上式右端前一项代表 $r_i(t)$引起的系统强迫振动项，后一项代表在一定起始条件下的系统自由振动项。

当阻尼很小，即 $\xi_i\to 0$ 时，$\bar{\omega}_i=\omega_i$，这时杜哈美积分的结果是

$$x_i(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t r_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau + a_i\sin\omega_i t + b_i\cos\omega_i t \tag{14.4.24}$$

杜哈美积分(14.4.23)或(14.4.24)式，在一般情况下，也需利用数值积分法计算，但是对于少数简单的情况，则可得到解析的结果。

14.4.3 振型叠加得到系统的响应

在得到每个振型的响应以后，按(14.4.14)式将它们叠加起来，就得到系统的响应，亦即每个结点的位移值

$$\boldsymbol{a}(t) = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\phi}_i x_i(t)$$

在叙述了振型叠加法的算法步骤以后，下面再对此方法的一些性质和特点作一定的分析。

首先应看到将系统位移转换到以固有振型为基向量，对系统的性质并无影响，而是以求解广义特征值问题为代价，得到非耦合的 n 个单自由度系统的运动方程，以达到提高计算效率的目的。

对于 n 个单自由度系统运动方程的积分，比对联立方程组的直接积分节省计算费用。另外，通常只要对非耦合运动方程中的一小部分进行积分。例如只要得到对应于前 p 个特征解的响应，就能很好地近似系统的实际响应。这是由于高阶的特征解通常对系统的实际响应影响较小，且有限元法得到的高阶特征解和实际相差也很大(因为有限元的自由度有限，对于低阶特征解近似性较好，而对于高阶则较差)，因此求解高阶特征解的意义不大。而低阶特征解对于结构设计则常常是必需的。但是采用振型叠加法需要增加求解广义特征值问题的计算费用，所以在实际分析中究竟采用哪种方法，应根据具体情况确定。

应指出的另一点是，如果在振型叠加法中，对于 n 个单自由度系统的运动方程都进行积分，且采用和直接积分法相同的积分方案和时间步长，则最后通过振型叠加得到的$\boldsymbol{a}(t)$和直接积分法得到的结果在积分方案的误差和计算机舍入误差的范围内将是一致的。

此外，对于非线性系统通常必须采用直接积分法。因为此时 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(t)$，这样一来系统的特征解也将是随时间变化的，因此无法利用振型叠加法。

14.4.4 算例

仍以 14.3.3 中所考虑的两自由度系统为例，现用振型叠加法求解。此时应解决的广义特征值问题是

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{\phi} = \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{\phi} \qquad ①$$

按照一般的线性代数方法，可以得到①式的解答

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = 2,\ \boldsymbol{\phi}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T \\ \omega_2^2 = 5,\quad \boldsymbol{\phi}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \qquad ②$$

利用②式，可以将原问题转换为以 $\boldsymbol{\phi}_1,\boldsymbol{\phi}_2$ 为基向量的两个相互不耦合的运动方程

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + 2x_1(t) &= \frac{10}{\sqrt{3}} \\ \ddot{x}_2(t) + 5x_2(t) &= -10\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \qquad ③$$

原系统的初始条件是 $\boldsymbol{a}_0=\dot{\boldsymbol{a}}_0=0$，经转换后为，

$$\begin{aligned} x_1|_{t=0} = 0,\ \dot{x}_1|_{t=0} = 0 \\ x_2|_{t=0} = 0,\ \dot{x}_2|_{t=0} = 0 \end{aligned} \qquad ④$$

利用无阻尼情况的杜哈美积分公式(14.4.24)，可得到③式的精确解

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{5}{\sqrt{3}}(1-\cos\sqrt{2}t) \\ x_2(t) &= 2\sqrt{\frac{2}{3}}(-1+\cos\sqrt{5}t) \end{aligned}\right\} \qquad ⑤$$

最后利用振型叠加得到系统的位移

$$\boldsymbol{a}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}}(1-\cos\sqrt{2}t) \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}(-1+\cos\sqrt{5}t) \end{Bmatrix} \qquad ⑥$$

根据上式计算得到时间 $\Delta t, 2\Delta t, \cdots, 12\Delta t$（其中 $\Delta t=0.28$）的位移值如下：

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
$\boldsymbol{a}_t$	0.006 0.376	0.045 1.42	0.170 2.79	0.520 4.12	1.05 5.04	1.72 5.33	2.338 4.985	2.861 4.277	3.052 3.457	2.801 2.806	2.130 2.434	1.157 2.489

此结果是系统响应的精确解，可以用来检验 14.3.3 节中心差分法和 Newmark 方法的结果。两者的比较见图 14.1[1]（图中还列出了另外两种算法的结果）。由图可见，虽然 $\Delta t=0.28$ 比较大，但直接积分法的结果还是相当好的。

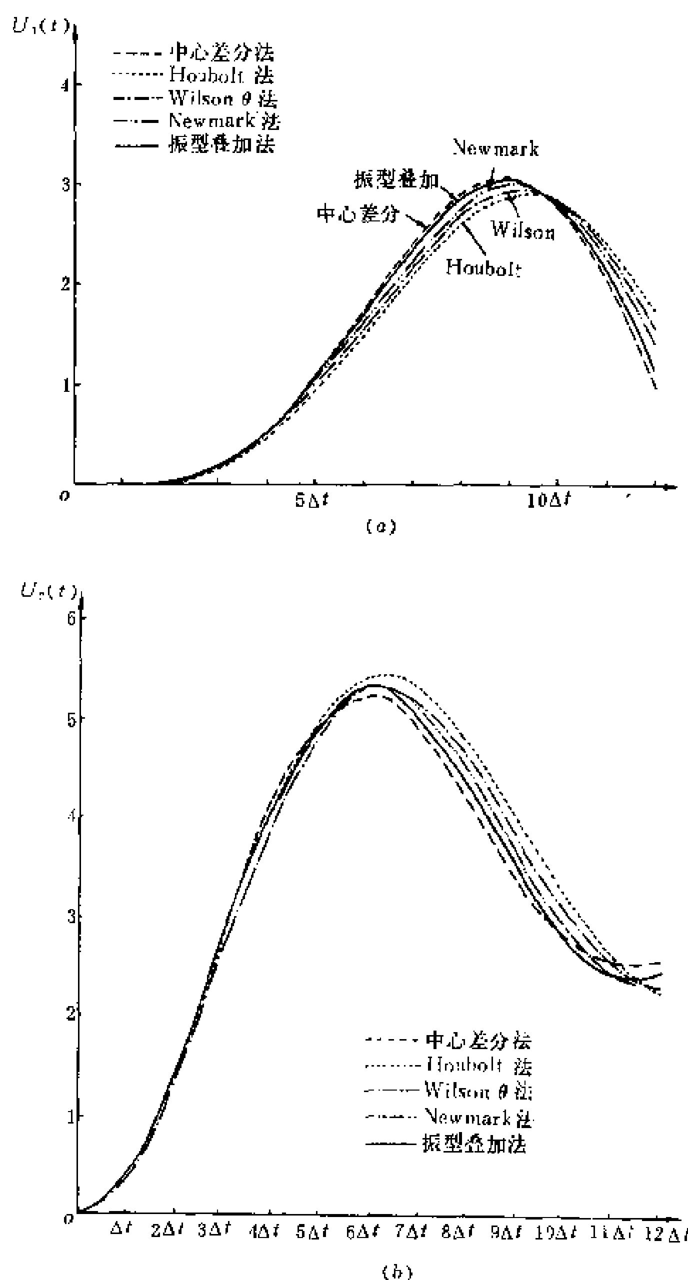


图 14.1 振型叠加法和直接积分法的比较

如果在振型叠加法中，对于非耦合的单自由度系统运动方程③式的积分也采用直接积分法，并且 Δt 相同，则得到和直接积分法完全一致的结果。

当然在一般的 n 个自由度系统中，如果只积分 p 个单自由度系统的运动方程，即使积分是精确的，最后振型叠加所得到的系统响应也将因忽略高阶振型而引入误差。

14.5 解的稳定性

在前面的讨论中已经指出，在选择直接积分结构系统运动方程的具体方案时必须考虑解的稳定性问题，现在对此问题进一步作一简要讨论。

从理论上看，若要得到结构动力响应的精确解答，就应对结构系统的运动方程组(14.1.11)式或是经变换后的 n 个不相耦合的单自由度系统的运动方程(14.4.19)式进行精确积分。同时我们知道，当利用直接积分法对前者进行积分时，实质上是和采用相同的时间步长同时对后者的 n 个方程进行积分相等效。因此，Δt 的选择应和最小固有周期 T_n 相适应，即要求 Δt 选择得很小。例如作为一个估计要求 $\Delta t \sim T_n/10$。

然而，正如前面讨论中已指出，实际结构分析只要求精确地求得相应于前 p 阶固有振型的响应，这里 p 和载荷的频率及其分布有关。如果选择 $\Delta t \sim T_p/10$，即 T_p/T_n 倍于以前的估计 $T_n/10$。这样一来 Δt 就比 $T_n/10$ 大得多了，甚至可达 1000 倍。

当采用直接积分方法时，高阶振型的响应是被自动积分的。当 $\Delta t \gg T_n$ 时，会得到什么结果？从数学上说这就是解的稳定性问题。如果解是稳定的，意思是指当采用较大 Δt 时，不会因高阶振型的误差使低阶振型的解失去意义，也即在某个时间 $t, \boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{a}}, \ddot{\boldsymbol{a}}$ 的误差在积分过程中不会不断增长。解的稳定性定义是：如果在任何时间步长 Δt 条件下，对于任何初始条件的解不无限制地增长，则称此积分方法是无条件稳定的；如果 Δt 必须小于某个临界值 Δt_{cr}，上述性质才能保持，则称此积分方法是有条件稳定的。

在前面的讨论中已经阐明，原运动方程组经变换为 n 个不相耦合的微分方程后，其性质不变，因此可以方便地对非耦合的微分方程讨论解的稳定性。又因为 n 个方程是相似的，故仅需分析其中一个作为代表，将它写成

$$\ddot{x}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = r_i$$

或

$$\ddot{x}_i + C_i\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = r_i \tag{14.5.1}$$

讨论解的稳定性实质上是讨论误差引起的响应，所以在上式中可令 $r_i=0$。另一方面由于在正阻尼情况下，阻尼对解的稳定性是有利的，所以在讨论解的稳定性时，总可令 $C_i=0$。基于上述两点，要讨论的方程是

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0 \tag{14.5.2}$$

14.5.1 中心差分法

利用中心差分法对(14.5.2)式进行积分，根据循环计算公式(14.3.4)，可以写出

$$(x_i)_{t+\Delta t} = -(\Delta t^2\omega_i^2 - 2)(x_i)_t - (x_i)_{t-\Delta t} \tag{14.5.3}$$

假定解的形式为

$$(x_i)_{t+\Delta t} = \lambda(x_i)_t,\ (x_i)_t = \lambda(x_i)_{t-\Delta t} \tag{14.5.4}$$

将上式代入(14.5.3)式，则可得到特征方程

$$\lambda^2 + (p_i - 2)\lambda + 1 = 0 \tag{14.5.5}$$

其中：

$$p_i = \Delta t^2\omega_i^2 \tag{14.5.6}$$

解出上式的根

$$\lambda_{1,2}=\frac{2-p_i\pm\sqrt{(p_i-2)^2-4}}{2} \tag{14.5.7}$$

λ 的根关系到解的性质，首先为使在小阻尼情况下的解具有振荡特性，λ 必须是复数，这就要求

$$(p_i-2)^2-4<0$$

亦即

$$p_i<4 \tag{14.5.8}$$

因为 $p_i=\Delta t^2\omega_i^2$，同时 $\omega_i=2\pi/T_i$，所以从上式得到

$$\Delta t<\frac{T_i}{\pi} \tag{14.5.9}$$

其次为使解不会无限地增长，还应要求

$$|\lambda|\leqslant 1 \tag{14.5.10}$$

(14.5.7)式表示的 $\lambda_{1,2}$的 $|\lambda|=1$，已自动满足上式要求。$|\lambda|=1$ 表示无阻尼的自由振动。

正如以前已一再指出，直接积分法相当于利用同样的时间步长对所有 n 个振型的单自由度方程同时进行积分，因此中心差分法为保持解的稳定性，时间步长必须服从以下条件

$$\Delta t\leqslant\Delta t_{cr}=\frac{T_n}{\pi} \tag{14.5.11}$$

此即在 14.3 节已指出的解的稳定性条件，其中 Δt_{cr}是临界时间步长，T_n 是系统的最小固有周期。实际上并不需要从求解整个系统的固有值问题得到 T_n。关于 T_n 的估计，Irons 已证明系统的最小固有振动周期总是大于等于最小尺寸单元的最小固有振动周期，因此可以简便地将后者用于(14.5.11)式，其结果总是偏于安全的。

14.5.2 Newmark 方法

将 Newmark 方法的循环计算公式(14.3.15)用于(14.5.2)式表示的运动方程，可以得到

$$(1+\alpha\Delta t^2\omega_i^2)(x_i)_{t+\Delta t}=(x_i)_t+\Delta t(\dot{x}_i)_t+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\Delta t^2(\ddot{x}_i)_t \tag{14.5.12}$$

为研究解的稳定性，现将上式改写成类似于(14.5.3)式的三步位移形式，为此需要利用 Newmark 方法的基本假设(14.3.9)式，并利用(14.5.2)式，对于现在的情况，它们可表示成

$$\left.\begin{aligned}&(\dot{x}_i)_{t+\Delta t}=(\dot{x}_i)_t-[(1-\delta)(x_i)_t+\delta(x_i)_{t+\Delta t}]\omega_i\Delta t\\&(x_i)_{t+\Delta t}=(x_i)_t+(\dot{x}_i)_t\Delta t-\left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(x_i)_t+\alpha(x_i)_{t+\Delta t}\right]\omega_i^2\Delta t^2\end{aligned}\right\} \tag{14.5.13}$$

利用上式和(14.5.2)式，(14.5.12)式可以改写成

$$\begin{aligned}(1+\alpha p_i)(x_i)_{t+\Delta t}&+\left[-2+\left(\frac{1}{2}-2\alpha+\delta\right)p_i\right](x_i)_t\\&+\left[1+\left(\frac{1}{2}+\alpha-\delta\right)p_i\right](x_i)_{t-\Delta t}=0\end{aligned} \tag{14.5.14}$$

其中 $p_i=\Delta t^2\omega_i^2$。

仍假设解具有(14.5.4)式的形式，代入上式可以得到关于 λ 的特征方程

$$\lambda^2(1+\alpha p_i)+\lambda\left[-2+\left(\frac{1}{2}-2\alpha+\delta\right)p_i\right]+\left[1+\left(\frac{1}{2}+\alpha-\delta\right)p_i\right]=0 \tag{14.5.15}$$

该方程的根是

$$\lambda_{1,2}=\frac{(2-g)\pm\sqrt{(2-g)^2-4(1+h)}}{2} \tag{14.5.16}$$

其中

$$g=\frac{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)p_i}{1+\alpha p_i},\ h=\frac{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)p_i}{1+\alpha p_i} \tag{14.5.17}$$

现在来分析解稳定性的条件。

1. 真正的解在小阻尼情况下必须具有振荡的性质，因此 λ 应是复数，这就要求

$$4(1+h)>(2-g)^2$$

亦即

$$p_i\left[4\alpha-\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2\right]>-4 \tag{14.5.18}$$

当 p_i 很大时，即 Δt 不受限制时，仍要求上式成立，必须是

$$\alpha\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2 \tag{14.5.19}$$

2. 稳定的解必须不是无限增长的，因此必须有 $|\lambda|=\sqrt{1+h}\leqslant 1$，亦即

$$-1\leqslant h\leqslant 0 \tag{14.5.20}$$

同样，当 p_i 很大时，仍要求上式成立，必须是

$$\delta\geqslant 1/2 \tag{14.5.21}$$

$$\frac{1}{2}-\delta+\alpha\geqslant 0 \tag{14.5.22}$$

因为当条件(14.5.19)式满足时，(14.5.22)式恒成立，所以综合以上分析可以得到 Newmark 方法无条件稳定的条件是

$$\delta\geqslant\frac{1}{2},\ \alpha\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\delta\right)^2 \tag{14.5.23}$$

如果不满足上述条件，要得到稳定的解，时间步长 Δt 必须满足

$$\Delta t<\Delta t_{cr} \tag{14.5.24}$$

上式中 Δt_{cr} 可从(14.5.18)式求得，结果是

$$\Delta t_{cr}=\frac{T_i}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(1/2+\delta)^2-4\alpha}} \tag{14.5.25}$$

现在讨论有关“数值阻尼”的概念。从(14.5.23)式可见，当 $\delta=1/2,\alpha>1/4$ 时解是无条件稳定的，而且从(14.5.17)和(14.5.20)式可得，这时 $|\lambda|=1$。这符合无阻尼自由振动的实际情况。但是如果在计算中，取 $\delta>1/2$，则得到 $|\lambda|<1$。这表明振幅将不断衰减，这是

由于数值计算过程中取 $\delta>1/2$ 这一人为因素而引入的一种“人工”阻尼，称为“数值阻尼”。图 14.2 中给出了在不同的 δ,α 情况下，$|\lambda|$ 随 $\Delta t/T$ 的变化。

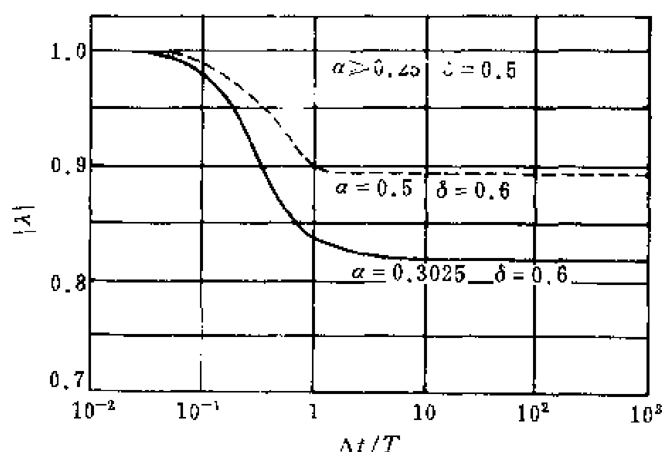


图 14.2 三种 Newmark 方案的 $|\lambda|\sim\Delta t/T$ 曲线

这种数值阻尼在一定条件下是有用的。因为在直接积分法中，我们采用的 Δt 通常均远大于系统最高固有频率所对应的周期。对此频率的响应将是不可靠的，并将产生数值上的干扰。如果通过取 $\delta>1/2$ 而引入数值阻尼，则高频的干扰可迅速衰减，而对低频的响应甚微，这点从图 14.2 也是可以看到的。

14.6 大型特征值问题的解法

在 14.4 节的讨论中我们已经知道，当利用振型叠加法求解系统的运动方程时，首先需要求解一广义特征值问题

$$\boldsymbol{K\phi}-\omega^2\boldsymbol{M\phi}=0 \tag{14.4.3}$$

或

$$\boldsymbol{K\Phi}=\boldsymbol{M\Phi\Omega}^2 \tag{14.4.13}$$

由于在一般的有限元分析中，系统的自由度很多，同时在研究系统的响应时，往往只需要了解少数较低的特征值及相应的特征向量，因此在有限元分析中，发展了一些适应上述特点的效率较高的解法，其中应用较广泛的是矩阵反逆代法和子空间迭代法。前者算法简单，比较适合于只要求得到系统的很少数目特征解的情况。后者实质是将前者推广于同时利用若干个向量进行迭代的情况，可以用于要求得到系统稍多一些特征解的情况，另外，近年来，Ritz 向量直接叠加法和 Lanczos 向量的直接叠加法，由于具有更高的计算效率，引起了有限元工作者广泛的兴趣。它们共同的特点是直接生成一组 Ritz 向量或 Lanczos 向量，对运动方程进行减缩，然后通过求解减缩了的运动方程的特征值问题，进而就可得到原系统方程的特征解，从而避免了反迭代法或子空间迭代法中的迭代步骤。以下对这几种方程逐一进行简要的讨论。

14.6.1 反迭代法

利用反迭代法求解广义特征值问题是依次逐个求得特征解 $(\omega_1^2,\boldsymbol{\phi}_1)$，$(\omega_2^2,\boldsymbol{\phi}_2)$，…。以

求解 ω_1^2 和 ϕ_1 为例，假设系统的 K 和 M 已经形成，其算法步骤可表示如图 14.3 中的框图。现对各框中所包含的算法做些说明和解释。

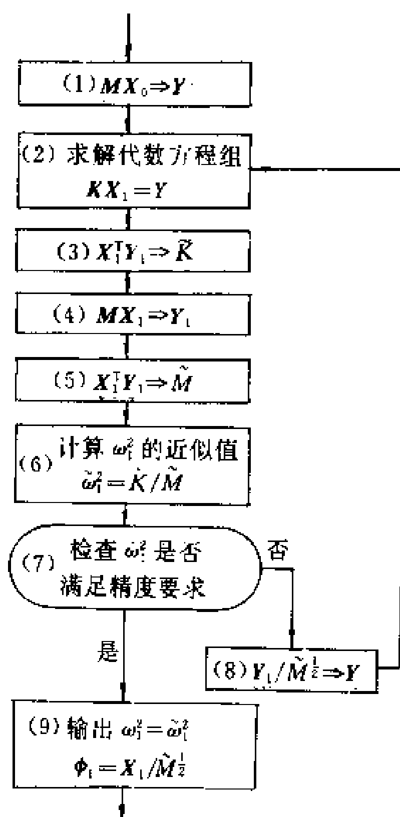


图 14.3 反迭代法的算法框图

(1) 选取初始向量 X_0，并形成向量 Y。

关于初始向量 X_0，原则上可以任意选取，但要求它不和 ϕ_1 正交，即 $X_0^T M\phi_1 \neq 0$。一般情况下，为方便起见，可取 $X_0 = [1\ 1\ \cdots\ 1]^T$。

在选定 X_0 以后，令

$$Y = MX_0 \tag{14.6.1}$$

作为下一步求解方程组的右端项。

(2) 求解线性代数方程组

$$KX_1 = Y \tag{14.6.2}$$

此方程组在每次迭代中都要求解。实际上只是第一次需要对 K 进行分解，在以后的迭代中，只要按改变了的右端项进行回代。

现在来分析每次求解得到的 X_1 和起始向量 X_0 相比有什么变化。

我们知道任何向量均可按特征向量(在振动问题中即固有振型)$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 展开，所以 X_0 可表示为

$$X_0 = \Phi A_0 \tag{14.6.3}$$

其中 $\Phi = [\phi_1\ \phi_2 \cdots\ \phi_n]$是固有振型矩阵。

$A_0=[a_1\ a_2\cdots\ a_n]^T$，其中每个元素 a_i 代表 X_0 在 $\phi_i(i=1,2,\cdots,n)$上的投影。

利用上式和(14.4.13)式可以得到

$$MX_0 = M\Phi A_0 = K\Phi\lambda A_0 = K\Phi A_1 \tag{14.6.4}$$

其中

$$\lambda = (\Omega^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\omega_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\omega_n^2} \end{bmatrix} \qquad A_1 = \lambda A_0 = \left[\frac{a_1}{\omega_1^2}\ \frac{a_2}{\omega_2^2}\ \cdots\ \frac{a_n}{\omega_n^2}\right]^T$$

将上式代入(14.6.2)式，并且两端同乘以 K^{-1}，则可以得到

$$X_1 = \Phi A_1 \tag{14.6.5}$$

这是第一次求解(迭代)后得到的结果，如果经 i 次迭代，则可得到

$$X_1 = \Phi A_i \tag{14.6.6}$$

其中

$$A_i = \lambda^i A_0 = \left[\frac{a_1}{\omega_1^{2i}}\ \frac{a_2}{\omega_2^{2i}}\ \cdots\ \frac{a_n}{\omega_n^{2i}}\right]^T$$

为更明显起见，用 ω_1^{2i} 乘上式两端，得

$$\omega_1^{2i}A_i = \left[a_1\quad \frac{\omega_1^{2i}}{\omega_2^{2i}}a_2\quad \cdots\quad \frac{\omega_1^{2i}}{\omega_n^{2i}}a_n\right]^T \tag{14.6.7}$$

因为 $\omega_1^2<\omega_2^2\cdots<\omega_n^2$，所以随着迭代次数的增加，$\omega_1^{2i}A_i$ 中除第 1 个元素外，其余元素将趋于 0，也即 X_1 将趋于 ϕ_1，这样就证明了反迭代法的收敛性。

(3)，(4)，(5)框的计算是为框(6)利用瑞莱法计算 ω_1^2 的近似值 $\widetilde{\omega}_1^2$ 做准备。据框图所示算式，

$$\widetilde{\omega}_1^2 = \frac{\widetilde{K}}{\widetilde{M}} = \frac{X^TY}{X_1^TY_1} = \frac{X_1^TKX_1}{X_1^TMX_1} \tag{14.6.8}$$

这是因为系统的动能 T 和位能 U 的一般表达式是

$$T = \frac{1}{2}\dot{a}^TM\dot{a} \qquad U = \frac{1}{2}a^TKa \tag{14.6.9}$$

系统按第一固有振型 ϕ_1 作振动时

$$\begin{aligned} a &= \phi_1\sin\omega_1(t-t_0) \\ \dot{a} &= \omega_1\phi_1\cos\omega_1(t-t_0) \end{aligned} \tag{14.6.10}$$

将上式代入(14.6.9)式，可以看出当系统按 ϕ_1 作振动时，动能最大值 T_{max}和位能最大值 U_{max}分别为

$$T_{max} = \frac{1}{2}\omega_1^2\phi_1^TM\phi_1 \quad U_{max} = \frac{1}{2}\phi_1K\phi_1 \tag{14.6.11}$$

根据机械能守恒原理，$T_{max}=U_{max}$，所以得到

$$\omega_1^2 = \frac{\phi_1^TK\phi_1}{\phi_1^TM\phi_1} \tag{14.6.12}$$

由(14.6.8)式和上式的对比可见,随着 X_1 的逐步趋近于 ϕ_1,$\widetilde{\omega}_1^2$ 也将逐步趋近于 ω_1^2。因此 $\widetilde{\omega}_1$ 也可以用来判断迭代是否达到精度要求。

(7) 检查 $\widetilde{\omega}_1^2$ 是否满足精度要求。可利用下式进行判断

$$\left|\frac{\widetilde{\omega}_1^2(i+1)-\widetilde{\omega}_1^2(i)}{\widetilde{\omega}_1^2(i+1)}\right|<e_r \tag{14.6.13}$$

式中 $\widetilde{\omega}_1^2(i+1)$和 $\widetilde{\omega}_1^2(i)$分别是第 $i+1$ 次和第 i 次迭代得到的 $\widetilde{\omega}_1^2$,e_r 是规定的允许误差。

如果精度要求满足,则转入框(9)输出 ω_1^2 和 ϕ_1 的计算结果,否则通过框(8)后再转入框(2)进行新的迭代。

(8),(9)框中,令

$$\phi_1=X_1/\widetilde{M}^{1/2},\quad Y=Y_1/\widetilde{M}^{1/2} \tag{14.6.14}$$

这是对 X_1 进行正则化处理,目的是使 ϕ_1 或新的 X_0 满足

$$\phi_1 M\phi_1=1,\quad X_0^{\mathrm{T}}MX_0=1 \tag{14.6.15}$$

后一式的必要性可以从(14.6.6)式看到,否则多次迭代以后,A_i 的第一式元素可能因过大(当 $\omega_1^2\approx0$)或过小(当 $\omega_1^2\gg0$)而丧失精度。

在求解二阶特征解 ω_2^2 及 ϕ_2 时,应使初始向量 X_0 以及以后每次迭代得到的 X_1 和 ϕ_1 保持正交,即

$$\phi_1^{\mathrm{T}}MX_0=0 \tag{14.6.16}$$

和

$$\phi_1^{\mathrm{T}}MX_1=0 \tag{14.6.17}$$

可通过 Gram-Schmidt 正交化过程实现以上要求。以 X_1 为例,在正交化以前用 $\widetilde{X}_1$ 表示,令

$$\hat{X}_1=\widetilde{X}_1-\phi_1(\phi_1^{\mathrm{T}}M\widetilde{X}_1) \tag{14.6.18}$$

则此时确实存在

$$\phi_1^{\mathrm{T}}M\hat{X}_1=\phi_1^{\mathrm{T}}M\widetilde{X}_1-\phi_1^{\mathrm{T}}M\widetilde{X}_1=0 \tag{14.6.19}$$

为达到正则化,可进一步令

$$X_1=\hat{X}_1/(\hat{X}_1^{\mathrm{T}}M\hat{X}_1)^{1/2} \tag{14.6.20}$$

求解 ϕ_3 时,如有 $\widetilde{X}_1$,它应和 ϕ_1 及 ϕ_2 正交,这时 Gram-Schmidt 正交化过程可表示为

$$\hat{X}_1=\widetilde{X}_1-\phi_1(\phi_1^{\mathrm{T}}M\widetilde{X}_1)-\phi_2(\phi_2^{\mathrm{T}}M\widetilde{X}_1) \tag{14.6.21}$$

$\hat{X}_1$ 再正则化以得到 X_1。

一般地,在求解 ϕ_i 时,如已有 $\widetilde{X}_1$,正交化处理可表示为

$$\hat{X}_1=\widetilde{X}_1-\sum_{j=1}^{i-1}\phi_j(\phi_j^{\mathrm{T}}M\widetilde{X}_1) \tag{14.6.22}$$

从上述求解过程可以看出,在采用反迭代法求解特征值问题时,高阶特征解要受低阶特征解误差的影响。因此用该法求解较多特征解是不适合的。

另方面,还可以从(14.6.7)式看到,当求解第一特征解时,收敛速度与 ω_1^2/ω_2^2 有很大关系,如果二者很接近,收敛速度将是很慢的。此结论可以推广于一般情况,当求解 ω_i^2 时,如果 ω_i^2 和 ω_{i+1}^2很接近,则收敛速度将是很慢的。即用反迭代法于有二个相邻特征值很接近的情况是不适合的。当然,如果没有上述情况,同时所求特征解数目很少时,反迭代法仍

是一种简单而有效的方法。

此外，因为在每一迭代步骤中，需要求解线性代数方程组(14.6.2)式。显然，如果 $\boldsymbol{K}$ 是奇异的，迭代将无法进行。当系统的约束条件不足以消除刚体位移时出现此情况，这时系统有零特征值和刚体位移的固有振型。由 $\boldsymbol{K}$ 的奇异性所带来的困难可采用移动特征值的办法(移频法)来解决。具体做法是将方程(14.4.3)式改写成

$$(\boldsymbol{K} + \alpha \boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi} - (\omega^2 + \alpha)\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} = 0 \tag{14.6.23}$$

或

$$\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{\phi} - \omega^{*2}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} = 0$$

其中 $\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{K} + \alpha\boldsymbol{M}$，$\omega^{*2} = \omega^2 + \alpha$，$\alpha$ 是某个大于零的常数。因为 $\boldsymbol{M}$ 总是正定的，所以新的矩阵 $\boldsymbol{K}^*$ 总是正定的，因此(14.6.23)式可以利用反迭代法求解。解得的特征向量和原问题完全相同，只是原问题中的 ω^2 改为 $\omega^2+\alpha$。这样就克服了原问题中包含零特征值时所带来的困难。

顺便指出：移频法也可用来提高迭代的收敛速度，特别是用于二个特征根接近的情况。例如当 ω_{j-1}^2 求得以后，求解 ω_j^2 时，如前面所分析，收敛速度依赖于 $\frac{\omega_j^2}{\omega_{j+1}^2}$。如果 ω_j^2 和 ω_{j+1}^2 很接近，显然收敛速度将是很低的。但是如果在解得 ω_{j-1}^2 以后移频，即这时将方程(14.4.3)式改写成

$$(\boldsymbol{K} - \alpha \boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi} - (\omega^2 - \alpha)\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} = 0$$

这样一来，求解 ω_j^2 的收敛速度将依赖于 $\frac{\omega_j^2-\alpha}{\omega_{j+1}^2-\alpha}$。如果 α 选取确当，则有

$$\frac{\omega_j^2 - \alpha}{\omega_{j-1}^2 - \alpha} \ll \frac{\omega_j^2}{\omega_{j+1}^2}$$

因此，收敛速度将有很大的提高。

14.6.2 子空间迭代法

子空间迭代法是求解大型矩阵特征值问题的最常用而有效方法之一，适合于求解部分特征解，广泛应用于结构动力学的有限元分析中。

子空间迭代法是假设 r 个起始向量同时进行迭代以求得矩阵的前 $s(<r)$ 个特征值和特征向量。正如前面已指出的，可以将它看成是矩阵反迭代法的推广。正因为如此，图14.4所示的算法步骤，和反迭代法比较，基本上是相似的。现作一定的补充说明和讨论。

(1) 选取初始向量矩阵 $\boldsymbol{X}_0$，并形成矩阵 $\boldsymbol{Y}$

现在的情况下，$\boldsymbol{X}_0$ 表示的不是单一向量，而是 r 个初始向量组成的矩阵

$$\boldsymbol{X}_0 = [\boldsymbol{X}_0^{(1)}\ \boldsymbol{X}_0^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{X}_0^{(r)}] \tag{14.6.24}$$

其中初始向量的个数 r 可按以下方法确定：如果要求系统的前 p 个特征解，则 r 可取 $2\times p$ 和 $p+8$ 中较小的数。

起始向量 $\boldsymbol{X}_0^{(i)}(i=1,2,\cdots,r)$ 原则上可以任意选取，只要它们不和系统的前 s 个特征向量中的任一个正交。例如取 $\boldsymbol{X}_0^{(1)}$ 的全部元素等于1，$\boldsymbol{X}_0^{(i)}(i=2,3,\cdots,n)$ 的元素依次在 $M_{jj}/K_{jj}(j=1,2,\cdots,n)$ 最大的行号上取1，余下的元素全取为零的单位向量 $\boldsymbol{e}$。再有

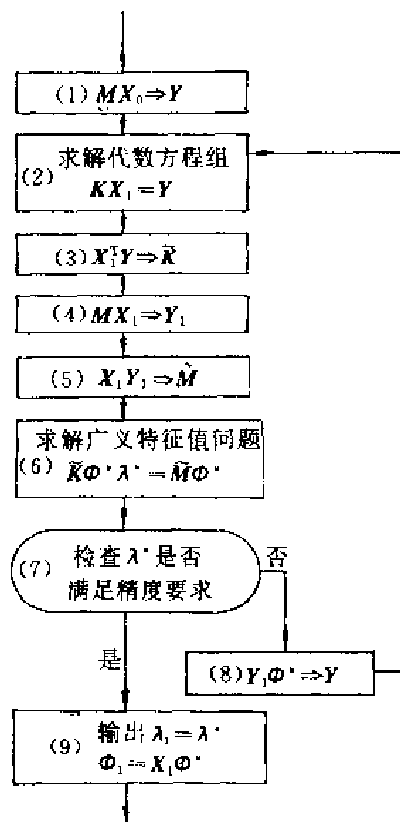


图 14.4 子空间迭代法的算法框图

$X_0^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$全部取随机向量也是一种选择。

(2) 求解线性代数方程组

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{Y} \tag{14.6.25}$$

$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_0$ 在现在的情况下是 $n\times r$ 矩阵。如果 $\boldsymbol{K}$ 的分解已经完成，则在每次迭代中要进行 r 次回代，以得到 $n\times r$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}_1$。

如同讨论反迭代法时一样，现在分析 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_0$ 相比的变化。首先仍将 $\boldsymbol{X}_0$ 表示成

$$\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{A} \tag{14.6.26}$$

此时，$\boldsymbol{A}$ 是 $n\times r$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{bmatrix} \tag{14.6.27}$$

其中每一个元素 a_{ij}代表向量 $\boldsymbol{X}_0^{(j)}$ 在特征向量 $\boldsymbol{\phi}_i$ 上的投影。为下一步讨论需要，(14.6.26)式还可表示成

$$\boldsymbol{X}_0 = [\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}\ \ \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II}}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} \tag{14.6.28}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}} = [\phi_1 \ \phi_2 \cdots \phi_r]$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II}} = [\phi_{r+1} \ \phi_{r+2} \cdots \phi_n]$$

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}$是$r \times r$矩阵，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}$是$(n-r) \times r$矩阵。利用上式和(14.4.13)式，最后可以得到

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}} \tag{14.6.29}$$

其中$\boldsymbol{\lambda}$见(14.6.4)式，且有

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\omega_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\omega_r^2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_{r+1}^2} & & & \\ & \frac{1}{\omega_{r+2}^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\omega_n^2} \end{bmatrix} \tag{14.6.30}$$

和(14.6.28)式比较，由于$\omega_1^2 < \omega_2^2 \cdots < \omega_n^2$，$\boldsymbol{X}_1$中$\boldsymbol{\Phi}_1$的分量增加了，并由此可得到以下近似式

$$\boldsymbol{X}_1 \approx \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}} \qquad \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}} \approx \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}^{-1} \tag{14.6.31}$$

如果对$\boldsymbol{X}_1$中的每一向量进行Gram-Schmidt正交化处理以及正则化处理，然后继续进行迭代，则各次迭代后得到的$\boldsymbol{X}_1$中$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}$的分量将不断增加，并最后趋于$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}$。这种做法称为同时迭代法，其实质仍同反迭代法，因此无法避免前面述及的反迭代法的缺点和限制。而子空间迭代法，每次迭代得到$\boldsymbol{X}_1$以后，先求解一以$\boldsymbol{X}_1$中各个向量为基向量的子空间内的广义特征值问题。通过它的特征向量可以确定$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}$的近似解，然后再以它作为新的起始向量进行迭代，将可较快达到计算目的。

(3)，(4)，(5)框是形成(6)框用以求解$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}$和$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}$近似值的矩阵特征值问题：$\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{\lambda}^* = \widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\Phi}^*$。

首先将$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{M}$转换到$\boldsymbol{X}_1$中各个向量为基向量的子空间，即

$$\widetilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}_1, \ \widetilde{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_1 \tag{14.6.32}$$

可以证明$\widetilde{\boldsymbol{K}}$和$\widetilde{\boldsymbol{M}}$组成的广义特征值问题

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{\lambda}^* = \widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\Phi}^* \tag{14.6.33}$$

的特征值$\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots \lambda_r^*$就是原特征值问题(14.4.13)式的前$r$个特征值的近似值，它的特征向量$\boldsymbol{\Phi}^*$就是原特征值问题的前$r$个特征向量在$\boldsymbol{X}_1$中各向量上的投影所组成的矩阵的近似值，即

$$\boldsymbol{\lambda}^* \approx \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}, \ \boldsymbol{\Phi}^* \approx \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}^{-1} \tag{14.6.34}$$

现加以证明。首先将原特征值问题的方程(14.4.13)式改写为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} \tag{14.6.35}$$

其中

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\Omega}^2)^{-1}$$

(14.6.35)两端前乘以$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}$，后乘以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}$，并利用(14.6.29)，(14.6.31)和(14.6.32)等式，则可得到

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}} \approx \widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}^{-1} \tag{14.6.36}$$

将上式和(14.6.33)式比较可见，两式都表示$\widetilde{\boldsymbol{K}}$和$\widetilde{\boldsymbol{M}}$的广义特征值问题，应当解得相

同的特征值和特征向量。考虑到(14.6.36)式是近似地成立,这样就证明了(14.6.34)式。从以上证明过程也可以看到,如果 X_0 就在 ϕ_1 子空间内,即 $X_0=\phi_1 A_1$,$A_1=0$。只要通过迭代一次,即一次求解减缩了尺寸的广义特征值问题(14.6.33)式,便可得到所要求的 λ_1 和 ϕ_1。这一结论和前面振型迭加法的讨论得到的结论:$Q(s,t)$仅能激起和其空间分布 $F(s)$不正交的振型,结合在一起是以后将讨论的 Ritz 向量直接叠加法的基本出发点。

(6) 求解广义特征值问题

$$\tilde{K}\phi^*\lambda^* = \tilde{M}\phi^* \tag{14.6.33}$$

从形式上看,对应于(6)框求解的减缩广义特征值问题和原来广义特征值问题(14.4.13)式是相同的,但实际上有所不同。因为将 K 和 M 投影到 X_1 中各个向量为基向量的子空间,虽然得到的 $\tilde{K}$ 和 $\tilde{M}$ 不再具有稀疏、带状的特点,但矩阵的阶数大大降低了,所以求解的计算工作量也大大减少了。求解这类阶数较低的广义特征值问题有不少有效的方法,如广义雅可比法、吉文斯-豪斯霍尔德法(简称 G-H 法),均可在关于结构动力学或矩阵特征值的计算方法书籍中查到。这里不再讨论。

从第(6)框得到了 λ^* 和 Φ^* 以后,利用(14.6.34)和(14.6.31)等式,就可得到原特征值问题的前 r 个特征值和相应的特征向量的近似值

$$\lambda_1 \approx \lambda_1^*,\ \Phi_1 = X_1 A_1{}^{I}\lambda_1^{-1} \approx X_1\Phi^* \tag{14.6.37}$$

(7)框是检查 λ_1,主要是前 s 个特征值是否满足精度要求,如不满足则执行(8)框,即以得到的 Φ_1 的近似值 $X_1\Phi^*$ 作为新的起始向量矩阵,并形成新的 Y,

$$Y = MX_1\Phi^* = Y_1\Phi^* \tag{14.6.38}$$

然后回到(2)框,执行新的迭代;如已满足精度要求,则输出原广义特征值问题的前 r 个特征值和特征向量,其中前 s 个是满足精度要求的,至此结束子空间迭代法的整个计算过程。

从以上讨论也可以看出,减缩广义特征值问题(14.6.33)式的阶数等于需要求解的特征解数目 r。当 r 较大时,计算工作量和计算机存储占有量将迅速增加。提高效率的方法之一是,通过特征值的移动和已收敛的特征向量的移出,使 r 保持为较小的数值。在此情况下,可采用 $r=\max[4,\sqrt{b}]$,其中 b 是原方程系数矩阵的半带宽。具体执行是在迭代过程中,如发现 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_j$ 已满足收敛准则,则将特征值移动 s。s 可按下式取值

$$s = \omega_j^2 + 0.9(\omega_{j+1}^2 - \omega_j^2) \tag{14.6.39}$$

或

$$s = 0.99\omega_j^2 \quad 当(\omega_{j+1} - \omega_j)/\omega_j < 0.01 \tag{14.6.40}$$

并将 $X_0^{(1)},X_0^{(2)},\cdots,X_0^{(j)}$ 从迭代向量中移出,同时增加 j 个新的试向量继续迭代。实际计算表明此方法可以显著提高计算效率和改进迭代收敛速度。

14.6.3 Ritz 向量直接叠加法

从 14.4 节的讨论已知,在振型叠加法中,系统的运动方程转换到振型坐标系以后,得到的是一组互不耦合的单自由度运动方程(14.4.19)式。其中右端项 $r_i(t)$是载荷向量 $Q(t)$在 i 阶振型 ϕ_i 上的投影。若 $Q(t)$是按一定的空间分布模式而随时间变化的,即

$$Q(t) = Q(s,t) = F(s)q(t) \tag{14.4.20}$$

则有 $$r_i(t)=\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(s)q(t)=f_iq(t) \tag{14.4.21}$$

式中 f_i 代表 $\boldsymbol{F}(s)$ 在 $\boldsymbol{\phi}_i$ 上的投影。若两者正交，则 $f_i=0$，亦即 $r_i(t)=0$。从而从(14.4.19)式得到 $x_i(t)=0$。此结论表明载荷只能激起与它的空间分布模式 $\boldsymbol{F}(s)$ 不正交的振型。因此系统的响应应是这些与 $\boldsymbol{F}(s)$ 不正交的振型的叠加。而前面讨论的反迭代法和子空间迭代法求得的是结构系统的前 r 阶振型。如果 r 不是足够大，就可能漏掉载荷可以激发起的振型。而另一方面又可能在其中包含了不少载荷激发不起的振型。显然这将影响求解的精度和效率。更为重要地是这些方法所采用的初始向量矩阵中不可避免地包含了 r 阶以上的高阶振型，需要通过多次迭代压缩其影响，使特征解趋近前 r 阶振型。

Ritz 向量直接叠加法的基本点是，根据载荷空间分布模式按一定规律生成一组 Ritz 向量，在将系统运动方程转换到这组 Ritz 向量空间以后，只要求解一次减缩了的标准特征值问题，再经过坐标系的变换，就可得到原系统运动方程的部分特征解。此方法不需像子空间迭代法的多次迭代，所以称之为 Ritz 向量直接叠加法[2]。而且可以避免漏掉可能激起的振型和引入不可能激起的振型，所以能够显著提高计算的效率。当然，此方法的关键点是如何根据载荷的空间分布模式，生成一组 Ritz 向量。其基本步骤如下：

1. 给定　$\boldsymbol{M},\boldsymbol{K},\boldsymbol{Q}$。　其中 $\boldsymbol{Q}(s,t)=\boldsymbol{F}(s)q(t)$

2. 生成　$\boldsymbol{x}_1$。

求解 $$\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{F}(s) \tag{14.6.41}$$

正则化 $$\boldsymbol{x}_1=\hat{\boldsymbol{x}}_1/\beta_1$$

其中 $$\beta_1=(\hat{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{x}}_1)^{1/2} \tag{14.6.42}$$

3. 生成　$\boldsymbol{x}_i$　$(i=2,3,\cdots,r)$。

求解 $$\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}_i=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{i-1} \tag{14.6.43}$$

正交化　$\hat{\boldsymbol{x}}_i=\tilde{\boldsymbol{x}}_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}\boldsymbol{x}_j$。

其中 $$\alpha_{ij}=\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_j \tag{14.6.44}$$

正则化 $$\boldsymbol{x}_i=\hat{\boldsymbol{x}}_i/\beta_i$$

其中 $$\beta_i=(\hat{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{x}}_i)^{1/2} \tag{14.6.45}$$

4. 将方程 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_r=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_r\boldsymbol{\Omega}_r$ 转到 Ritz 向量空间，设

$$\boldsymbol{\Phi}_r=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Phi}^* \tag{16.6.46}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_r=[\boldsymbol{\phi}_1\ \boldsymbol{\phi}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\phi}_r],\quad \boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_r]$$

将上式代入方程(14.4.13)，并用 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 前乘两端，就得到

$$\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{\Phi}^*=\boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{\Omega}_r \tag{16.6.47}$$

5. 求解标准特征值问题(16.6.47)式，得到特征解　$\boldsymbol{\Phi}^*$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_r$。

$$\boldsymbol{\Phi}^*=[\boldsymbol{\phi}_1^*\ \boldsymbol{\phi}_2^*\ \cdots\ \boldsymbol{\phi}_r^*],\quad \boldsymbol{\Omega}_r=\mathrm{diag}(\omega_i^2) \tag{16.6.48}$$

$\boldsymbol{\Omega}_r=\mathrm{diag}(\omega_i^2)$ 是 $\omega_1^2\,\omega_2^2\cdots\,\omega_i^2\cdots\,\omega_r^2$ 组成的对角矩阵。

6. 计算原问题的部分特征向量

$$\boldsymbol{\Phi}_r=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Phi}^*$$

关于 Ritz 向量直接叠加法的实际应用，现再指出以下几点：

1. Ritz 向量的生成何时终止，即 r 的取值。理论上说应终止于 $\tilde{x}_{r+1}=0$，这时 $\tilde{x}_{r+1}=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{r+1,j}x_j$，这表明新生成的 $\tilde{x}_{r+1}$是已生成的 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的线性组合，即现在已不能再生成独立的 Ritz 向量。理论上可以证明已生成的 Ritz 向量已包含了 $Q(s,t)$能激起的全部振型。实际上，由于某些限制不可能也不必要终止于 $\hat{x}_{r+1}=0$。例如结构上受集中力情况，理论上可能激起结构的全部 N 个振型。实际计算当然不可能也不必要生成个数等于结构自由度数 N 的 Ritz 向量，然后再求解经过坐标转换而阶数和原系统运动方程相同的特征值问题。这时生成的 Ritz 向量数应考虑 $Q(s,t)=F(s)q(t)$中 $q(t)$变化频率这一因素。显然，如果 $q(t)=q$，即与时间无关，问题蜕化为静力问题，一次生成得到的 $\hat{x}_1$ 就是问题的最后解答。另一情况是 M 的秩 m 低于系统自由度 N 时(例如杆、板、壳单元组成的结构系统中，采用集中质量矩阵，并忽略转动惯性影响时即属于此情况)，这时系统实际只有 m 个独立自由度，也只可能有 m 个特征解。这时 Ritz 向量数 r 应不大于 m，即必须是 $r\leqslant m$。而且不能再从 $K\hat{x}_1=F(s)$得到 $\hat{x}_1$，必须代之以从 $K\hat{x}_1=MF(s)$得到 $\hat{x}_1$。否则将导致错误的结果[3]。当然在 $\hat{x}_{r+1}\neq 0$ 的情况下，终止 Ritz 向量的继续生成，将使最后结果包含误差，以下介绍一种估计误差的方法。

2. 误差估计的方法。

当按前面所述步骤，Ritz 向量生成终止于 $\hat{x}_{r+1}=0$，并求得原系统的部分特征向量 $\Phi_r=[\phi_1\ \phi_2\cdots\ \phi_r]$，即载荷可能激起的全部振型(在此还应指出，$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r$ 是原系统的特征向量，其对应的 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r$ 也是依从小到大排列，但可能跳过原系统的某些不被激起的特征解)以后，可以将载荷的空间分布模式表示成

$$F(s)=\sum_{i=1}^{r}f_iM\phi_i \tag{14.6.49}$$

其中：

$$f_i=\phi_i^{\mathrm{T}}F(s)$$

如果在 $\hat{x}_{r+1}\neq 0$ 情况下终止 Ritz 向量的继续生成，则有

$$e=F(s)-\sum_{i=1}^{r}f_iM\phi_i\neq 0 \tag{14.6.50}$$

因此误差度量可以定义如下

$$e=\frac{F^{\mathrm{T}}(s)e}{F^{\mathrm{T}}(s)F(s)} \tag{14.6.51}$$

在实际计算中，如果发现误差 e 未满足规定的要求，可以继续生成新的 Ritz 向量，并重新求解标准特征值问题：$K^*\Phi^*=\Phi^*\Omega_r$，从而再求得原系统的较多的部分特征解。因为这几个计算步骤的工作量远小于生成 Ritz 向量的工作量，所以对整个求解的效率并无太大的影响。

3. 动力载荷 $Q(s,t)$具有一个以上空间分布模式情况。例如

$$Q(s,t)=\sum_{l}F_l(s)q_l(t) \tag{14.6.52}$$

为保证不漏掉 $Q(s,t)$可能激起的全部振型，同时保持高的效率，可以不必按不同 $F_l(s)$分别生成 Ritz 向量，而直接采用

$$F(s) = \sum_{l} F_l(s) \quad (14.6.53)$$

作为 $Q(s,t)$ 的空间分布模式，用于生成 Ritz 向量的计算。

4. Ritz 向量直接叠加法也可以用于结构动力特性的分析。为保证不遗漏所要求的结构前 p 阶频率和振型。应假设一个和结构前 p 个特征向量 $\phi_i(i=1,2,\cdots,p)$ 不正交的向量，用于以上所述计算步骤中 $F(s)$ 的位置。通常可采用 N 个随机数作为此向量的元素，也可将此向量表示成 $[1\ 1\ \cdots\ 1]^T$ 或 $[0\ 0\ \cdots\ 0\ 1\ 0\ \cdots\ 0]^T$。根据计算经验，为保证结构的前 p 个特征解有足够精度，关于 Ritz 向量数、通常应取 $r=2p$。

实际计算表明，Ritz 向量直接叠加法比通常采用的子空间迭代法有更高的计算效率。计算工作量经常只是后者的几分之一，甚至十几分之一。而且在计算结构动力响应时，常常有较高的收敛速度。即用相同数目的部分振型进行叠加，Ritz 向量直接叠加法可以有比子空间迭代法更高的精度。这是由于后者产生的部分振型中可能包含实际上不被激起的振型。详细的讨论和算例可参见文献[2]。

14.6.4 Lanczos 方法

Lanczos 方法和以上讨论的 Ritz 向量直接叠加法本质上是一致的。两者采用基本相同的步骤生成一组相互正交的 Ritz 向量(在 Lanczos 方法中称为 Lanczos 向量)。具体差别是在 Lanczos 方法中利用了关于 Ritz 向量直接叠加法中的系数 α_{ij} 的某些性质。这是因为从理论上可以证明

$$\alpha_{ij} = 0 \quad (j = i-3, i-4, \cdots, 1) \quad (14.6.54)$$

$$\alpha_{i,i-2} = \beta_{i-1} \quad (14.6.55)$$

将上式引入 Ritz 向量直接叠加法，并记

$$\alpha_{i,i-1} = \alpha_{i-1}, \quad K^{-1}M = A \quad (14.6.56)$$

就得到生成 Lanczos 向量的算法公式如下：

1. 给定 M, K, Q。其中 $Q(s,t)=F(s)q(t)$。

2. 生成 x_1。

求解

$$K\hat{x}_1 = F(s) \quad (14.6.57)$$

正则化 $x_1=\hat{x}_1/\beta_1$。

其中

$$\beta_1 = (\hat{x}_1^T M \hat{x}_1)^{1/2} \quad (14.6.58)$$

3. 生成 $x_i \quad (i=2,3,\cdots,r)$。

求解

$$K\tilde{x}_i = Mx_{i-1} \quad (14.6.59)$$

正交化

$$\hat{x}_i = \tilde{x}_i - \alpha_{i-1}x_{i-1} - \beta_{i-1}x_{i-2} \quad (14.6.60)$$

其中

$$\alpha_{i-1} = \tilde{x}_i M x_{i-1} \quad (14.6.61)$$

(插入必要的重正交步骤，见以后讨论)

正则化 $x_i=\hat{x}_i/\beta_i$。

其中

$$\beta_i = (\hat{x}_i^T M \hat{x}_i)^{1/2} \quad (14.6.62)$$

4. 将原广义特征值问题 $K\Phi_r = M\Phi_r\Omega_r$ 转换为 Lanczos 向量内三对角矩阵 T 的标准特征值问题

$$TZ = Z\lambda \tag{16.6.63}$$

其中

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{14.6.64}$$

(上式的推导,见以后讨论)

5. 求解标准特征值问题(16.6.63)式,得到特征解:Z 和 λ

$$Z = [z_1\ z_2\ \cdots\ z_r],\ \lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i) \tag{14.6.65}$$

6. 计算原问题的部分特征解

$$\Phi_r = XZ, \quad \Omega_r = \lambda^{-1}$$

即

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\lambda_i} \quad (i = 1,2,\cdots,r) \tag{14.6.66}$$

关于方程(16.6.63)式的推导可简述如下:

从(16.6.59)、(16.6.60)和(16.6.62)式可以得到

$$Ax_{i-1} = \beta_i x_i + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i-1} x_{i-2} \tag{14.6.67}$$

$$(i = 2,3,\cdots,\text{并有 } x_0 = 0)$$

其中 $A=K^{-1}M$。进一步将上式改写成矩阵形式,则有

$$AX = XT \tag{14.6.68}$$

其中 $X=[x_1\ x_2\cdots\ x_r]$,T 如(16.6.64)式所示。

引入原特征向量和 Lanczos 向量间的变换

$$\Phi_r = XZ \tag{14.6.69}$$

其中 Z 是 $r\times r$ 的矩阵。将上式引入原方程,再用 X^TMK^{-1}前乘、$\lambda=\Omega_r^{-1}$ 后乘方程两端,并利用(14.6.68)式和正则化关系式 $X^TMX=I$,就得到(14.6.63)式。

关于 Lanczos 方法的实际应用,前面关于 Ritz 向量直接叠加法所指出的四点同样适用。这是由于本小节开始所指出的,这两种方法在本质上是相同的。现在对于 Lanczos 方法需要着重再强调的是 Lanczos 向量的重正交问题。Lanczos 方法中,$\tilde{x}_i(i=2,3,\cdots,r)$的正交化算式(14.6.60)式和 Ritz 向量直接叠加法的对应算式比较,是略去了 $\alpha_{ij}x_j(j=i-3,i-4,\cdots,1)$项。其根据是因为理论上可以证明 $\alpha_{ij}=0(j=i-3,i-4,\cdots,1)$。也就是说 $\tilde{x}_i$ 在理论上已事先满足和 $x_j(j=i-3,i-4,\cdots,1)$正交的条件。但是在实际计算上,由于计算机的截断误差和舍入误差,将可能使后继生成的 x_i 失去了和先前生成的 $x_j(j=i-3,i-4,\cdots,1)$的正交性,甚至出现和它们相平行的情况。这将导致数值上的不稳定性(例如虚假的多重特征值现象),因此妨碍了 Lanczos 方法的实际应用。在 70 年代以后,很多研究工作者提出了不少 Lanczos 向量重正交技术以提高其算法的稳定性。Ritz 向量直接叠加法从这个意义说也可认为是其中的一种。但是由于它改变了生成 Lanczos 向量的算法公

式，导致以后求解的不是三对角矩阵的特征值问题，而是一般矩阵的特征值问题。而通常所说的 Lanczos 向量重正交方法是指保持生成 Lanczos 向量的算法公式不变，只是在生成过程中嵌入重正交的步骤，所以最后仍求解三对角矩阵的特征值问题。例如，文献[3]中所用的重正交方法的具体做法是在(14.6.61)式和(14.6.62)式之间嵌入以下算式

$$\hat{x}_i^{(s+1)} = \hat{x}_i^{(s)} - \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_{ij}^{(s)} x_j \quad (s = 0,1,2,\cdots) \tag{14.6.70}$$

其中

$$\varepsilon_{ij}^{(s)} = \hat{x}_i^{(s)T} M x_j \tag{14.6.71}$$

上式中的 $\hat{x}_i^{(0)}$ 即(14.6.60)式中 $\hat{x}_i$。以上迭代计算终止于 $\varepsilon_{ij}^{(s)}$ 满足某个规定的误差(例如 $\varepsilon_{ij}^{(s)} < 10^{-12}$)，或 s 达到某个规定的 $S_{\max}$。然后将 $\hat{x}_i^{(s+1)}$ 恢复写成 $\hat{x}_i$，继续进行(14.6.62)式的正则化运算。当然还有其它重正交技术，可参阅其它文献。总之 Lanczos 方法和 Ritz 向量直接叠加法的精度和效率的进一步比较，以及更有效算法的研究，都是值得进一步探索的。

14.7 减缩系统自由度的方法

对于具有相同自由度数目的结构系统，即使是求解频率和振型的特征值问题，计算费用也将比静力分析高出一个量级。如果是求解系统的动力响应问题，计算费用将更可观，因此在有限元动力分析中，发展提高计算效率、降低费用的数值方法是很有意义的。减缩系统自由度数目是广泛采用的方法之一。以下扼要地讨论两种减缩自由度的方法：主从自由度法和模态综合法。

14.7.1 主从自由度法

在 14.2 节中已经指出刚度矩阵积分表达式中的被积函数和位移的导数有关，而质量矩阵只和位移有关，因此在相同精度要求的条件下，质量矩阵可用较低阶的插值函数。基于上述考虑，在该节中提出了集中质量矩阵。现在还可利用上述提示进一步提出一种减缩自由度的方法，即主从自由度法。在此方法中，将根据刚度矩阵要求划分的网格总自由度，即位移向量 $\boldsymbol{a}$，分别为 $\boldsymbol{a}_m$ 和 $\boldsymbol{a}_s$ 两部分。并假定 $\boldsymbol{a}_s$ 按照一种确定的方法依赖于 $\boldsymbol{a}_m$。因此 $\boldsymbol{a}_m$ 称为主自由度，而 $\boldsymbol{a}_s$ 称为从自由度。这样一来，如果 $\boldsymbol{a}_s$ 用 $\boldsymbol{a}_m$ 表示如下：

$$\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}_m \tag{14.7.1}$$

则有

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{T}^* \boldsymbol{a}_m \tag{14.7.2}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{T}$ 规定了 $\boldsymbol{a}_s$ 和 $\boldsymbol{a}_m$ 之间的依赖关系。

以无阻尼的自由振动方程为例，

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}} = 0 \tag{14.7.3}$$

可以利用关系式(14.7.2)减缩其自由度数。具体做法是将(14.7.2)式代入(14.7.3)式，并前乘以 $\boldsymbol{T}^{*\mathrm{T}}$，得到

$$\boldsymbol{K}^* \boldsymbol{a}_m + \boldsymbol{M}^* \ddot{\boldsymbol{a}}_m = 0 \tag{14.7.4}$$

其中：

$$K^{*} = T^{*T}KT^{*}, \quad M^{*} = T^{*T}MT^{*} \tag{14.7.5}$$

显然现在所求系统的自由度得到缩减，但重要的问题是如何合理地确定 a_s 和 a_m 之间的关系。采用以下假设从工程直觉看来是比较合理的，即将 a_m 按静力方式施加于同一结构且不受其他载荷，由在结构内引起的变形模式确定 a_s 和 a_m 之间的关系。根据上述假定，可建立静力平衡方程

$$Ka = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ a_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_m \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{14.7.6}$$

从上式的第二式，得到

$$K_{sm}a_m - K_{ss}a_s = 0 \tag{14.7.7}$$

或

$$a_s = -K_{ss}^{-1}K_{sm}a_m$$

这样就得到了 a_s 和 a_m 之间的关系

$$T = -K_{ss}^{-1}K_{sm} \tag{14.7.8}$$

如将上式代入(14.7.2)和(14.7.5)式，可以得到现在情况下的 K^* 和 M^*

$$\left.\begin{aligned} K^{*} &= K_{mm} - K_{sm}^{T}K_{ss}^{-1}K_{sm} \\ M^{*} &= M_{mm} - K_{sm}^{T}K_{ss}^{-1}M_{sm} - M_{ms}K_{ss}^{-1}K_{sm} \\ &\quad + K_{sm}^{T}K_{ss}^{-1}M_{ss}K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{aligned}\right\} \tag{14.7.9}$$

显然 K^*，M^* 仍是对称矩阵，它们的阶数比 K，M 减小了，解之可得到各阶频率和振型。当然，各阶振型中现在是不包含 a_s 的，对应于各阶振型的 a_s 可以用(14.7.7)式求得。

需要指出的是虽然 K^*、M^* 的阶数低于 K，M，但带宽常常有所增加，因此只有采用较多的从自由度，才能带来比较明显的计算上的好处。

另外，采用(14.7.7)式建立 a_s 和 a_m 之间的关系，实质上是假定对应于 a_s 自由度上的惯性力项已按静力等效原则转移到 a_m 自由度上。这只是当对应于这些自由度质量较小，而刚度较大，以及频率较低时才能认为合理。随着频率的升高，误差也将增大，所以采用主从自由度方法时，通常不宜分析高阶的频率和振型。

例 图 14.5 所示为一方形悬臂板的振动问题，采用三角形非协调平板单元进行离散。保留全部自由度 30×3=90 为主自由度，以及主自由度分别为 54，18 和 6，图中列出了这四种情况求解前四阶频率的结果。可以看出当主自由度减缩到 18(为原来 90 的1/5)时，第 4 阶频率相差仅不到 1%。即使主自由度减缩到 6(为原来的 1/15)时，相差也仅为 9%。说明此种减缩自由度的方法是相当有效的。

14.7.2 模态综合法

为了阐明模态综合法的基本概念和特点，以及了解它是如何减缩自由度的，我们先来考查模态综合法分析实际结构的主要步骤：

1. 将总体结构分割为若干子结构

如同静力分析中的子结构法，依照结构的自然特点和分析的方便，将结构分成若干(例如 r 个)子结构。各个子结构通过交界面上的结点相互联结。

		振型 $\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
	保留全部自由度 自由度=30×3 =90	1 3.469 2 8.535 3 21.450 4 27.059
	消去○以外的自由度 主自由度=18×3 =54	1 3.470 2 8.540 3 21.559 4 27.215
	只保留○的横向自由度 主自由度=18×1 =18	1 3.470 2 8.543 3 21.645 4 27.296
	只保留○的横向自由度 主自由度=6×1 =6	1 3.473 2 8.604 3 22.690 4 29.490

图 14.5 主从自由度法用于分析悬臂方板

2. 子结构的模态分析

首先仍以结点位移为基向量(简称物理坐标)建立子结构的运动方程

$$M^{(s)}\ddot{a}^{(s)} + C^{(s)}\dot{a}^{(s)} + K^{(s)}a^{(s)} = Q^{(s)} + R^{(s)} \tag{14.7.10}$$

其中上标(s)表示该矩阵或向量是属于子结构 $s(s=1,2,\cdots,r)$的。$Q^{(s)}$代表外载荷向量，$R^{(s)}$代表交界面上的力向量。$a^{(s)}$代表结点位移向量。以后经常将$a^{(s)}$分为内部位移$a_i^{(s)}$和界面位移$a_j^{(s)}$两部分。相应地外载荷$Q^{(s)}$和界面力也可分为两部分。这样一来$a^{(s)}$,$Q^{(s)}$,$R^{(s)}$可表示成

$$a^{(s)} = \begin{Bmatrix} a_i^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix},\ Q^{(s)} = \begin{Bmatrix} Q_i^{(s)} \\ Q_j^{(s)} \end{Bmatrix},\ R^{(s)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_j^{(s)} \end{Bmatrix} \tag{14.7.11}$$

因此,方程(14.7.10)式可以表示成

$$\begin{bmatrix} M_{ii}^{(s)} & M_{ij}^{(s)} \\ M_{ji}^{(s)} & M_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{a}_i^{(s)} \\ \ddot{a}_j^{(s)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_{ii}^{(s)} & C_{ij}^{(s)} \\ C_{ji}^{(s)} & C_{jj}^{(s)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{a}_i^{(s)} \\ \dot{a}_j^{(s)} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ij}^{(s)} \\ K_{ji}^{(s)} & K_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i^{(s)} \\ Q_j^{(s)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ R_j^{(s)} \end{Bmatrix} \tag{14.7.12}$$

对于无阻尼的自由振动，子结构运动方程可以写成

$$\begin{bmatrix} M_{ii}^{(s)} & M_{ij}^{(s)} \\ M_{ji}^{(s)} & M_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{a}_i^{(s)} \\ \ddot{a}_j^{(s)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ij}^{(s)} \\ K_{ji}^{(s)} & K_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_j^{(s)} \end{Bmatrix} \tag{14.7.13}$$

下一步是将方程(14.7.10)式转换到以模态为基向量(即模态坐标)的空间。所谓模态在固定界面的模态综合法中包含以下两部分：

(1) 固定界面主模态，即在完全固定交界面上的位移(即令 $a_j^{(s)}=0$)条件下子结构系统的主振型。可以从引入 $a_j^{(s)}=0$ 后的方程(14.7.13)式求得，即求解以下特征值问题：

$$M_{ii}^{(s)}\ddot{a}_i^{(s)} + K_{ii}^{(s)}a_i^{(s)} = 0 \tag{14.7.14}$$

可以得到 i 个(i 是内部自由度数，即 $a_i^{(s)}$ 的阶数)主模态。将它们组合成矩阵用 Φ_N 表示，并认为 Φ_N 已经正则比，即

$$\Phi_N^{\mathrm{T}}M_{ii}^{(s)}\Phi_N = I_i$$

$$\Phi_N^{\mathrm{T}}K_{ii}^{(s)}\Phi_N = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_i^2 \end{bmatrix} = \Omega_i^2 \tag{14.7.15}$$

(2) 约束模态，即在界面完全固定条件下，依次释放界面上的每个自由度(即 $a_j^{(s)}$ 的每个元素)，并令它取单位值所得到的静态位移。可以从(14.7.13)式的静力形式

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ij}^{(s)} \\ K_{ji}^{(s)} & K_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_j^{(s)} \end{Bmatrix} \tag{14.7.16}$$

求得。从上式的第一式可得

$$a_i^{(s)} = -(K_{ii}^{(s)})^{-1}K_{ij}^{(s)}a_j^{(s)} \tag{14.7.17}$$

令 $a_j^{(s)}$ 中的 j 个元素依次取单位值，其余为零，求得相应的 j 组静态位移向量，即约束模态。将它们组合成矩阵形式，并表示为 Φ_j，则有

$$\Phi_j = -(K_{ii}^{(s)})^{-1}K_{ij}^{(s)}I_j = -(K_{ii}^{(s)})^{-1}K_{ij}^{(s)} \tag{14.7.18}$$

在得到固定界面主模态 Φ_N 和约束模式 Φ_j 以后，$i+j$ 个物理坐标可用相同数目的模态坐标表示为

$$\begin{Bmatrix} a_i^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_N & \Phi_j \\ 0 & I_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} \tag{14.7.19}$$

上式表示两种坐标之间的转换关系。

需要指出，如果直接将上述转换引入运动方程，并不能达到减缩自由度的目的，为此可以在 Φ_N 中略去高阶主模态，而只保留 k 列低阶主模态 Φ_K。这样减缩以后，上式可表示成

$$\begin{Bmatrix} a_i^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_k & \Phi_j \\ 0 & I_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_k^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} x_k^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} \tag{14.7.20}$$

利用上式可以将原来的运动方程转换到模态坐标空间。以无阻尼自由振动方程(14.7.13)式为例,将上式代入并用 T^T 前乘方程两端,就得到

$$\overline{M}^{(s)} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_k^{(s)} \\ \ddot{a}_j^{(s)} \end{Bmatrix} + \overline{K}^{(s)} \begin{Bmatrix} x_k^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_j^{(s)} \end{Bmatrix} \tag{14.7.21}$$

其中

$$\overline{M}^{(s)} = T^{\mathrm{T}} M^{(s)} T = \begin{bmatrix} \overline{M}_{kk}^{(s)} & \overline{M}_{kj}^{(s)} \\ \overline{M}_{jk}^{(s)} & \overline{M}_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \tag{14.7.22}$$

$$\begin{aligned}
\overline{M}_{kk}^{(s)} &= \Phi_k^{\mathrm{T}} M_{ii}^{(s)} \Phi_k = I_k^{(s)} \\
\overline{M}_{jj}^{(s)} &= M_{jj}^{(s)} + \Phi_j^{\mathrm{T}} M_{ij}^{(s)} + M_{ji}^{(s)} \Phi_j + \Phi_j^{\mathrm{T}} M_{ii}^{(s)} \Phi_j \\
\overline{M}_{kj}^{(s)} &= \overline{M}_{jk}^{(s)\mathrm{T}} = \Phi_k^{\mathrm{T}} M_{ij}^{(s)} + \Phi_k^{\mathrm{T}} M_{ii}^{(s)} \Phi_j \\
\overline{K}^{(s)} &= T^{\mathrm{T}} K^{(s)} T = \begin{bmatrix} \overline{K}_{kk}^{(s)} & \overline{K}_{kj}^{(s)} \\ \overline{K}_{jk}^{(s)} & \overline{K}_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \\
\overline{K}_{kk}^{(s)} &= \Phi_k^{\mathrm{T}} K_{ii}^{(s)} \Phi_k = \Omega_k^{2(s)} \\
\overline{K}_{jj}^{(s)} &= K_{jj}^{(s)} + \Phi_j^{\mathrm{T}} K_{ij}^{(s)} + K_{ji}^{(s)} \Phi_j + \Phi_j^{\mathrm{T}} K_{ii}^{(s)} \Phi_j \\
\overline{K}_{kj}^{(s)} &= K_{jk}^{(s)\mathrm{T}} = \Phi_k^{\mathrm{T}} K_{ij}^{(s)} + \Phi_k^{\mathrm{T}} K_{ii}^{(s)} \Phi_j \\
&= \Phi_k^{\mathrm{T}} (K_{ij}^{(s)} + K_{ii}^{(s)} \Phi_j) = 0
\end{aligned}$$

上式中 $\overline{M}_{kk}^{(s)} = I_k$, $\overline{K}_{kk}^{(s)} = \Omega_k^2$ 是因为(14.7.15)式,$\overline{K}_{kj}^{(s)} = \overline{K}_{jk}^{(s)\mathrm{T}} = 0$ 是因为(14.7.18)式。如将以上结果代回至(14.7.21)式,则可将模态坐标空间内的子结构运动方程最后表示成

$$\begin{bmatrix} I_k^{(s)} & \overline{M}_{kj}^{(s)} \\ \overline{M}_{kj}^{(s)\mathrm{T}} & \overline{M}_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_k^{(s)} \\ \ddot{a}_j^{(s)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_k^{2(s)} & 0 \\ 0 & \overline{K}_{jj}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_k^{(s)} \\ a_j^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_j^{(s)} \end{Bmatrix} \tag{14.7.23}$$

3. 综合各子结构的运动方程得到整个结构系统的运动方程并求解

各子结构界面上的位移 $a_j^{(s)}$ 实际上是子结构之间保证满足位移协调条件的公共坐标,利用它将各个子结构的运动方程集合成整个结构系统的运动方程。以两个子结构的系统为例,这时 $s=1,2$,位移协调条件是 $a_j^{(1)} = a_j^{(2)} = a_j$。综合这两个子结构得到整个结构系统的运动方程为

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{14.7.24}$$

其中:

$$M = \begin{bmatrix} I_k^{(1)} & 0 & \overline{M}_{kj}^{(1)} \\ 0 & I_k^{(2)} & M_{kj}^{(2)} \\ \overline{M}_{kj}^{(1)T} & \overline{M}_{kj}^{(2)T} & \overline{M}_{jj}^{(1)} + \overline{M}_{jj}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \Omega_k^{2(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_k^{2(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{K}_{jj}^{(1)} + \overline{K}_{jj}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$x = [x_k^{(1)T} \; x_k^{(2)T} \; x_j^T]^T$$

右端项为零是因为 $R_j^{(1)} + R_j^{(2)} = 0$。

求解方程(14.7.24)式可以得到各阶固有频率和模态坐标中的主振型。求解此方程的方法同 14.6 节的讨论,应该指出,其阶数比直接在物理坐标中建立的系统运动方程大大减缩了,这是在各个子结构模态分析过程中引入模态坐标后对自由度进行大量减缩的

结果。

如果整个结构系统方程表达的是包括阻尼和外载荷的动力响应问题。和 14.3 节讨论的相同，可以用直接积分法或振型叠加法求解其模态坐标中的动力响应。

4. 由模态坐标返回到各子结构的物理坐标

因为实际问题中感兴趣的常常是物理坐标中的振动特性，例如对应于各阶固有频率的物理坐标所表达的主振型，以及在各种载荷作用下引起的位移、应力等响应，因此必须完成由模态坐标返回各子结构物理坐标的转换。即按(14.7.19)式，由 $x_N^{(s)}$ 和 $a_j^{(s)}$ 算出 $a_i^{(s)}$，从而进一步得到实际结构的主振型和位移、应力等动态响应。

例 1 两端铰支等直梁，对称划分为两个子结构，每个子结构有 11 个结点(10 个二结点梁单元)，每个结点 3 个自由度，共 33 个自由度(包括两个原有的端面约束和 3 个界面自由度)。每个子结构取 3 个主模态和 3 个约束模态，整个结构系统的自由度为 9，用模态综合法计算得到的前四阶频率和解析解的比较如下：

频率阶次	解析解	模态综合解
f_1/Hz	568.26	568.13
f_2/Hz	2273.05	2270.92
f_3/Hz	5114.37	5106.03
f_4/Hz	9092.22	9096.28

例 2 图 14.6 所示为一悬臂矩形板，划分为两个子结构，有限元网格划分表示如图，每个子结构取 5 个主模态，界面自由度为 18，所以综合后整个结构系统的自由度为 28。模态综合法计算的前 10 阶频率和整个板根据图示网格直接用有限元分析的结果比较如下：

频率阶次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
有限元解	29.11	44.14	83.22	152.3	174.6	198.0	247.3	272.3	343.4	400.4
模态综合解	29.13	44.17	83.31	152.8	175.1	198.3	249.1	273.6	352.8	427.9
误差%	0.06	0.05	0.10	0.28	0.27	0.16	0.69	0.45	2.15	6.87

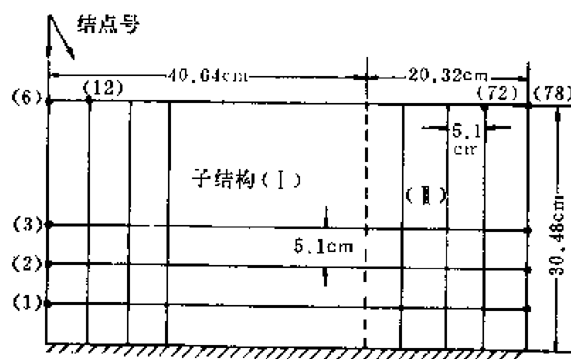


图 14.6 悬臂矩形板的单元及子结构划分

14.8 小　　结

本章着重讨论了结构动力学问题有限元分析数值方法中的几个基本问题。

在结构动力学有限元求解方程的解法中，关于二阶常微分方程组的直接积分法，分别以中心差分法和 Newmark 法为代表讨论了显式算法和隐式算法的各自算法步骤、特点、稳定性条件和适合使用的情况。作为求解动力学问题的基本方法，直接积分法除上述两种方法而外，还发展不少其他的显式算法、隐式算法，以及两者结合的混合算法，但本章所讨论的内容为理解和掌握其他算法提供了必要的基础。

振型叠加法也是动力分析中的一种成熟而为广泛应用的方法，其基本概念和步骤已见诸一般的结构动力学或振动理论的教材当中。但推广用于有限元分析、特别是对于大型复杂系统的分析，由于系统的自由度很多，因此必须发展抽取大型矩阵特征值问题的部分特征解的有效方法。本章所讨论的反迭代法和子空间迭代法是现行最常用的基本算法，而 Ritz 向量直接叠加法和 Lanczos 方法则是近年来受到重视的算法。以上这些方法的要点和相互区别在于初始向量(Ritz 向量)的选取和迭代过程中向量之间相互正交技术的选择，从而影响到整个求解过程的效率和精度。这是应予注意理解和把握的基本点。

动力子结构方法能够大幅度地缩减动力分析的规模，除本章介绍的固定界面子结构法而外，还有自由界面和混合界面的子结构法等，其基本点和区别也在于子结构参加系统集成的基本自由度(也可称 Ritz 基向量)的选取。子结构方法中也必须求解大型矩阵特征值问题的部分特征解，最后集成的系统方程也常常应用直接积分法求解，因此对大型复杂系统的动力分析，需要综合地、灵活地应用本章所讨论的各方面内容。

习　　题

14.1　试求矩形非协调板单元(10.2.1 节)的协调质量矩阵和集中质量矩阵。

14.2　分别用协调质量矩阵和集中质量矩阵求图 14.7 所示变截面均质杆的固有频率和振型。

14.3　用中心差分法、集中质量矩阵求题 14.2 变截面杆在图 14.8 所示外载作用下的响应(初始条件：$u(x,0)=\dot{u}(x,0)=0$)。

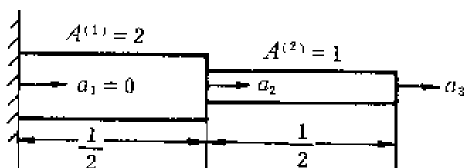


图　14.7

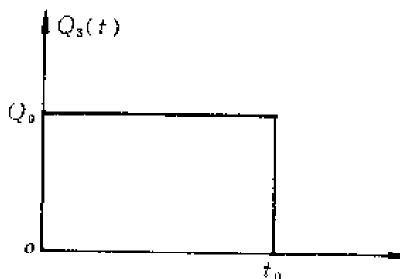


图　14.8

14.4 用 Newmark 方法求解题 14.3。

14.5 用振型叠加法求解题 14.3。

14.6 如有：

$$X_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\quad X_2=\begin{Bmatrix}1\\1\\-1\end{Bmatrix}\quad X_3=\begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix}$$

并有：

$$M=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Bmatrix}$$

用 Gram-Schmidt 方法对它们进行正交化处理以及正则化处理

14.7 如有一结构，它的刚度矩阵和质量矩阵如下：

$$K=\begin{Bmatrix}2&-1&0\\-1&4&-2\\0&-2&2\end{Bmatrix},\ M=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{Bmatrix}$$

用解析方法求出系统的全部固有频率和振型。

14.8 用矩阵反迭代法求题 14.7 的前两阶固有频率和振型(注意：初始向量不要取上题已解出的结果)

14.9 用子空间迭代法求解题 14.7(取 $r=2$)。

(1) 初始向量按 14.6.2 节所提示的一般原则选取。

(2) 初始向量取题 14.7 中已解出的前两阶固有振型的任意线性组合。

14.10 设题 14.7 系统上作用有空间分布模式为 $F(s)=[2\ 4\ 1]^T$ 的载荷，用 Ritz 向量直接迭代法求出此载荷能激发起的振型。

14.11 题 14.7 中矩阵 M 的第 2 个主元素改为 0，用解析法求出系统的固有频率和振型。

14.12 用 Lanczos 方法求解题 14.11，比较 Lanczos 向量数 $r=2$ 和 3 的结果，并分析造成差别的原因。

14.13 导出(14.6.54)式和(14.6.55)式给出的结论。即 Ritz 向量直接叠加法中 $\alpha_{ij}=0(j=i-3,i-4,\cdots,1)$，$\alpha_{i,i-2}=\beta_{i-1}$。

参考文献

1 Bathe K J and Wilson E L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, Inc. 1976, p. 332, Fig 8.3.

2 Wilson E L, Yuan M W and Dickens J M. Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors. Earth. Eng. & Struct. Dynamics, 1982, 10, 813~821

3 Ojalvo I U. Proper use of Lanczos Vectors for Large Eigenvalue Problems. Computers & Structures, 1985, 20, 115~120

第 15 章　材料非线性问题的有限单元法

15.1 引　言

以前各章所讨论的均是线性问题。线弹性力学基本方程的特点是

1. 几何方程的应变和位移的关系是线性的。

2. 物性方程的应力和应变的关系是线性的。

3. 建立于变形前状态的平衡方程也是线性的。

但是在很多重要的实际问题中，上述线性关系不能保持。例如在结构的形状有不连续变化（如缺口、裂纹等）的部位存在应力集中，当外载荷到达一定数值时该部位首先进入塑性，这时在该部位线弹性的应力应变关系不再适用，虽然结构的其他大部分区域仍保持弹性。又如长期处于高温条件下工作的结构，将发生蠕变变形，即在载荷或应力保持不变的情况下，变形或应变仍随着时间的进展而继续增长，这也不是线弹性的物性方程所能描述的。上述现象都属于材料非线性范畴内所要研究的问题。工程实际中还存在另一类所谓几何非线性问题。例如板壳的大挠度问题，材料锻压成型过程的大应变问题等，这时需要采用非线性的应变和位移关系，平衡方程也必须建立于变形后的状态以考虑变形对平衡的影响。

由于非线性问题的复杂性，利用解析方法能够得到的解答是很有限的。随着有限单元法在线性分析中的成功应用，它在非线性分析中的应用也取得了很大的进展，已经获得了很多不同类型实际问题的求解方案。

材料非线性问题的处理相对比较简单，不需要重新列出整个问题的表达格式，只要将材料本构关系线性化，就可将线性问题的表达格式推广用于非线性分析。一般说，通过试探和迭代的过程求解一系列线性问题，如果在最后阶段，材料的状态参数被调整得满足材料的非线性本构关系，则最终得到问题的解答。几何非线性问题比较复杂，它涉及非线性的几何关系和依赖于变形的平衡方程等问题，因此，表达格式和线性问题相比，有很大的改变，这将在下一章专门讨论。这两类非线性问题的有限元格式都涉及求解非线性代数方程组，所以在本章开始对非线性代数方程组的求解作一一般性的讨论。这对下一章也是必要的准备。

正如在前面已指出的，材料非线性问题可以分为两类。一类是不依赖于时间的弹塑性问题，其特点是当载荷作用以后，材料变形立即发生，并且不再随时间而变化。另一类是依赖于时间的黏（弹、塑）性问题，其特点是载荷作用以后，材料不仅立即发生变形，而且变形随时间而继续变化，在载荷保持不变条件下，由于材料黏性而继续增长的变形称之为蠕变。另方面在变形保持不变条件下，由于材料黏性而使应力衰减称之为松弛。本章中重点讨论不依赖于时间的弹塑性问题，包括它的本构关系，有限元表达格式、求解步骤及数值方法。至于依赖于时间的蠕变问题，本章只简要地介绍其本构关系和求解步骤的基本特

点，而不太多涉及其具体细节。

15.2 非线性方程组的解法

非线性问题有限元离散化的结果将得到下列形式的代数方程组

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q} \\ \psi(\boldsymbol{a}) \equiv \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{f} = 0 \end{array}\right\} \tag{15.2.1}$$

或

其中 $\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{Q}$。该方程的具体形式通常取决于问题的性质和离散的方法。上式中参数 $\boldsymbol{a}$ 代表未知函数的近似解。在以位移为未知量的有限元分析中，它是结点位移向量。

对于线性方程组 $\boldsymbol{Ka}+\boldsymbol{f}=0$，由于 $\boldsymbol{K}$ 是常数矩阵，可以没有困难地直接求解，但对于非线性方程组，由于 $\boldsymbol{K}$ 依赖于未知量 $\boldsymbol{a}$ 本身则不可能直接求解。以下将阐述借助于重复求解线性方程组以得到非线性方程组解答的一些常用方法。

15.2.1 直接迭代法

对于方程(15.2.1)式

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{f} = 0$$

假设有某个初始的试探解：

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^0 \tag{15.2.2}$$

代入上式的 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})$ 中，可以求得被改进了的一次近似解

$$\boldsymbol{a}^1 = -(\boldsymbol{K}^0)^{-1}\boldsymbol{f} \tag{15.2.3}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^0 = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}^0)$$

重复上述过程，可以得到 n 次近似解

$$\boldsymbol{a}^n = -(\boldsymbol{K}^{n-1})^{-1}\boldsymbol{f} \tag{15.2.4}$$

一直到误差的某种范数小于某个规定的容许小量 e_r，即

$$\|\boldsymbol{e}\| = \|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^{n-1}\| \leqslant e_r \tag{15.2.5}$$

上述迭代过程可以终止。

从(15.2.3)式和(15.2.4)式可以看到，要执行直接迭代法的计算，首先需要假设一个初始的试探解 $\boldsymbol{a}^0$。在材料非线性问题中，$\boldsymbol{a}^0$ 通常可以从先求解-线弹性问题得到。其次是直接迭代法的每次迭代需要计算和形成新的系数矩阵 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}^{n-1})$，并对它进行求逆计算。这里还隐含着 $\boldsymbol{K}$ 可以显式地表示成 $\boldsymbol{a}$ 的函数，所以只适用于与变形历史无关的非线性问题，例如非线性弹性问题及可以利用形变理论分析的弹塑性问题.而对于依赖于变形历史的非线性问题，直接迭代法是不适用的，例如加载路径不断变化或涉及卸载及反复加载等必须利用增量理论分析的弹塑性问题。

关于直接迭代法的收敛性可以指出，当 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}$ 是凸的情况（当 $\boldsymbol{a}$ 是标量，即系统为单自由度的，$P-a$ 表示如图 15.1(a)），通常解是收敛的。但当 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{a}$ 是凹的情况（如图 15.1(b)所示），则解可能是发散的。

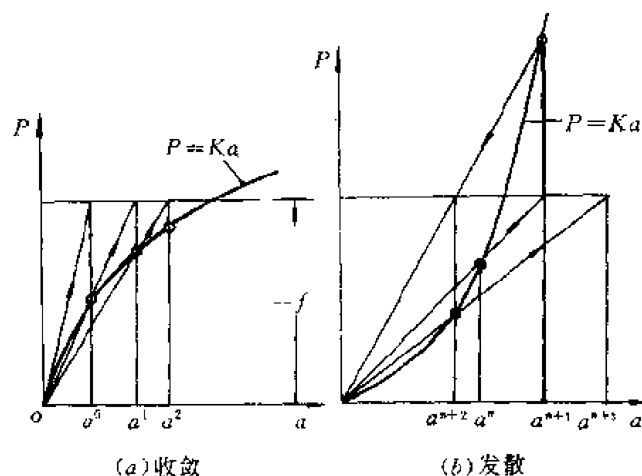


图 15.1　直接迭代法

15.2.2　Newton-Raphson 方法(简称 N-R 方法)

如果方程(15.2.1)式的第 n 次近似解 $\boldsymbol{a}^n$ 已经得到,一般情况下(15.2.1)式不能精确地被满足,即 $\psi(\boldsymbol{a}^n)\neq 0$。为得到进一步的近似解 $\boldsymbol{a}^{n+1}$,可将 $\psi(\boldsymbol{a}^{n+1})$ 表示成在 $\boldsymbol{a}^n$ 附近的仅保留线性项的 Taylor 展开式,即

$$\psi(\boldsymbol{a}^{n+1}) \equiv \psi(\boldsymbol{a}^n) + \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}\right)_n \Delta\boldsymbol{a}^n = 0 \tag{15.2.6}$$

且有

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{a}^n + \Delta\boldsymbol{a}^n \tag{15.2.7}$$

式中 $\mathrm{d}\psi/d\boldsymbol{a}$ 是切线矩阵,即

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}} \equiv \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{a}) \tag{15.2.8}$$

于是从(15.2.6)式可以得到

$$\Delta\boldsymbol{a}^n = -(\boldsymbol{K}_T^n)^{-1}\psi^n = -(\boldsymbol{K}_T^n)^{-1}(\boldsymbol{P}^n + \boldsymbol{f}) \tag{15.2.9}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_T^n = \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{a}^n),\ \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}^n)$$

由于 Taylor 展开式(15.2.6)式仅取线性项,所以 $\boldsymbol{a}^{n+1}$仍是近似解,应重复上述迭代求解过程直至满足收敛要求。

N-R 方法的求解过程可以表示于图 15.2。一般情况下,它具有良好的收敛性。当然像图 15.2(b)表示的那种发散情况也是可能存在的。

关于 N-R 方法中的初始试探解 $\boldsymbol{a}^0$,可以简单地设 $\boldsymbol{a}^0=0$。这样一来,$\boldsymbol{K}_T^0$ 在材料非线性问题中就是弹性刚度矩阵。当然,从(15.2.9)式可以看到 N-R 方法的每次迭代也需要重新形成和求逆一个新的切线矩阵 $\boldsymbol{K}_T^n$。

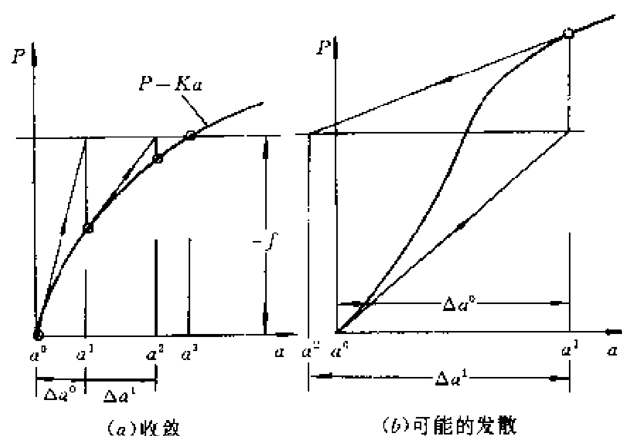


图 15.2　Newton-Raphson 方法

15.2.3　修正的 Newton-Raphson 方法（简称 mN-R 方法）

为克服 N-R 方法对于每次迭代需要重新形成并求逆一新的切线矩阵所带来的麻烦，常常可以采用一修正的方案，即 mN-R 方法。其中切线矩阵总是采用它的初始值，即令

$$\boldsymbol{K}_T^n = \boldsymbol{K}_T^0 \tag{15.2.10}$$

因此(15.2.9)式可以修正为

$$\Delta \boldsymbol{a}^n = -(\boldsymbol{K}_T^0)^{-1}(\boldsymbol{P}^n + \boldsymbol{f}) \tag{15.2.11}$$

这样一来，每次迭代求解的是一相同方程组。事实上，在用直接法求解此方程组时，系数矩阵只需要分解一次，每次迭代只进行一次回代即可。显然计算是比较经济的。虽然付出的代价是收敛速度较低，但总体上还是可能合算的。如和加速收敛的方法相结合，计算效率还可进一步改进。

另一种折衷方案是在迭代若干次（例如 m 次）以后，更新 $\boldsymbol{K}_T$ 为 $\boldsymbol{K}_T^m$，再进行以后的迭代，在某些情况下，这种方案是很有效的。修正的 N-R 方法的算法过程可表示如图 15.3。

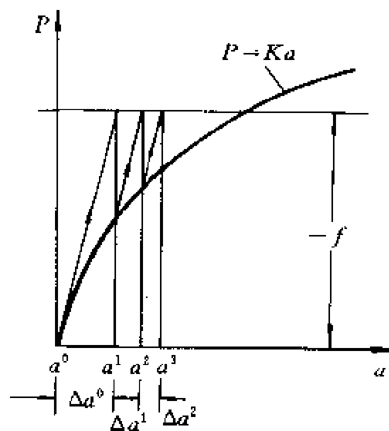


图 15.3　修正的 Newton-Raphson 方法

以上讨论的 N-R 法和 mN-R 法也隐含着 $\boldsymbol{K}$ 可以显式地表示为 $\boldsymbol{a}$ 的函数。而我们将讨论的弹塑性，蠕变等材料非线性问题，一般情况下由于应力依赖于变形的历史，这时将不能用形变理论，而必须用增量理论进行分析。在此情况下，不能将 $\boldsymbol{K}$ 表示成 $\boldsymbol{a}$ 的显式函数，因而也就不能直接用上述方法求解，而需要和以下讨论的增量方法相结合进行求解。

15.2.4 增量法

为便于理解，假设方程(15.2.1)式表达的是结构应力分析问题，其中 $\boldsymbol{a}$ 代表结构的位移，$-\boldsymbol{f}$ 代表结构的载荷。所谓增量解法首先将载荷分为若干步：$\boldsymbol{f}_0,\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots$，相应的位移也分为若干步：$\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots$。每二步之间的增长量称为增量。增量解法的一般做法是假设第 m 步载荷 $\boldsymbol{f}_m$ 和相应的位移 $\boldsymbol{a}_m$ 已知，而后让载荷增加为 $\boldsymbol{f}_{m+1}(=\boldsymbol{f}_m+\Delta\boldsymbol{f}_m)$，再求解 $\boldsymbol{a}_{m+1}(=\boldsymbol{a}_m+\Delta\boldsymbol{a}_m)$。如果每步载荷增量 $\Delta\boldsymbol{f}_m$ 足够小，则解的收敛性是可以保证的。同时，可以得到加载过程各个阶段的中间数值结果，便于研究结构位移和应力等随载荷变化的情况。

为了说明这种方法，将(15.2.1)式改写成如下形式：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) + \lambda\boldsymbol{f}_0 = 0 \tag{15.2.12}$$

其中 λ 是用以表示载荷变化的参数，上式对 λ 求导可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\lambda} + \boldsymbol{f}_0 \equiv \boldsymbol{K}_T\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\lambda} + \boldsymbol{f}_0 = 0 \tag{15.2.13}$$

从上式可以进一步得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\lambda} = -\boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{f}_0 \tag{15.2.14}$$

其中 $\boldsymbol{K}_T$ 即(15.2.8)式所定义的切线矩阵。

上式所提出的是一典型的常微分方程组问题，可以利用很多解法，最简单的是 Euler 法，它可被表达为

$$\boldsymbol{a}_{m+1} - \boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{K}_T^{-1}(\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{f}_0\Delta\lambda_m = -(\boldsymbol{K}_T)_m^{-1}\Delta\boldsymbol{f}_m \tag{15.2.15}$$

其中：

$$\Delta\lambda_m = \lambda_{m-1} - \lambda_m$$
$$\Delta\boldsymbol{f}_m = \boldsymbol{f}_{m+1} - \boldsymbol{f}_m$$

其他改进的积分方案(例如 Runge-Kutte 方法的各种预测校正)可以用来改进解的精度。和二阶 Runge-Kutte 方法等价的一种校正的 Euler 方法是可以采用的。即先按(15.2.15)式计算得到 $\boldsymbol{a}_{m+1}$ 的预测值，并表示为 $\boldsymbol{a}'_{m+1}$，再进一步计算 $\boldsymbol{a}_{m+1}$ 的改进值如下

$$\boldsymbol{a}_{m+1} - \boldsymbol{a}_m = -(\boldsymbol{K}_T)_{m+\theta}^{-1}\Delta\boldsymbol{f}_m \tag{5.2.16}$$

其中：

$$(\boldsymbol{K}_T)_{m+\theta} \equiv \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{a}_{m+\theta})$$
$$\boldsymbol{a}_{m+\theta} = (1-\theta)\boldsymbol{a}_m + \theta\boldsymbol{a}'_{m+1} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

利用上式计算得到的 $\boldsymbol{a}_{m+1}$ 较利用(15.2.15)式得到的预测值 $\boldsymbol{a}'_{m+1}$ 将有所改进。

需要指出，无论是利用(15.2.15)式还是用(15.2.16)式计算 $\boldsymbol{a}_{m+1}$ 或它的改进值，都是近似积分(15.2.14)式的结果，而未直接求解(15.2.12)式，因此所得到的 $\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1},\cdots$ 一般情况下是不能精确满足方程(15.2.12)式的，这将导致解的漂移。而且随着增量数目的增加，这种漂移现象将愈来愈严重。当系统为单自由度时，用 Euler 法求解的增量方程(15.2.15)式以及解的漂移现象如图 15.4 所示。

为克服解的漂移现象，并改进其精度，可采用的方法之一，是从(15.2.16)式求得

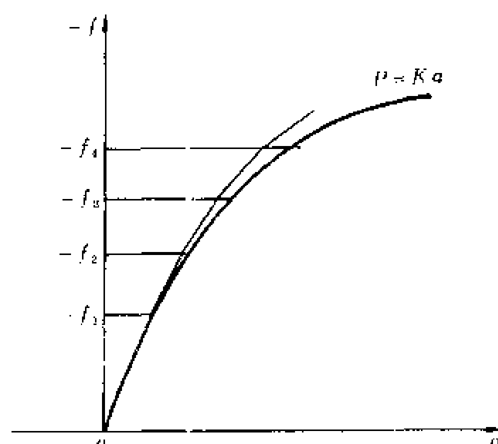


图 15.4　Euler 法求解增量方程和解的漂移

a_{m+1}的改进值以后，将它作新的预测值 a_{m+1}，仍用(15.2.16)式再计算新的改进值，为此继续迭代，直至方程(15.2.12)式在规定的误差范围内被满足为止。但每次迭代需要重新形成新的切线刚度 $K_T(a_{m+\theta})$。

现在更多采用的方法，是将 N-R 方法或 mN-R 方法用于每一增量步。如采用 N-R 方法，在每一增量内进行迭代，则对于 λ 的 $m+1$ 次增量步的第 $n+1$ 次迭代可以表示为

$$\psi_{m+1}^{n+1} \equiv P(a_{m+1}^{n+1}) + \lambda_{m+1}f_0 = P(a_{m+1}^{n}) + \lambda_{m+1}f_0 + (K_T^n)_{m+1}\Delta a_{m+1}^n = 0 \tag{15.2.17}$$

由上式解出

$$\Delta a_{m+1}^n = -(K_T^n)_{m+1}^{-1}(P(a_{m+1}^n) + \lambda_{m+1}f_0) \tag{15.2.18}$$

于是得到 a_{m+1}的第 $n+1$ 次改进值

$$a_{m+1}^{n+1} = a_{m+1}^n + \Delta a_{m+1}^n \tag{15.2.19}$$

(15.2.17)式中$(K_T^n)_{m+1}$是$(K_T)_{m+1}$的第 n 次改进值。开始迭代时用 $a_{m+1}^0=a_m$。连续地进行迭代，最后可以使得方程(15.2.12)式能够在规定误差范围内被满足。

从(15.2.17)式可见，当采用 N-R 迭代时，每次迭代后也都要重新形成和分解$(K_T^n)_{m+1}$，无疑工作量是很大的，因此通常采用 mN-R 方法，这时$(K_T^n)_{m+1}=(K_T^0)_{m+1}=K_T(a_m)$。

如果(15.2.18)式只求解一次，而不继续进行迭代，则有

$$\Delta a_{m+1} = \Delta a_{m+1}^0 = -(K_T)_m^{-1}(P_m + \lambda_{m+1}f_0) \tag{15.2.20}$$

若进一步假设在上一增量步结束时，控制方程(15.2.12)式是精确满足的，即

$$P_m + \lambda_m f_0 = 0$$

则

$$\Delta a_{m+1} = -(K_T)_m^{-1}f_0\Delta\lambda_m \tag{15.2.21}$$

实际上，上式就是(15.2.15)式。而(15.2.20)式和上式相比不同之处在于它考虑了上一增量步中方程(15.2.12)式未精确满足的因素，将误差 $P_m+\lambda_m f_0$ 合并到 $\Delta\lambda_m f_0$ 中进行求解。(15.2.12)式在结构分析中实质上是平衡方程，所以(15.2.18)式或(15.2.20)式称为考虑平衡校正的迭代算法。对于一个自由度的系统，将 N-R 法或 mN-R 法和增量法结

合使用时，计算过程可以表示如图 15.5。

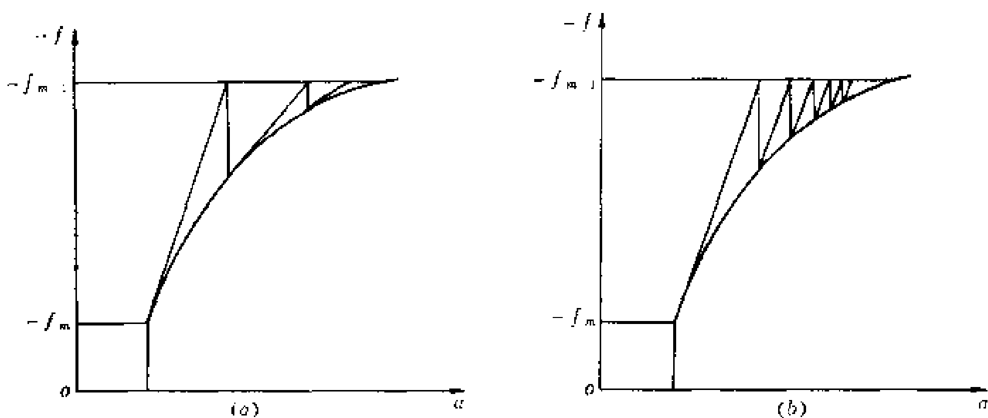


图 15.5 (a) 用 N-R 法解增量方程 (b) 用 mN-R 法解增量方程

15.2.5 加速收敛的方法

由前面的讨论中已知，利用 mN-R 方法求解非线性方程组时，可以避免每次迭代重新形成和求逆切线矩阵，但降低了收敛速度。特别是 P-a 曲线突然趋于平坦的情况（对于结构分析问题，是结构趋于极限载荷或突然变软），收敛速度会很慢。为加速收敛速度，可以采用很多方法。这里介绍一种常用的、简单而有效的 Aitken 加速法。

首先讨论单自由度系统，具体算法表示于图 15.6。其中(a)、(b)分别为未采用和采用 Aitken 加速的情况。

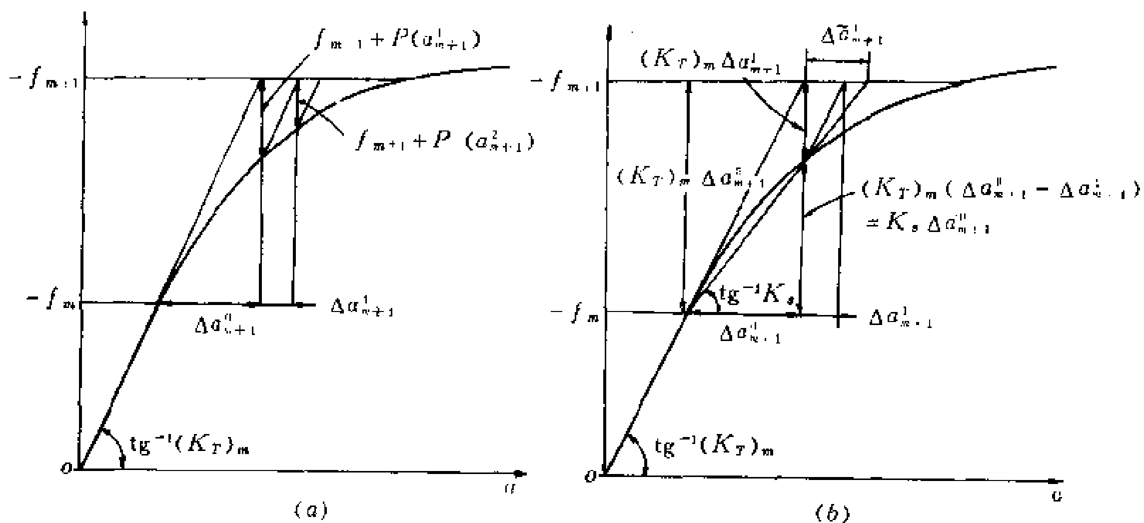


图 15.6 (a)无 Aitken 加速的 mN-R 迭代 (b) 有 Aitken 加速的 mN-R 迭代

假设 f_{m+1}的初始试探解已知为 $a_{m+1}^0=a_m$，利用修正的 N-R 法进行迭代，求得第 1.2

次迭代后的改进解为

$$\Delta a^n_{m+1} = -(K_T)^{-1}_m(P(a^n_{m+1}) + f_{m+1}) \qquad (n = 0,1)$$

$$a^{n+1}_{m+1} = a^n_{m+1} + \Delta a^n_{m+1} \tag{15.2.22}$$

在求得 Δa^1_{m+1}以后，可以考虑寻求它的改进值 $\Delta\tilde{a}^1_{m+1}$以加速收敛。Aitken 方法首先利用这两次迭代的不平衡差值来估计起始切线刚度$(K_T)_m$与局部割线刚度 K_s 的比值，从图 15.6(b)可见

$$K_s\Delta a^0_{m+1} = (K_T)_m(\Delta a^0_{m+1} - \Delta a^1_{m+1})$$

所以

$$\frac{(K_T)_m}{K_s} = \frac{\Delta a^0_{m+1}}{(\Delta a^0_{m+1} - \Delta a^1_{m+1})} = \alpha^1 \tag{15.2.23}$$

然后以此比值来确定 $\Delta\tilde{a}^1_{m+1}$，即令

$$K_s\Delta\tilde{a}^1_{m+1} = (K_T)_m\Delta a^1_{m+1}$$

这样就得到

$$\Delta\tilde{a}^1_{m+1} = \frac{(K_T)_m}{K_s}\Delta a^1_{m+1} = \alpha^1\Delta a^1_{m+1} \tag{15.2.24}$$

从(15.2.23)式可知 $\alpha^1>1$，称 α^1 为加速因子。并从(15.2.24)式得到 $\Delta\tilde{a}^1_{m+1}>\Delta a^1_{m+1}$，于是 a^2_{m+1}可以表示成

$$a^2_{m+1} = a^1_{m+1} + \Delta\tilde{a}^1_{m+1} = a^1_{m+1} + \alpha^1\Delta a^1_{m+1} \tag{15.2.25}$$

从以上讨论可以推知，Aitken 加速收敛方法是每隔一次迭代进行一次加速，一般化地可表示为

$$a^{n+1}_{m+1} = a^n_{m+1} + \alpha^n\Delta a^n_{m+1} \tag{15.2.26}$$

其中

$$\alpha^n = \begin{cases} 1 & (n = 0,2,\cdots) \\ \dfrac{\Delta a^{n-1}_{m+1}}{\Delta a^{n-1}_{m+1} - \Delta a^n_{m+1}} & (n = 1,3,\cdots) \end{cases}$$

推广到 N 个自由度的系统，Aitken 方法可以表示为

$$\boldsymbol{a}^{n+1}_{m+1} = \boldsymbol{a}^n_{m+1} + \boldsymbol{\alpha}^n\Delta\boldsymbol{a}^n_{m+1} \tag{15.2.27}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}^n$ 是对角矩阵，它的元素 α^n_i 是

$$\alpha^n_i = \begin{cases} 1 & (n = 0,2,\cdots) \\ \dfrac{\Delta a^{n-1}_{i,m+1}}{\Delta a^{n-1}_{i,m+1} - \Delta a^n_{i,m+1}} & (n = 1,3,\cdots) \end{cases} \tag{15.2.28}$$

从上式可见，如果对于某个自由度 i，分母项 $\Delta a^{n-1}_{i,m+1}-\Delta a^n_{i,m+1}$是很小的数值，这时 α^n_i 将是很大的数值，特别是当分母项趋于零，α^n_i 趋于无穷时，将使计算发生困难。为避免此情况，又提出了修正的 Aitken 方法，即用一个标量代替(15.2.28)式中的对角矩阵 $\boldsymbol{\alpha}^n$。这时

$$\alpha^n = \begin{cases} 1 & (n = 0,2,\cdots) \\ \dfrac{(\Delta\boldsymbol{a}^{n-1}_{m+1} - \Delta\boldsymbol{a}^n_{m+1})^T\Delta\boldsymbol{a}^{n-1}_{m+1}}{(\Delta\boldsymbol{a}^{n-1}_{m+1} - \Delta\boldsymbol{a}^n_{m+1})^T(\Delta\boldsymbol{a}^{n-1}_{m+1} - \Delta\boldsymbol{a}^n_{m+1})} & (n = 1,3,\cdots) \end{cases} \tag{15.2.29}$$

计算实践表明，当采用 Aitken 法或修正的 Aitken 法以后，收敛速度将有很大的改进。

应当指出，本节所讨论的上述算法只是目前常用的一些基本算法。实际上，由于有限元非线性分析是既费时又麻烦的工作，引起了研究工作者和实际分析工作者的广泛兴趣。旨在改进非线性分析的精度和效率的新的研究成果，不断出现在工程数值分析(International Journal for Numerical Methods in Engineering)、计算机与结构(Computers & Structures)等国际刊物，这里不一一列举。但是以上介绍的几种算法仍是当前发展阶段的最基本的方法。

另外，在众多的解法当中各有优缺点，很难说哪一种方法在任何情况下都比其它方法优越。但如果在计算程序中只准备编入一种算法，建议仍应采用具有 N-R 或 mN-R 迭代的增量法。只要增量步长足够小，收敛性是可保证的，一般情况下收敛速度也是令人满意的。

再有，在实际的计算中还可能遇到不少问题，例如增量步长的选择，结构刚度突然变化的处理等，将在以后结合具体问题进行讨论。

15.3 材料非线性本构关系

15.3.1 材料弹塑性行为的描述

弹塑性材料进入塑性的特征是当载荷卸去以后存在不可恢复的永久变形，因而在涉及卸载的情况下，应力应变之间不再存在唯一的对应关系，这是区别于非线性弹性材料的基本属性。以材料的单向受力情况为例，如图 15.7 所示。只是加载时应力应变呈非线性关系，还不足以判定材料是非线性弹性还是弹塑性。但是一经卸载立即发生两者的区别。非线性弹性材料将沿原路径返回，而弹塑性材料将依据不同的加载历史卸载后产生不同的永久变形。现对于单向受力状况下的材料弹塑性行为作一介绍和讨论。

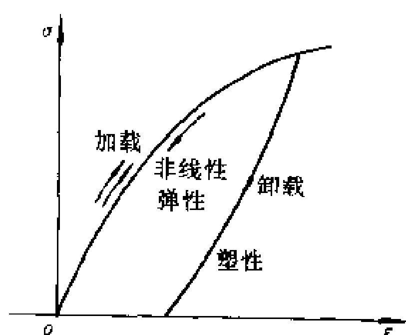


图 15.7 非线性弹性和塑性

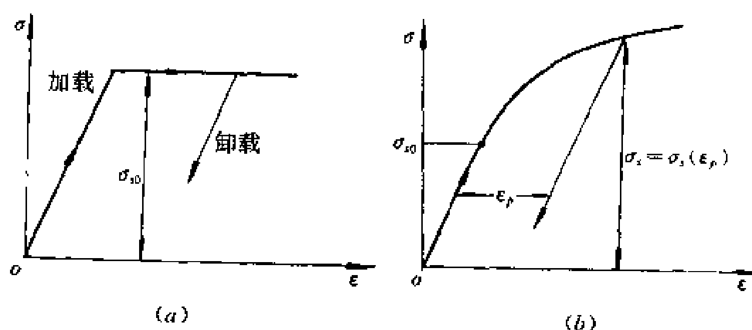


图 15.8 (a) 理想弹塑性 (b) 硬化塑性

1. 单调加载

对于大多数材料来说，存在一个比较明显的极限(屈服)应力 σ_{s0}。应力低于 σ_{s0}时，材料

保持为弹性。而当应力到达 σ_{s0}以后，则材料开始进入弹塑性状态。如继续加载、而后再卸载，材料中将保留永久的塑性变形。如果应力到达 σ_{s0}以后，应力不再增加，而材料变形可以继续增加，即变形处于不定的流动状态，如图 15.8(a)所示，则称材料为理想弹塑性的。反之如果应力到达 σ_{s0}以后，再增加变形、应力也必须增加，如图 15.8(b)所示则称材料是应变硬化的。这时应力 σ_s(下标表示应力已进入弹塑性状态)是塑性应变 ε_p 的函数，可解析地表示为

$$\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_p) \tag{15.3.1}$$

这硬化性质还表现为如果在某个应力值 $\sigma_r(>\sigma_{s0})$卸载，然后再加载，材料重新进入塑性的应力值将不是原来的初始屈服应力 σ_{s0}，一般情况下将等于卸载时的应力 σ_r。

2. 反向加载

对于硬化材料，在一个方向(例如拉伸)加载进入塑性以后，在 $\sigma_s=\sigma_{r1}$时卸载，并反方向(压缩)加载，直至进入新的塑性。这新的屈服应力 σ_{s1}通常在数值上既不等于材料的初始屈服应力 σ_{s0}，也不等于卸载时的应力 σ_{r1}。如果$|\sigma_{s1}|=\sigma_{r1}$，则称材料为各向同性硬化的。如果 $\sigma_{r1}-\sigma_{s1}=2\sigma_{s0}$，则称材料为运动(随动)硬化的。如果处于上述情况之间，即$|\sigma_{s1}|<\sigma_{r1}$，同时 $\sigma_{r1}-\sigma_{s1}>2\sigma_{s0}$，则称材料为混合硬化的。各种不同特性的硬化表示如图 15.9。

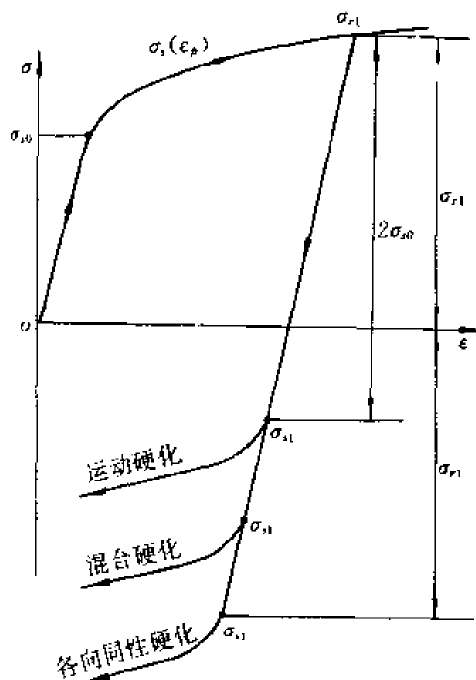


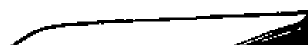
图 15.9 各种硬化塑性的特征

还应指出，材料在反向进入塑性以后，应力应变曲线在一般情况下是不同于原来在正向进入塑性以后的 $\sigma_s=\sigma_s(\varepsilon_p)$。因此通常需要根据材料实验的结果，定义新的 $\sigma_s=\sigma_s(\varepsilon_p)$来描述材料从卸载并在反向再进入塑性后的弹塑性行为，而且 ε_p 常常应是从新的屈服点 σ_{s1}开始计算的。

3. 循环加载

循环加载是指在上述反向进入塑性变形以后，载荷再反转，即进入正向，又一次到达新的屈服点和进入新的塑性变形，如此反复循环。我们称每次从载荷反转点 σ_{ri}(i 代表应力反转的次数)开始，沿此方向加载到新的屈服应力 σ_{si}后，继续塑性变形直至下一个载荷反转点 $\sigma_{s,i+1}$为一个加载分支，如图 15.10(a)的 OA，AB，BC，…各代表一个加载分支。一般说，每一个加载分支的材料应力应变曲线是不同的。但是，材料实验结果表明，通常情况下，除第一个分支(初始单调加载至第一个应力反转点 σ_{r1})和第二个分支(第一次应力反转点 σ_{r1}到第二次应力反转点 σ_{r2})的曲线形状有明显的区别。从第二个分支开始，以后各个





分支是相似的，也即它们之间的变化是有规律的。通常在等幅应变控制的循环加载条件下，材料呈现循环硬(软)化特性，即材料硬(软)化性质不断增强，直至最后趋于稳定，如图15.10(b)所示。在不等幅应变控制的循环加载条件下，材料呈现循环松弛特性，即循环过程中平均应力不断减小，并通常以趋于0为极限，如图15.10(c)所示。而在不等幅应力控制的循环加载条件下，材料呈现循环蠕变特性，即平均应变不断递增，这种性质又称棘轮效应，如图15.10(d)所示。

由于循环加载是很多重要设备的关键部件所承受载荷的主要形式，由它所引起的循环塑性变形(塑性疲劳和断裂)是造成设备破坏的重要原因，因此循环加载条件材料本构模型的建立和结构弹塑性响应的分析是工程技术界广泛关注的课题。限于篇幅，本章只能简要地介绍其特点和概念。但是以后各节的讨论，仍为这类问题的分析提供了必要的基础。

15.3.2 塑性力学的基本法则

为了将上述单轴应力状态的一些基本概念推广于一般应力状态，需要将塑性力学，主要是增量理论的基本法则加以简要的综述。

1. 初始屈服条件

此条件规定材料开始塑性变形的应力状态。对于初始各向同性材料，在一般应力状态下开始进入塑性流动的条件是

$$F^0 \equiv F^0(\sigma_{ij}) = 0 \tag{15.3.2}$$

式中σ_{ij}表示应力张量分量。$F^0(\sigma_{ij})$的几何意义可以理解为九维应力空间的一个超曲面。

对于金属材料，通常采用的屈服条件是

(1) V. Mises 条件

$$F^0(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} - \frac{\sigma_{s0}^2}{3} = 0 \tag{15.3.3}$$

其中σ_{s0}是材料的初始屈服应力。

$s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_m\delta_{ij}$是偏斜应力张量分量

$\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$是平均正应力

δ_{ij}是 Kronecker dalta

并且有以下关系

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{\bar{\sigma}^2}{3} = J_2 \tag{15.3.4}$$

其中：$\bar{\sigma}$是等效应力

J_2是第二应力不变量

在三维主应力空间，V. Mises 屈服条件可以表示为

$$F^0(\sigma_{ij}) = \frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] - \frac{1}{3}\sigma_{s0}^2 = 0 \tag{15.3.5}$$

其中$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$是三个主应力，上式的几何意义是以$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$为轴线的圆柱面。在过原点$O$、并垂直于直线$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$的$\pi$平面上，屈服函数$F^0$的轨迹是半径为$\sigma_{s0}$的一圆周，如图

15.11(a)所示。而在$\sigma_3=0$的平面上(即σ_1、σ_2子空间)屈服函数的轨迹是一椭圆，它的长半轴为$\sqrt{2}\sigma_{s0}$，短半轴为$\sqrt{2/3}\sigma_{s0}$，如图15.11(b)所示。

(2) Tresca 条件

$$F^0(\sigma_{ij})=[(\sigma_1-\sigma_2)^2-\sigma_{s0}^2][(\sigma_2-\sigma_3)^2-\sigma_{s0}^2][(\sigma_3-\sigma_1)^2-\sigma_{s0}^2]=0 \tag{15.3.6}$$

它在主应力空间是以$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$为轴线并内接V. Mises圆柱面的正六棱柱面。在π平面上的屈服轨迹是内接Mises屈服轨迹的正六边形，如图15.11(a)所示。同样地，在σ_1、σ_2子空间Tresca屈服轨迹也是内接Mises屈服轨迹的六边形，如图15.11(b)所示。

比较上述两个屈服条件可见，Tresca条件偏于安全，但两者相差不大。从数学上看Tresca屈服函数在棱边处(或屈服轨迹在六边形的角点处)的导数是不存在的。所以在使用上不如V. Mises屈服函数方便。因此在有限元分析中通常只采用V. Mises屈服条件。

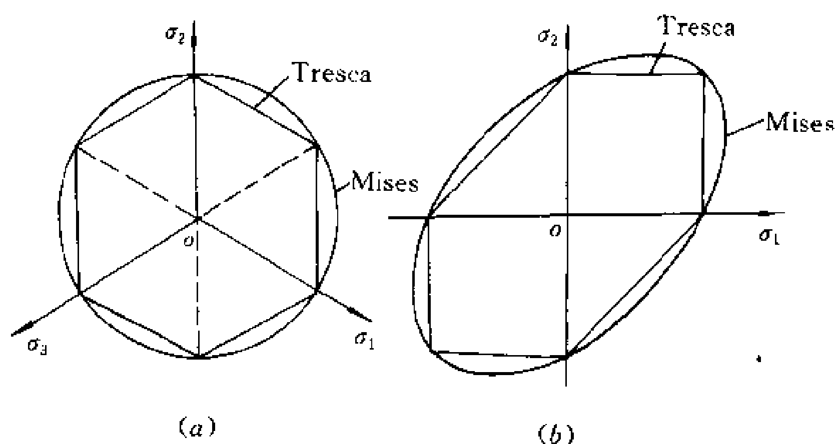


图5.11 (a) π平面上的屈服轨迹 (b) $\sigma_3=0$平面上的屈服轨迹

2. 流动法则

流动法则规定塑性应变增量的分量和应力分量以及应力增量分量之间的关系。V. Mises流动法则假设塑性应变增量可从塑性势导出，即

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}} \tag{15.3.7}$$

其中$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p$是塑性应变增量的分量。$\mathrm{d}\lambda$是一正的待定有限量，它的具体数值和材料硬化法则有关。Q是塑性势函数，一般说它是应力状态和塑性应变的函数。对于稳定的应变硬化材料，Q通常取和后继屈服函数F相同的形式，称之为和屈服函数相关联的塑性势。对于关联塑性情况，流动法则表示为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} \tag{15.3.8}$$

从微分学知识知道，$\partial F/\partial\sigma_{ij}$定义的向量正是沿应力空间内后继屈服面$F=0$的法线方向，所以Mises流动法则又称法向流动法则。

3. 硬化法则

硬化法则规定材料进入塑性变形后的后继屈服函数(又称加载函数或加载曲面)。一般说加载函数能采用以下形式

$$F(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^p,k)=0 \tag{15.3.9}$$

其中 k 是硬化参数，它依赖于变形的历史。现时的塑性应变 ε_{ij}^p 不一定显式地出现在加载函数中，可能通过 k 隐式地包含在 F 当中。

对于理想弹塑性材料，因无硬化效应，显然后继屈服函数和初始屈服函数一致，即

$$F(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^p,k)=F^0(\sigma_{ij})=0 \tag{15.3.10}$$

对于硬化材料，和图 15.9 所表示的不同硬化特征相对应，通常采用的有以下几种硬化法则：

(1) 各向同性硬化法则

此法则规定材料在进入塑性变形以后，加载曲面在各方向均匀地向外扩张，而其形状、中心及其在应力空间的方位均保持不变。例如对于 $\sigma_3=0$ 的情况，初始屈服轨迹和后继屈服轨迹如图 15.12(a)所示。如采用 Mises 屈曲条件，则各向同性硬化的后继屈服函数可以表示为

$$\left.\begin{aligned}&F(\sigma_{ij},k)=f-k=0\\&f=\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij},\qquad k=\frac{1}{3}\sigma_s^2(\bar{\varepsilon}^p)\end{aligned}\right\} \tag{15.3.11}$$

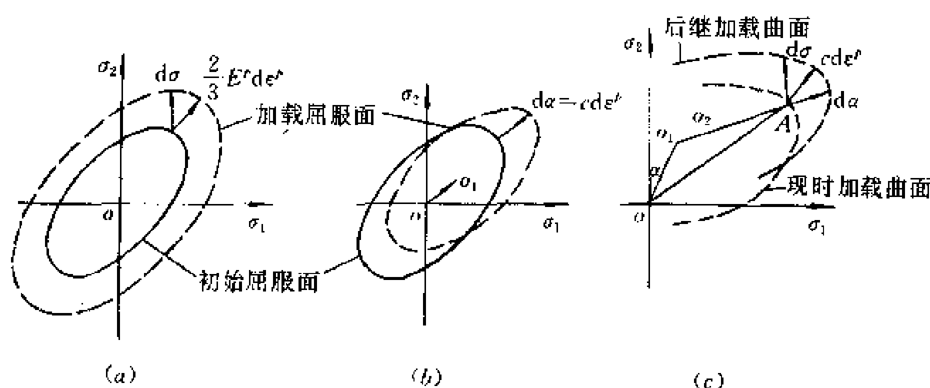


图 5.12　各种硬化法则示意图

(a) 各向同性硬化　(b) Prager 运动硬化　(c) Zeigler 修正运动硬化

其中 σ_s 是现时的弹塑性应力，它是等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数，

$$\bar{\varepsilon}^p=\int d\bar{\varepsilon}^p=\int\left(\frac{2}{3}d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p\right)^{1/2} \tag{15.3.12}$$

$\sigma_s(\bar{\varepsilon}^p)$ 可从材料的单轴拉伸试验 σ-ε 曲线得到，定义

$$E^p=\frac{d\sigma_s}{d\bar{\varepsilon}^p} \tag{15.3.13}$$

为材料塑性模量，又称为硬化系数。它和弹性模量 E 以及切线模量 $E^t(=d\sigma/d\varepsilon)$ 的关系是

$$E^p=\frac{EE^t}{E-E^t} \tag{15.3.14}$$

需要指出：各向同性硬化法则主要适合用于单调加载情况。如果用于卸载情况，它只适合反向屈服应力 σ_{s1} 等于应力反转点 σ_r 的材料，而通常材料是不具有这种性质，因此在塑性力学中还发展了其它硬化法则。

(2) 运动硬化法则

此法则规定材料在进入塑性以后，加载曲面在应力空间作一刚体移动，而其形状、大小和方位均保持不变。后继屈服函数可表示为

$$F(\sigma_{ij},\alpha_{ij}) = 0 \tag{15.3.15}$$

其中 α_{ij}是加载曲面的中心在应力空间的移动张量。它与材料硬化特性以及变形历史有关。根据 α_{ij}的具体规定不同，运动硬化法则又有两种形式。

(i) Prager 运动硬化法则

规定加载曲面中心的移动是在表征现时应力状态的应力点的法线方向。示意如图 15.12(b)。如采用 Mises 屈服条件，则 Prager 运动硬化法则的后继屈服函数是

$$F(\sigma_{ij},\alpha_{ij}) = f - k_0 = 0 \tag{15.3.16}$$

$$f = \frac{1}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}), \qquad k_0 = \frac{1}{3}\sigma_{s0}^2$$

因为规定 α_{ij}是沿现时应力点的法向方向，所以

$$\mathrm{d}\alpha_{ij} = c\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p = c\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} = c\mathrm{d}\lambda(s_{ij} - \alpha_{ij}) \tag{15.3.17}$$

根据应力点应保持在移动后的屈服曲面上的条件，即

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}(\mathrm{d}\sigma_{ij} - \mathrm{d}\alpha_{ij}) = 0 \tag{15.3.18}$$

并考虑初始加载时运动硬化法则应和各向同性硬化法则等效，则可证明

$$c = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p} = \frac{2}{3}E^p \tag{15.3.19}$$

将上式代入(15.3.17)式，则(15.3.17)式可改写为

$$\mathrm{d}\alpha_{ij} = \frac{2}{3}E^p\mathrm{d}\lambda(s_{ij} - \alpha_{ij}) \tag{15.3.20}$$

以上各式中，$\alpha_{ij} = \int\mathrm{d}\alpha_{ij}$，材料处于初始状态时，$\alpha_{ij}=0$。

应当指出，Prager 运动法则一般说只能应用于九维应力空间，因为在此情况下，初始屈服曲面和后继屈服曲面保持形式上的一致性。而在各个子应力空间，常常不具有这种一致性。例如平面应力状态的初始屈服曲面是在 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$三维子空间，而根据 Prager 运动硬化法则，移动张量 α_{ij}是在 s_x,s_y,s_z,τ_{xy}四维子空间，因此无法在 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$子空间描述后继屈服面。这种不一致性使 Prager 运动法则的应用发生了困难。因此 Zeigler 提出了适用于应力子空间的修正运动硬化法则。

(ii) Zeigler 修正运动硬化法则

规定加载曲面沿联结其中心和现时应力点的向量方向移动，示意如图 15.12(c)。这时后继屈服函数是

$$F(\sigma_{ij},\alpha_{ij}) = f - k_0 = 0 \tag{15.3.21}$$

$$f = \frac{1}{2}(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}),\ k_0 = \frac{1}{3}\sigma_{so}^2$$

式中 $\bar{\alpha}_{ij}$是移动张量的偏斜分量，即

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha_m \delta_{ij} \tag{15.3.22}$$

$$\alpha_m = \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}), \qquad \delta_{ij} \text{ 是 Kronecker dalta}$$

而移动方向如上述所规定，所以

$$d\alpha_{ij} = d\mu(\sigma_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}) \tag{15.3.23}$$

其中 $d\mu$ 是有待确定的常数。用和导出(15.3.19)式相类似的步骤，可以得到

$$d\mu = \frac{2}{3}E^p d\lambda \tag{15.3.24}$$

将上式代入(15.3.23)式，则(15.3.23)可写成

$$d\alpha_{ij} = \frac{2}{3}E^p d\lambda(\sigma_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}) \tag{15.3.25}$$

将上式和(15.3.20)式比较，可以看到这两种运动硬化法则的差别仅在于加载曲面移动的方向。Prager 法则中移动张量的增量和 $s_{ij}-\alpha_{ij}$成比例，其几何意义是加载曲面沿现时应力点的法线方向移动；而 Zeigler 法则中移动张量的增量和 $\sigma_{ij}-\alpha_{ij}$成比例，其几何意义是加载曲面沿其中心和现时应力点的连线方向移动。两者的比例系数都是$\frac{2}{3}E^p d\lambda$。至于两种法则的后继屈服函数(15.3.16)式和(15.3.21)式在九维应力空间实际上是完全相同的。这是因为在 Prager 运动硬化法则中 $d\alpha_{ij}=cd\lambda(s_{ij}-\alpha_{ij})$，所以 $\alpha_m=0$，导致 $\bar{\alpha}_{ij}=\alpha_{ij}$，因此(15.3.16)式中的 f 也可以表示成和(15.3.21)式的 f 相同的形式。实际上，在子应力空间内，只要此子空间内包括三个正应力，或不包括任何正应力，这两种法则也是完全相同的。例如一般三维问题、平面应变问题、轴对称问题都属于前一种情况，扭转问题则属于后一种情况，这时都不需要区分两种运动硬化法则。而对于一般的子应力空间，例如平面应力的子空间，这两种法则是有区别的。正因为 Zeigler 法则中规定了加载曲面的移动沿 $\sigma_{ij}-\alpha_{ij}$方向，使得在子应力空间内后继屈服函数才能够保持和初始屈服函数在表达形式上的一致性。

关于运动硬化法则的应用可以指出：如用于单调加载情况，它应该和各向同性硬化法则相等价。如用于卸载和反向屈服情况，它适合于 $\sigma_{r1}-\sigma_{s1}=2\sigma_{so}$的材料。在反向进入屈服以后，(15.3.19)式和(15.3.24)式中的塑性模量 E^p，应该从第二个加载分支的材料应力应变曲线导出，其中塑性应变应该从反向屈服点 σ_{s1}起计算。以上做法可以推广用于每一个反转应力 σ_{rt}和下一个进入屈服的应力 σ_{st}的差值为 $2\sigma_{so}$的循环加载情况。上述差值 $2\sigma_{so}$实际上就是加载面的直径。

(3) 混合硬化法则

为了适应材料一般硬化特性的要求，同时考虑各向同性硬化和运动硬化两种法则，这就是 Hodge 首先提出的混合硬化法则。

混合硬化法则中，将塑性应变增量分为共线的两部分，即令

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{p(i)} + d\varepsilon_{ij}^{p(k)} \tag{15.3.26}$$

其中 $d\varepsilon_{ij}^{p(i)}$ 是与屈服曲面扩张，即与各向同性硬化法则相关联的部分塑性应变增量。$d\varepsilon_{ij}^{p(k)}$ 是与屈服曲面移动，即与运动硬化法则相关联的部分塑性应变增量。并且

$$d\varepsilon_{ij}^{p(i)} = M d\varepsilon_{ij}^{p}, \quad d\varepsilon_{ij}^{p(k)} = (1 - M) d\varepsilon_{ij}^{p} \tag{15.3.27}$$

其中 M 是在 -1 和 1 之间的材料参数，根据材料的塑性行为，它可以是常数，也可以是变数。$M<0$ 是为了能适应软化的情况。M 是表现各向同性硬化特性在全部硬化特性中所占的比例，称之为混合硬化参数。

混合硬化法则的后继屈服函数可以表示成

$$F(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, k) = f - k = 0 \tag{15.3.28}$$

$$f = \frac{1}{2}(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}), \quad k = \frac{1}{3}\sigma_s^2(\bar{\varepsilon}^p, M)$$

其中

$$\sigma_s(\bar{\varepsilon}^p \cdot M) = \sigma_{s0} + \int M d\sigma_s(\bar{\varepsilon}^p) \tag{15.3.29}$$

如果 M 保持为常数，则

$$\sigma_s(\bar{\varepsilon}^p, M) = \sigma_{s0} + M[\sigma_s(\bar{\varepsilon}^p) - \sigma_{s0}] \tag{15.3.30}$$

至于移动张量 α_{ij}，视所采用的运动硬化法则而定，如采用 Prager 法则，则

$$d\alpha_{ij} = c d\varepsilon_{ij}^{p(k)} = c(1 - M) d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{2}{3} E^p (1 - M) d\lambda (s_{ij} - \alpha_{ij}) \tag{15.3.31}$$

如采用 Zeigler 法则，则

$$d\alpha_{ij} = d\mu(1 - M)(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = \frac{2}{3} E^p (1 - M) d\lambda (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \tag{15.3.32}$$

在以上各式中，如令 $M=1$ 或 $M-0$，混合硬化法则就分别蜕化为各向同性硬化法则和运动硬化法则。

最后应当指出：类似于运动硬化法则，混合硬化法则主要用于反向加载和循环加载情况。当然，式中的塑性模量 E^p 也应从不同加载分支的应力应为曲线导出。同时式中的混合硬化参数也不一定保持为常数，而是根据每一个反转点的应力 σ_{ri} 和下一个屈服应力 σ_{si} 之间的差值，即加载曲面的直径大小确定。

4. 加载、卸载准则

该准则用以判别从一塑性状态出发是继续塑性加载还是弹性卸载，这是计算过程中判定是否继续塑性变形以及决定是采用弹塑性本构关系还是弹性本构关系所必须的。这准则可表述如下：

(1) 若 $F=0, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$，则继续塑性加载。

(2) 若 $F=0, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$，则由塑性按弹性卸载。

(3) 若 $F=0, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$，则应区分

(i) 对于理想弹塑性材料，此情况是塑性加载，因为在此条件下可以继续塑性流动。

(ii) 对于硬化材料，此情况是中性变载，即仍保持在塑性状态，但不发生新的塑性流动($d\bar{\varepsilon}^p=0$)。

以上诸式中 $\partial f/\partial \sigma_{ij}$，视按不同材料特性而采用的屈服函数形式而定。对于理想塑性

材料和采用各向同性硬化法则的材料

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \tag{15.3.33}$$

对于采用运动硬化法则和混合硬化法则的材料

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} \tag{15.3.34}$$

15.3.3 应力应变关系

首先以服从各向同性硬化法则的材料为例，推导它的应力应变增量关系。

微分(15.3.11)式，可得

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} - \frac{2}{3}\sigma_s \frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p}\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p = 0 \tag{15.3.35}$$

式中

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \tag{15.3.36}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p} = E^p \tag{15.3.37}$$

$$\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p = \left(\frac{2}{3}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p\right)^{1/2} = \mathrm{d}\lambda\left(\frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^{1/2} = \frac{2}{3}\mathrm{d}\lambda\sigma_s \tag{15.3.38}$$

在小应变的情况下，应变增量可以分为弹性和塑性两部分，即

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^e + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p \tag{15.3.39}$$

于是利用弹性应力应变关系，可将 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ 表示成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma_{ij} &= D_{ijkl}^e \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^e = D_{ijkl}^e(\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^p) \\ &= D_{ijkl}^e \mathrm{d}\varepsilon_{kl} - D_{ijkl}^e \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\end{aligned} \tag{15.3.40}$$

其中

$$D_{ijkl}^e = 2G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \tag{15.3.41}$$

(15.3.40)式的 $\mathrm{d}\varepsilon_{kl}^p$ 实际上可以看成初应变。将此式以及(15.3.36)，(15.3.37)等式一并代入(15.3.35)式，经整理可得

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{(\partial f/\partial \sigma_{ij})D_{ijkl}^e \mathrm{d}\varepsilon_{kl}}{(\partial f/\partial \sigma_{ij})D_{ijkl}^e(\partial f/\partial \sigma_{kl}) + (4/9)\sigma_s^2 E^p} \tag{15.3.42}$$

将上式再代回至(15.3.40)式，则可得到应力应变的增量关系式

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} \tag{15.3.43}$$

其中

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - D_{ijkl}^p$$

D_{ijkl}^p 称为塑性矩阵，它的一般表达式是

$$D_{ijkl}^p = \frac{D_{ijmn}^e(\partial f/\partial \sigma_{mn})D_{rskl}^e(\partial f/\partial \sigma_{rs})}{(\partial f/\partial \sigma_{ij})D_{ijkl}^e(\partial f/\partial \sigma_{kl}) + (4/9)\sigma_s^2 E^p} \tag{15.3.44}$$

对于九维应力空间，利用 D_{ijkl}^e 的表达式(15.3.41)式，(15.3.42)式和(15.3.44)式可以简化为

$$d\lambda = \frac{(\partial f/\partial \sigma_{ij})d\varepsilon_{ij}}{(2/9)(\sigma_s^2/G)(3G + E^p)} \tag{15.3.45}$$

$$D_{ijkl}^p = \frac{(\partial f/\partial \sigma_{ij})(\partial f/\partial \sigma_{kl})}{(1/9)(\sigma_s^2/G^2)(3G + E^p)} \tag{15.3.46}$$

对于各向同性硬化材料，$\partial f/\partial \sigma_{ij}$利用(15.3.33)式代入，则最后得到

$$d\lambda = \frac{s_{ij}d\varepsilon_{ij}}{(2/9)(\sigma_s^2/G)(3G + E^p)} \tag{15.3.47}$$

$$D_{ijkl}^p = \frac{s_{ij}s_{kl}}{(1/9)(\sigma_s^2/G^2)(3G + E^p)} \tag{15.3.48}$$

应当指出，关于 $d\lambda$ 和 D_{ijkl}^p 的一般表达式(15.3.42)或(15.3.45)式和(15.3.44)或(15.3.46)式对于其他硬化法则也是适用的，此结论可以用相同的推导步骤加以验证。由此可以得到各种硬化材料在九维应力空间中的具体表达式。

对于理想塑性材料：$\partial f/\partial \sigma_{ij}=s_{ij}, \sigma_s=\sigma_{so}, E^p=0$，所以有

$$d\lambda = \frac{s_{ij}d\varepsilon_{ij}}{2\sigma_{so}^2/3} \tag{15.3.49}$$

$$D_{ijkl}^p = \frac{s_{ij}s_{kl}}{\sigma_{so}^2/3G} \tag{15.3.50}$$

对于运动硬化材料：$\partial f/\partial \sigma_{ij}=s_{ij}-\bar{\alpha}_{ij}, \sigma_s=\sigma_{so}$，所以有

$$d\lambda = \frac{(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})d\varepsilon_{ij}}{(2\sigma_{so}^2/9G)(3G + E^p)} \tag{15.3.51}$$

$$D_{ijkl}^p = \frac{(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(s_{kl} - \bar{\alpha}_{kl})}{(\sigma_{so}^2/9G^2)(3G + E^p)} \tag{15.3.52}$$

对于混合硬化材料：$\partial f/\partial \sigma_{ij}=s_{ij}-\bar{\alpha}_{ij}, \sigma_s=\sigma_s(\bar{\varepsilon}^p, M)$，所以有

$$d\lambda = \frac{(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})d\varepsilon_{ij}}{[2\sigma_s^2(\bar{\varepsilon}^p, M)/9G](3G + E^p)} \tag{15.3.53}$$

$$D_{ijkl}^p = \frac{(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(s_{kl} - \bar{\alpha}_{kl})}{[\sigma_s^2(\bar{\varepsilon}^p, M)/9G^2](3G + E^p)} \tag{15.3.54}$$

为了将上列应力应变关系的一般表达式用于各个具体问题，并给出它们的显式，现在首先将 $d\lambda, D_{ijkl}^p$的表达式(15.3.42)和(15.3.44)式改写成矩阵形式

$$d\lambda = \frac{(\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma})^T \boldsymbol{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon}}{(\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma})^T \boldsymbol{D}_e (\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}) + (4/9)\sigma_s^2 E^p} \tag{15.3.55}$$

$$\boldsymbol{D}_p = \frac{\boldsymbol{D}_e (\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma})(\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma})^T \boldsymbol{D}_e}{(\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma})^T \boldsymbol{D}_e (\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}) + (4/9)\sigma_s^2 E^p} \tag{15.3.56}$$

1. 三维空间问题

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \tag{15.3.57}$$

$$
\boldsymbol{D}_e = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \text{对} & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & \text{称} & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{15.3.58}
$$

对于各向同性硬化材料，屈服函数表示为

$$
F = f - k = 0 \tag{15.3.59}
$$

$$
f = \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2)
$$

$$
k = \frac{1}{3}\sigma_s^2
$$

其中
$$
s_i = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (i = x, y, z)
$$

将以上各式代入(15.3.56)式，就得到

$$
\boldsymbol{D}_p = \frac{9G^2}{\sigma_s^2(3G + E^p)}\begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y & s_x s_z & s_x\tau_{xy} & s_x\tau_{yz} & s_x\tau_{zx} \\ & s_y^2 & s_y s_z & s_y\tau_{xy} & s_y\tau_{yz} & s_y\tau_{zx} \\ & & s_z^2 & s_z\tau_{xy} & s_z\tau_{yz} & s_z\tau_{zx} \\ & \text{对} & & \tau_{xy}^2 & \tau_{xy}\tau_{yz} & \tau_{xy}\tau_{zx} \\ & & \text{称} & & \tau_{yz}^2 & \tau_{yz}\tau_{zx} \\ & & & & & \tau_{zx}^2 \end{bmatrix} \tag{15.3.60}
$$

从(15.3.58)式和(15.3.60)式就可以得到各向同性材料三维空间问题的弹塑性矩阵 $\boldsymbol{D}_{ep}$ 的显式表达式。对于其他硬化材料的 $\boldsymbol{D}_{ep}$，根据关于(15.3.49)～(15.3.54)式的讨论不难列出，为节省篇幅，这里不一一列举。

2. 轴对称问题和平面应变问题

这两类问题可按同一格式处理。它们仅各有四个非零的应力、应变分量。即

轴对称问题：

$$
\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_r \quad \sigma_z \quad \sigma_\theta \quad \tau_{rz}]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_\theta \quad \gamma_{rz}]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{15.3.61}
$$

平面应变问题：

$$
\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 0 \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{15.3.62}
$$

所以从(15.3.58)式和(15.3.60)式划去最后二行和二列，就可以得到平面应变问题和轴

对称问题的 $\boldsymbol{D}_e$ 和 $\boldsymbol{D}_p$（对于轴对称问题，$\boldsymbol{D}_p$ 中各个应力偏量的下标 x,y,z 分别代换为 r,z,θ）。

3. 平面应力问题

为了引入 $\sigma_z=0$ 的条件，利用 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 子空间的屈服函数和应力应变关系比较方便。这时

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}=[\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{15.3.63}$$

$$\boldsymbol{D}_e=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{15.3.64}$$

对于各向同性硬化材料，屈服函数表示为

$$F=f-k=0 \tag{15.3.65}$$

其中

$$f=\frac{1}{2}(s_x^2+s_y^2+s_z^2+2\tau_{xy}^2),\ k=\frac{1}{3}\sigma_s^2$$

并有

$$s_x=\sigma_x-\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{1}{3}(2\sigma_x-\sigma_y)$$

$$s_y=\sigma_y-\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{1}{3}(2\sigma_y-\sigma_x)$$

$$s_z=-\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y)$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=[s_x \quad s_y \quad 2\tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{15.3.66}$$

将以上各式代入(15.3.56)式，就可得到

$$\boldsymbol{D}_p=\frac{E}{B(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}(s_x+\nu s_y)^2 & (s_x+\nu s_y)(s_y+\nu s_x) & (1-\nu)(s_x+\nu s_y)\tau_{xy}\\ \text{对} & (s_y+\nu s_x)^2 & (1-\nu)(s_y+\nu s_x)\tau_{xy}\\ \text{称} & & (1-\nu)^2\tau_{xy}^2\end{bmatrix} \tag{15.3.67}$$

其中

$$B=s_x^2+s_y^2+2\nu s_x s_y+2(1-\nu)\tau_{xy}^2+\frac{2(1-\nu)E^p\sigma_s^2}{9G}$$

根据关于(15.3.49)～(15.3.54)式的讨论，可以列出其他硬化材料平面应力问题的 $\boldsymbol{D}_p$ 以及 $\boldsymbol{D}_{ep}$。

4. 板壳问题

在板壳问题中需要建立的是广义应力应变关系，为此可以参考弹性板壳广义应力应变关系的建立过程。

对于壳体，当采用基于壳体理论的单元进行分析时，壳体内任一点(ξ,η,ζ)的应变 $\varepsilon_\xi^{(\zeta)},\varepsilon_\eta^{(\zeta)},\gamma_{\xi\eta}^{(\zeta)}$ 可以用中面上相对应点$(\xi,\eta,0)$的广义应变表示为

$$\varepsilon_\xi^{(\zeta)}=\varepsilon_\xi+\zeta\kappa_\xi,\varepsilon_\eta^{(\zeta)}=\varepsilon_\eta+\zeta\kappa_\eta,\gamma_{\xi\eta}^{(\zeta)}=\gamma_{\xi\eta}+\zeta\kappa_{\xi\eta} \tag{15.3.68}$$

将上式用于增量形式，并表示成矩阵形式，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{(\zeta)} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{m} + \zeta \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{b} = [1\ \zeta]\mathrm{d}\varepsilon \tag{15.3.69}$$

其中：$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{(\zeta)} = [\mathrm{d}\varepsilon_{\xi}^{(\zeta)} \quad \mathrm{d}\varepsilon_{\eta}^{(\zeta)} \quad \gamma_{\xi\eta}^{(\zeta)}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{m}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{b}$，$\varepsilon$ 参见 11.2 节和 12.2 节有关表达式。

因为板壳中平行于中面的每一薄层处于平面应力状态，所以壳体内任一点的应力增量可以表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{(\zeta)} = \boldsymbol{D}_{ep}^{(\zeta)}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{(\zeta)} = \boldsymbol{D}_{ep}^{(\zeta)}[1\ \zeta]\mathrm{d}\varepsilon \tag{15.3.70}$$

其中 $\boldsymbol{D}_{ep}^{(\zeta)}$可利用平面应力问题的(15.3.64)式和(15.3.67)式得到，要注意的是 $\boldsymbol{D}_{p}$ 中的每个材料参数和应力分量现在是 ζ 的函数。

进一步通过沿壳体厚度方向的积分，可以得到壳体的广义应力增量和广义应变增量的关系

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{m} &= \int_{-t/2}^{t/2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{(\zeta)}\mathrm{d}\zeta = \int_{-t/2}^{t/2}\boldsymbol{D}_{ep}^{(\zeta)}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{(\zeta)}\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_{-t/2}^{t/2}\boldsymbol{D}_{ep}^{(\zeta)}[1\ \zeta]\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\varepsilon \\
\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{b} &= \int_{-t/2}^{t/2}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{(\zeta)}\zeta\mathrm{d}\zeta = \int_{-t/2}^{t/2}\boldsymbol{D}_{ep}^{(\zeta)}\zeta\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{(\zeta)}\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_{-t/2}^{t/2}\boldsymbol{D}_{ep}^{(\zeta)}[\zeta\ \zeta^{2}]\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\varepsilon
\end{aligned} \tag{15.3.71}$$

或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}_{ep}^{s}\mathrm{d}\varepsilon \tag{15.3.72}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_{ep}^{s} = \int_{-t/2}^{t/2}\boldsymbol{D}_{ep}^{(\zeta)}\begin{bmatrix}1 & \zeta \\ \zeta & \zeta^{2}\end{bmatrix}\mathrm{d}\zeta \tag{15.3.73}$$

$\boldsymbol{\sigma}^{m}$，$\boldsymbol{\sigma}^{b}$，σ 也参见 11.2 节和 12.2 节的有关表达式。

以上各式中如令 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}^{m}$ 为零，就得到薄板的广义应力应变的增量关系。

为进行壳体的本构关系矩阵(15.3.73)式的积分，一般沿厚度方向 ζ 设置若干取样点。对于每一取样点，在计算过程中保留其弹塑性状态的历史，然后通过数值积分方法得到 $\boldsymbol{D}_{ep}^{s}$在任一指定(ξ,η)点的数值。

15.3.4 温度对本构关系的影响

对于处于高温条件下工作的结构，必须考虑温度对本构关系的影响。例如随着温度的升高，屈服极限 σ_{s0}有所降低，材料硬化特性(即 E^{p})也有所减小，并逐渐接近理想塑性材料。同时材料常数 E，ν，α 等也随温度变化而有所变化。至于长期工作在高温条件下的结构还必须考虑蠕变的效应。

在考虑温度和蠕变等影响的经典热弹塑性理论中，应变增量可以表示为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{kl} = \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{e} + \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{p} + \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{\theta} + \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{c} \tag{15.3.74}$$

其中 $\mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{e}$是弹性应变增量，如考虑温度对材料常数 E，ν 的影响，则它可进一步表示为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{e} = C_{klij}^{e}\mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial}{\partial\theta}(C_{klij}^{e})\mathrm{d}\theta\sigma_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{e'} + \mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{\theta'} \tag{15.3.75}$$

式内 C_{ijkl}^{e}是弹性柔度张量，$\mathrm{d}\theta$ 是温度增量，$\mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{e'}$和 $\mathrm{d}\varepsilon_{kl}^{\theta'}$ 分别是由 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$和因 C_{klij}^{e}变化引起的弹

性应变增量。

$d\epsilon^{\theta}_{kl}$是温度应变增量，它可表示成

$$d\epsilon^{\theta'}_{kl} = \alpha d\theta\delta_{kl} \tag{15.3.76}$$

式中 α 是温度膨胀系数，δ_{kl}是 Kronecker dalta。

$d\epsilon^{c}_{kl}$是蠕变应变增量，一般情况下它可以表示成

$$d\epsilon^{c}_{kl} = \frac{3}{2\bar{\sigma}}\frac{d\bar{\epsilon}^{c}}{dt}s_{kl}dt \tag{15.3.77}$$

其中 $\bar{\sigma}$，$\bar{\epsilon}^{c}$ 分别是等效应力和等效蠕变应变 $\bar{\epsilon}^{c}$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \qquad \bar{\epsilon}^{c} = \sqrt{\frac{2}{3}\epsilon^{c}_{ij}\epsilon^{c}_{ij}} \tag{15.3.78}$$

$d\bar{\epsilon}^{c}/dt$ 是蠕变应变率，其具体表达式根据材料试验结果决定。

在对应变增量作以上的分析以后，可以将应力应变的增量关系表示成

$$d\sigma_{ij} - D^{e}_{ijkl}(d\epsilon_{kl} - d\epsilon^{\theta'}_{kl}, - d\epsilon^{\theta}_{kl} - d\epsilon^{c}_{kl} - d\epsilon^{p}_{kl}) \tag{15.3.79}$$

将上式和不考虑温度和蠕变的应力应变增量关系式(15.3.40)式对比可见，现在除当作初应变处理的 $d\epsilon^{p}_{kl}$而外，又增加了温度应变增量 $d\epsilon^{\theta}_{kl}$，蠕变应变增量 $d\epsilon^{c}_{kl}$以及弹性应变中因 E，ν 变化引起的那部分增量 $d\epsilon^{\theta'}_{kl}$。

在考虑温度和蠕变影响的情况下，流动法则、硬化法则和不考虑这些影响时相同。只是屈服应力 σ_s 还应看作温度 θ 的函数。所以对于混合硬化的一般情况，后继屈服函数可表示成

$$F(\sigma_{ij},\alpha_{ij},k) = f - k = 0 \tag{15.3.80}$$

$$f = \frac{1}{2}(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}),\ k = \frac{1}{3}\sigma^{2}_{s}(\bar{\epsilon}^{p},M,\theta)$$

按照与导出不考虑温度和蠕变影响的应力应变增量关系式类似步骤，可以导出考虑温度和蠕变影响的应力应变关系式

$$d\sigma_{ij} = D^{ep}_{ijkl}(d\epsilon_{kl} - d\epsilon^{\theta'}_{kl} - d\epsilon^{\theta}_{kl} - d\epsilon^{c}_{kl}) + d\sigma^{0}_{ij} \tag{15.3.81}$$

其中 $D^{ep}_{ijkl}=D^{e}_{ijkl}-D^{p}_{ijkl}$

$$D^{p}_{ijkl} = \frac{(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(s_{kl} - \bar{\alpha}_{kl})}{[\sigma^{2}_{s}(\bar{\epsilon}^{p},M,\theta)/9G^{2}](3G + E^{p})}$$

$$d\sigma^{0}_{ij} = \frac{D^{e}_{ijkl}(s_{kl} - \bar{\alpha}_{kl})(\partial\sigma_{s}/\partial\theta)d\theta}{[2\sigma_{s}(\bar{\epsilon}^{p},M,\theta)/3](3G + E^{p})}$$

还可以得到

$$d\lambda = \frac{(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(d\epsilon_{kl} - d\epsilon^{\theta'}_{kl} - d\epsilon^{\theta}_{kl} - d\epsilon^{c}_{kl})}{[2\sigma^{2}_{s}(\bar{\epsilon}^{p},M,\theta)/9G](3G + E^{p})} - \frac{(\partial\sigma_{s}/\partial\theta)\,d\theta}{\frac{2}{3}\sigma_{s}(\bar{\epsilon}^{p},M,\theta)(3G + E^{p})} \tag{15.3.82}$$

从(15.3.81)式可以看到 $d\epsilon^{\theta'}_{kl}$，$d\epsilon^{\theta}_{kl}$和 $d\epsilon^{c}_{kl}$是以初应变形式，而温度变化引起的 $\partial\sigma_{s}/\partial\theta\, d\theta$ 的影响是以初应力 $d\sigma^{0}_{ij}$的形式出现于应力应变增量关系式中。

关于(15.3.77)式中的蠕变应变率 $d\bar{\epsilon}^{c}/dt$，它的具体表达式反映了材料的蠕变规律，现在有限元分析中较多采用的是以下两种。先讨论它们的一维形式。

一种是 Bailey-Norton 蠕变规律，它的表达式是

$$\epsilon^c = A\sigma^m t^n \tag{15.3.83}$$

其中 t 是时间，常数 A,m,n 依赖于温度，通过材料试验确定，通常 m 大于 1，$n<1$。此规律适合于用来描述初始阶段和第二阶段的蠕变。上式中应力 σ 被假定是不变的，所以

$$\frac{d\epsilon^c}{dt} = \frac{\partial \epsilon^c}{\partial t} = An\sigma^m t^{n-1} \tag{15.3.84}$$

对于 σ 是变化的情况，为了能利用此蠕变规律，首先需要将时间历程分成若干分段，每一分段内，认为 σ 是不变的。进一步考虑先前蠕变对后继蠕变的影响，仍有二种选择。

(1) 时间硬化理论：即直接将(15.3.83)，(15.3.84)式用于每一时间分段。图 15.13 中表示出应用时间硬化理论预测材料蠕变应变历史的一个例子。当 $t=t_A$ 时，应力从 σ_3 突然变化到 σ_4，(15.3.83)，(15.3.84)式中的 t 保持不变。按此表现在图上，时间 $0\sim t_A$ 蠕变应变曲线是沿 $\sigma=\sigma_3$ 的 OA 段，时间 $t_A\sim t_B$ 的蠕变应变曲线 AB 段平行于 $\sigma=\sigma_4$ 的曲线上用相同时间间隔截取的 $A'B'$ 段。依同样的方法得到蠕变曲线的 BC 段和 CD 段。

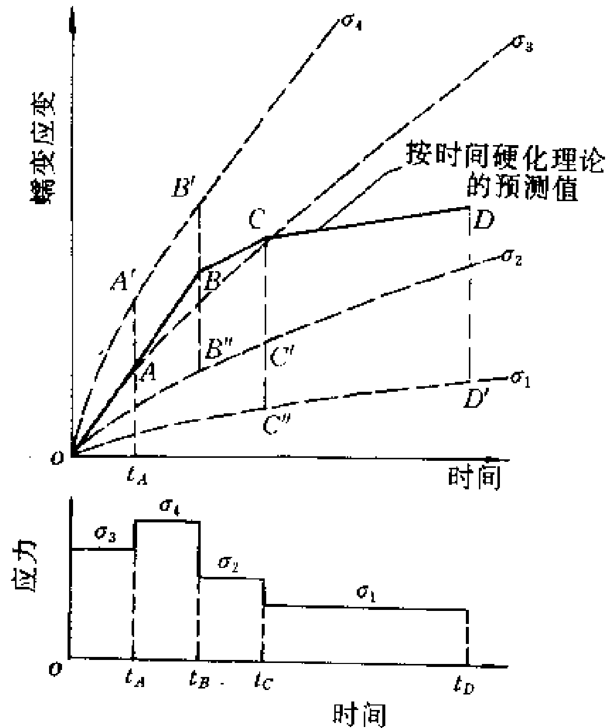


图 15.13 按时间硬化理论预测蠕变应变历史

由于蠕变应变曲线在不同应力的曲线间的过渡时，t 保持不变，所以此理论称为时间硬化理论。

(2) 应变硬化理论：当应力发生突然变化时，根据当时的 ϵ^c 计算出一相当的时间值 $\bar{t}$，作为后一时间分段的起始值。以图 15.13 给出的例子来讨论，当 $t=t_A$，应力从 σ_3 突然变化为 σ_4，此时的蠕变应变为

$$\epsilon_A^c = A\sigma_3^m t_A^n \tag{15.3.85}$$

当应力突然变化时，认为此蠕变值保持不变，所以应按下式计算出相当的时间值

$$\bar{t}_A = (\varepsilon_A^c / A\sigma_4^m)^{1/n} \tag{15.3.86}$$

作为 $\sigma=\sigma_4$ 曲线上的时间初始值，然后再利用(15.3.83)和(15.3.84)式计算出时间 $t_A \sim t_B$ 内的 ε^c 和 $d\varepsilon^c/dt$。由于应力变化时，蠕变应变曲线从一个应力的曲线过渡到另一个应力的曲线，蠕变应变值保持不变。所以此理论称为应变硬化理论。根据此理论，同一例子中预测的材料蠕变应变历史表示于图 15.14。一般情况下，根据应变硬化理论得到的预测结果和试验结果符合得较好，所以在实际分析中得到更多的应用。

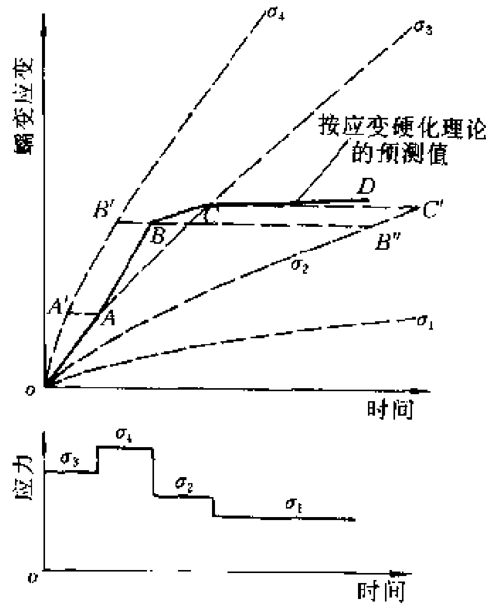


图 15.14　按应变硬化理论预测蠕变应变历史

为用于应力连续变化的一般情况，从(15.3.83)式可以解出

$$t = \left(\frac{\varepsilon^c}{A\sigma^m}\right)^{1/n} \tag{15.3.87}$$

代到(15.3.84)式，则得到应变硬化理论的蠕变率方程

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = A^{1/n} n \sigma^{m/n} (\varepsilon^c)^{(n-1)/n} \tag{15.3.88}$$

这是一微分方程，如给定 $\sigma=\sigma(t)$，从上式可以解出 $\varepsilon^c(t)$。在实际结构分析中，通常 $\sigma(t)$ 需要和 $\varepsilon^c(t)$ 共同求解。这在以后进一步讨论。

另一种可能采用的蠕变规律的表达式是

$$\varepsilon^c = h(\sigma,\theta)[1 - e^{-r(\sigma,\theta)t}] + g(\sigma,\theta)t \tag{15.3.89}$$

其中 h, r, g 是简单的幂函数，由试验确定。上式表达的蠕变规律实际上已包括两个阶段的蠕变。现在讨论中，假定 σ, θ 不变，则可以得到

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \frac{\partial \varepsilon^c}{\partial t} = h(\sigma,\theta) r(\sigma,\theta) e^{-r(\sigma,\theta)t} + g(\sigma,\theta) \tag{15.3.90}$$

与以前讨论相同，当应力或温度发生变化时，直接应用以上两式于不同时间分段，是时间硬化理论。如计算出变化时的相当时间 $\bar{t}$ 作为下一时间分段的起始值，是应变硬化理

论。同时也可导出应变硬化理论中蠕变应变率方程。

如果研究的是多维应力状态的蠕变问题，将以上讨论的一维情况的蠕变规律推广用于多维情况的方法是首先将以上各式中的 ϵ^c 和 σ 代之以等效蠕变应变 $\bar{\epsilon}^c$ 和等效应力 $\bar{\sigma}$($\bar{\epsilon}^c$ 和 $\bar{\sigma}$ 的表达式见(15.3.78)式)。其次是假定蠕变应变率的各个分量和应力偏量成比例，即如(15.3.77)式所表达

$$\frac{d\epsilon_{kl}^c}{dt} = \frac{3}{2\bar{\sigma}}\frac{d\bar{\epsilon}^c}{dt}s_{kl}$$

以上讨论的蠕变规律以及两种硬化理论的应用实际上是限于不发生应力反向的情况。如果出现应力反向，还需引入辅助的规律。因超出本书内容，这里不作进一步讨论。如有需要，建议参考 H. Kraus 的《Creep Analysis》(1980. John Wiley & Sons, Inc.)一书。

15.4 弹塑性增量分析的有限元格式

15.4.1 弹塑性问题的增量方程

由于材料和结构的弹塑性行为与加载以及变形的历史有关。在进行结构的弹塑性分析时，通常将载荷分成若干个增量，然后对于每一载荷增量，将弹塑性方程线性化，从而使弹塑性分析这一非线性问题分解为一系列线性问题。

假设对于时刻 t 的载荷和位移条件($^t\bar{F}_i$ 在 V 内；$^t\bar{T}_i$ 在 S_σ 上；$^t\bar{u}_i$ 在 S_u 上)的位移 ^tu_i，应变 $^t\varepsilon_{ij}$ 和应力 $^t\sigma_{ij}$ 已经求得，当时间过渡到 $t+\Delta t$(在静力分析且不考虑时间效应的情况下，t 和 $t+\Delta t$ 都只表示载荷的水平)，载荷和位移条件有一增量，即

$$\left.\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\bar{F}_i &= {}^t\bar{F}_i + \Delta\bar{F}_i \qquad (\text{在 } V \text{ 内}) \\ {}^{t+\Delta t}\bar{T}_i &= {}^t\bar{T}_i + \Delta\bar{T}_i \qquad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \\ {}^{t+\Delta t}\bar{u}_i &= {}^t\bar{u}_i + \Delta\bar{u}_i \qquad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \end{aligned}\right\} \tag{15.4.1}$$

现在要求解 $t+\Delta t$ 时刻的位移，应变和应力

$$\left.\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}u_i &= {}^tu_i + \Delta u_i \\ {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} &= {}^t\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij} \\ {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} &= {}^t\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{15.4.2}$$

它们应满足的方程和边界条件是

平衡方程

$${}^t\sigma_{ij,j} + \Delta\sigma_{ij,j} + {}^t\bar{F}_i + \Delta\bar{F}_i = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{15.4.3}$$

应变和位移的关系

$${}^t\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^tu_{i,j} + {}^tu_{j,i}) + \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{15.4.4}$$

应力和应变关系(为讨论方便起见，这里未考虑温度和蠕变的影响)

$$\Delta\sigma_{ij} = {}^\tau D_{ijkl}^{ep}\Delta\varepsilon_{kl} \quad (t \leqslant \tau \leqslant t+\Delta t) \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{15.4.5}$$

边界条件

$${}^tT_i + \Delta T_i = {}^t\bar{T}_i + \Delta\bar{T}_i \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \tag{15.4.6}$$

$${}^tu_i + \Delta u_i = {}^t\bar{u}_i + \Delta\bar{u}_i \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{15.4.7}$$

上式中 $$ {}^tT_i = {}^t\sigma_{ij}n_j \quad \Delta T_i = \Delta\sigma_{ij}n_j \tag{15.4.8} $$

需要指出，在小变形的弹塑性分析中，除应力应变关系而外，其他方程和边界条件都是 线性的。所以(15.4.3)～(15.4.8)式中除(15.4.5)式而外都未作进一步简化。如果${}^tu_i$，${}^t\varepsilon_{ij}$和${}^t\sigma_{ij}$已精确地满足时刻 t 的各个方程和边界条件，则可以从上列方程和边界条件中消去它们。现在仍保留它们是由于按照数值求解的结果，它们不一定精确地满足方程和边界条件。这样做相当于进行一次迭代，可避免解的漂移。

至于应力应变关系表示成(15.4.5)式这是一种线性化处理。因为 $\Delta\sigma_{ij}$应通过积分下列非线性关系

$$ \Delta\sigma_{ij} = \int_t^{t+\Delta t} \mathrm{d}\sigma_{ij} = \int_t^{t+\Delta t} D_{ijkl}^{ep}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} \tag{15.4.9} $$

得到，上式中 D_{ijkl}^{ep}是 $\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \bar{\varepsilon}^p$ 等的函数，而它们本身都是待求的未知量，所以将 $\Delta\sigma_{ij}$ 表示为(15.4.5)式是一种线性化处理。如取${}^{\tau}D_{ijkl}^{ep} = {}^tD_{ijkl}^{ep}$相当于最简单的 Euler 法。在弹塑性有限元分析中称为起点切线刚度法。当然还可有其他预测校正的方法以提高计算的精度和效率。

15.4.2 增量有限元格式

首先建立增量形式的虚位移原理如下：如果 $t+\Delta t$ 时刻的应力${}^t\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij}$和体积载荷${}^t\bar{F}_i+\Delta\bar{F}_i$及边界载荷${}^t\bar{T}_i+\Delta\bar{T}_i$ 满足平衡条件，则此力系在满足几何协调条件的虚位移 $\delta(\Delta u_i)$[在 V 内，$\delta(\Delta\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\delta(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i})$；在 S_u 上，$\delta(\Delta u_i)=0$]上的总虚功等于 0。即

$$ \begin{aligned} &\int_V ({}^t\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij})\delta(\Delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V - \int_V ({}^t\bar{F}_i + \Delta\bar{F}_i)\delta(\Delta u_i)\mathrm{d}V \\ &- \int_{S_\sigma} ({}^t\bar{T}_i + \Delta\bar{T}_i)\delta(\Delta u_i)\mathrm{d}S = 0 \end{aligned} \tag{15.4.10} $$

将(15.4.5)式代入上式，则可得到

$$ \begin{aligned} &\int_V {}^{\tau}D_{ijkl}^{ep}\Delta\varepsilon_{kl}\delta(\Delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V - \int_V \Delta\bar{F}_i\delta(\Delta u_i)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \Delta\bar{T}_i\delta(\Delta u_i)\mathrm{d}S \\ &= -\int_V {}^t\sigma_{ij}\delta(\Delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V + \int_V {}^t\bar{F}_i\delta(\Delta u_i)\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} {}^t\bar{T}_i\delta(\Delta u_i)\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{15.4.11} $$

或表示成矩阵形式如下

$$ \begin{aligned} &\int_V \delta(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\,{}^{\tau}\boldsymbol{D}_{ep}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V - \int_V \delta(\Delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\Delta\bar{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \delta(\Delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\Delta\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S \\ &= -\int_V \delta(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\,{}^t\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V + \int_V \delta(\Delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\,{}^t\bar{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \delta(\Delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\,{}^t\bar{\boldsymbol{T}}\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{15.4.12} $$

上式实际上就是增量形式的最小势能原理。它的左端和全量的最小势能原理的表达式在形式上完全相同。只是将全量改为增量。上式的右端是考虑${}^t\boldsymbol{\sigma}$ 和${}^t\bar{\boldsymbol{F}}$，${}^t\bar{\boldsymbol{T}}$ 可能不精确满足平衡而引入的校正项，也可理解为不平衡力势能(相差一负号)的变分。

基于增量形式虚位移原理有限元表达格式的建立步骤和一般全量形式的完全相同，首先将各单元内的位移增量表示成结点位移增量的插值形式

$$ \Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\Delta\boldsymbol{a}^e \tag{15.4.13} $$

再利用几何关系，得到

$$\Delta \varepsilon = \boldsymbol{B} \Delta \boldsymbol{a}^e \tag{15.4.14}$$

将以上两式代入(15.4.12)式，并由虚位移的任意性，就得到有限元的系统平衡方程

$$^t\boldsymbol{K}_{ep} \Delta \boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{Q} \tag{15.4.15}$$

其中$^t\boldsymbol{K}_{ep}$，$\Delta \boldsymbol{a}$，$\Delta \boldsymbol{Q}$分别是系统的弹塑性刚度矩阵，增量位移向量和不平衡力向量。它们分别由单元的各个对应量集成，即

$$\left.\begin{aligned} &^t\boldsymbol{K}_{ep} = \sum_e {}^t\boldsymbol{K}_{ep}^e,\ \Delta \boldsymbol{a} = \sum_e \Delta \boldsymbol{a}^e \\ &\Delta \boldsymbol{Q} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l - {}^t\boldsymbol{Q}_i = \sum_e {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l^e - \sum_e {}^t\boldsymbol{Q}_i^e \end{aligned}\right\} \tag{15.4.16}$$

并且

$$\left.\begin{aligned} &^t\boldsymbol{K}_{ep}^e = \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\, {}^t\boldsymbol{D}_{ep} \boldsymbol{B} \mathrm{d}V \\ &^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l^e = \int_{V_e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\, {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{F}} \mathrm{d}V + \int_{S_{\sigma_e}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\, {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{T}} \mathrm{d}S \\ &^t\boldsymbol{Q}_i^e = \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\, {}^t\boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}V \end{aligned}\right\} \tag{15.4.17}$$

上式中$^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l$，$^t\boldsymbol{Q}_i$分别代表外加载荷向量和内力向量，所以$\Delta \boldsymbol{Q}$称不平衡力向量。如果$^t\boldsymbol{Q}_l$和$^t\boldsymbol{Q}_i$满足平衡的要求，则$\Delta \boldsymbol{Q}$表示载荷增量向量。

从(15.4.15)式解出$\Delta \boldsymbol{a}$以后，利用几何关系(15.4.14)式可以得到$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$，再按(15.4.9)式对本构关系进行积分可以得到$\Delta \boldsymbol{\sigma}$，并进而得到$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}$。需要指出，这时如将$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$代入(15.4.15)式右端，将发现

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_i &= \sum_e {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l^e - \sum_e {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_i^e \\ &= \sum_e \left(\int_{V_e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\, {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{F}} \mathrm{d}V + \int_{S_{\sigma_e}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\, {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{T}} \mathrm{d}S \right) - \sum_e \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}V \end{aligned}$$

在一般情况下并不等于0，这表明此时求得的应力$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$和外载荷$^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{F}}$及$^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{T}}$尚未完全满足平衡条件，也即仍存在不平衡力向量$\Delta \boldsymbol{Q}$。需要通过迭代，以求得新的$\Delta \boldsymbol{a}$，$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$和$\Delta \boldsymbol{\sigma}$及$^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$，直至(15.4.15)式的右端为0，即求得和外载荷完全满足平衡要求的应力状态为止。

从以上讨论可见，弹塑性增量有限元分析在将加载过程划分为若干增量步以后，对于每一增量步包含下列三个算法步骤：

1. 线性化弹塑性本构关系(如(15.4.5)式)，并形成增量有限元方程(如(15.4.15)式)。

2. 求解有限元方程(每个增量步或每次迭代的$^t\boldsymbol{K}_{ep}$都可能发生局部的变化)。

3. 积分本构方程(如(15.4.9)式)决定新的应力状态，检查平衡条件，并决定是否进行新的迭代。

上述每一步骤的算法方案和数值方法，以及载荷增量步长的选择关系到整个求解过程的稳定性、精度和效率，是有限元数值方法研究的重要课题之一。以下将对其中的几个

问题进行必要的讨论。

15.5 数值方法中的几个问题

15.5.1 非线性方程组的求解方案

利用 15.2 节所讨论的非线性方程组的一般解法于材料非线性有限元分析，根据具体问题的特点，可以组成不同的求解方案。通常采用的有下列几种：

1. 无迭代的增量解法

此解法是对于每个载荷增量，求解方程(15.4.15)式。如进一步令 $\tau=t$，实际上就是(15.2.20)式所表述的 Euler 算法。由于应力应变关系线性化带来的近似性，无疑地，如果要求得到足够精确的解答，必须采用足够小的载荷增量。另外，每一增量步中要重新形成和分解刚度矩阵，一般情况下计算效率是不高的。

2. 具有变刚度迭代(N-R 迭代)的增量解法

此解法就是将(15.2.18)和(15.2.19)式所表述的算法用于弹塑性分析的情况。此时系统求解方程(15.4.15)式可以改写成

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}_{ep}^{(n)}\Delta\boldsymbol{a}^{(n)} = \Delta\boldsymbol{Q}^{(n)} \tag{15.5.1}$$

其中 n 是迭代次数，$n=0,1,2,\cdots$，

$$\left.\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}_{ep}^{(n)} &= \sum_e \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}\,t+\Delta t}\boldsymbol{D}_{ep}^{(n)}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V \\ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{D}_{ep}^{(n)} &= \boldsymbol{D}_{ep}({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(n)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}^{(n)}, {}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p(n)}) \\ \Delta\boldsymbol{Q}^{(n)} &= {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l - \sum_e \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}\,t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\mathrm{d}V \end{aligned}\right\} \tag{15.5.2}$$

且有

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = {}^{t}\boldsymbol{\sigma}, \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}^{(0)} = {}^{t}\boldsymbol{\alpha}, \quad {}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p(0)} = {}^{t}\bar{\varepsilon}^{p} \tag{15.5.3}$$

当 $n=0$ 时，方程(15.5.1)式就是取 $\tau=t$ 的(15.4.15)式。具体的迭代步骤是

(1) 利用(15.5.2)式计算 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}_{ep}^{(n)}$，$\Delta\boldsymbol{Q}^{(n)}$ 形成方程组(15.5.1)式。

(2) 求解方程组(15.5.1)式，得到本次迭代的位移增量修正量 $\Delta\boldsymbol{a}^{(n)}$

$$\Delta\boldsymbol{a}^{(n)} = ({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}_{ep}^{(n)})^{-1}\Delta\boldsymbol{Q}^{(n)} \tag{15.5.4}$$

于是得到

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n)} + \Delta\boldsymbol{a}^{(n)} \tag{15.5.5}$$

(3) 计算各单元应变增量和应力增量修正量

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{a}^{(n)} \tag{15.5.6}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \int_0^{\Delta\varepsilon^{(n)'}} \boldsymbol{D}_{ep}\mathrm{d}\varepsilon \tag{15.5.7}$$

其中 $\Delta\varepsilon^{(n)'}$ 是 $\Delta\varepsilon^{(n)}$ 中的弹塑性部分。关于 $\Delta\varepsilon^{(n)'}$ 的确定和(15.5.7)式的积分计算见以后 15.5.3节。从 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ 可得

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(n)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(n)} \tag{15.5.8}$$

(4) 根据收敛准则检验解是否满足收敛要求。如已满足，则认为此增量步内迭代已经

收敛。对于每个增量步执行上述迭代,直至全部时间内的解被求得。

常用的收敛准则有

位移收敛准则: $$\| \Delta \boldsymbol{a}^{(n)} \| \leqslant er_D \| {}^t\boldsymbol{a} \| \tag{15.5.9}$$

平衡收敛准则: $$\| \Delta \boldsymbol{Q}^{(n)} \| \leqslant er_F \| \Delta \boldsymbol{Q}^{(0)} \| \tag{15.5.10}$$

能量收敛准则: $$(\Delta \boldsymbol{a}^{(n)})^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{Q}^{(n)} \leqslant er_E (\Delta \boldsymbol{a}^{(n)})^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{Q}^{(0)} \tag{15.5.11}$$

er_D, er_F, er_E 是规定的容许误差。关于收敛准则的选择和容许误差的规定需要考虑具体问题的特点和精度要求。

3. 具有常刚度迭代(mN-R 迭代)的增量解法

解法步骤和前一种迭代解法相同,只是刚度矩阵保持某时刻的数值。如保持为每个增量步开始时刻 t 的数值,称为起点切线刚度,这时

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}_{ep}^{(n)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}_{ep}^{(0)} = {}^t\boldsymbol{K}_{ep} = \sum_e \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\, {}^t\boldsymbol{D}_{ep} \boldsymbol{B} \mathrm{d}V \tag{15.5.12}$$

其中 $${}^t\boldsymbol{D}_{ep} = \boldsymbol{D}_{ep}({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\boldsymbol{\alpha}, {}^t\bar{\varepsilon}^p)$$

如果刚度矩阵始终保持为弹性刚度矩阵,解法等效于一般的初应力法,这时

$$^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}_{ep}^{(n)} = \boldsymbol{K}_e = \sum_e \int \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_e \boldsymbol{B} \mathrm{d}V \tag{15.5.13}$$

对于后一种常刚度迭代,刚度矩阵在整个求解过程中只要形成和分解一次。对于前一种常刚度迭代也不限制为起点切线刚度,例如先用前一增量步的刚度矩阵迭代 1~2 次以后,再形成本增量步的刚度矩阵,以及可以规定经一定的迭代次数,仍不满足收敛准则的要求,则重新形成和分解新的刚度矩阵。

以上讨论了变刚度迭代和常刚度迭代的基本步骤,但是具体采用何种求解方案,仍应根据具体问题的特点,综合考虑精度和效率两方面因素。变刚度迭代具有良好的收敛性,允许采用较大的时间步长,但每次迭代都要重新形成和分解新的刚度矩阵。而采用常刚度迭代可以节省上述计算费用,缺点是收敛速度较慢,特别在接近载荷的极限状况时,因此经常需要同时采用加速迭代的措施。另方面在变刚度迭代中,时间步长常常也受到一些实际因素的限制,例如包含时间效应的问题(如蠕变问题、动力问题),如果解的方案是条件稳定的,时间步长必须小于某个规定的临界步长。再如对非线性本构关系线性化时,曾假定在一个时间步长内,应变向量方向不变,实际上该方向在时间步长内是变化的,对于该方向变化较快的结构和受力情况,上述假定将会带来较大的误差,因此时间步长必须限制在较小的范围内,这时采用变刚度迭代就不必要和不适合了。基于上述讨论,在一个通用的计算程序中应包含若干控制参数,以便根据具体问题的特点选择合理的求解方案。

15.5.2 载荷增量步长的自动选择

在以上的讨论中都是假定载荷增量(或时间步长)是事先已经规定了的。这种事先将外加载荷分为若干个规定大小的增量步进行分析的方法是最简单的、也是常用的。但是在很多情况下,这种方法是不可行的。例如由理想弹塑性材料组成的结构,当载荷到达某一极限值时,结构将发生垮塌。表现在基于小变形理论的弹塑性分析中,当载荷到达极限值时,结构的位移将可无限增长。对应地,结构的载荷-位移曲线如图 15.15 所示。实际分析,

由于极限载荷 $P_{\lim}$ 正是待求的未知量，如采用事先规定载荷增量步长的方法进行分析，当 ${}^{t+\Delta t}P > P_{\lim}$ 时，将导致求解失败。因为在采用 N-R 迭代求解时，将会遇到 $\boldsymbol{K}$ 奇异的情况（如图 15.15(*a*)所示）；而如采用 mN-R 迭代求解，则总不能收敛（如图 15.15(*b*)所示）。为求得比较精确的极限载荷 $P_{\lim}$，此时可以采用的方法，是将载荷增量减小为二分之一，继续进行分析。如再遇上述求解失败情况，则再将载荷增量对半，再继续分析。这样逐步试探地逼近 $P_{\lim}$。无疑，这是一种麻烦而效率不高的方法。因此有必要研究载荷增量步长自动选择的方法。

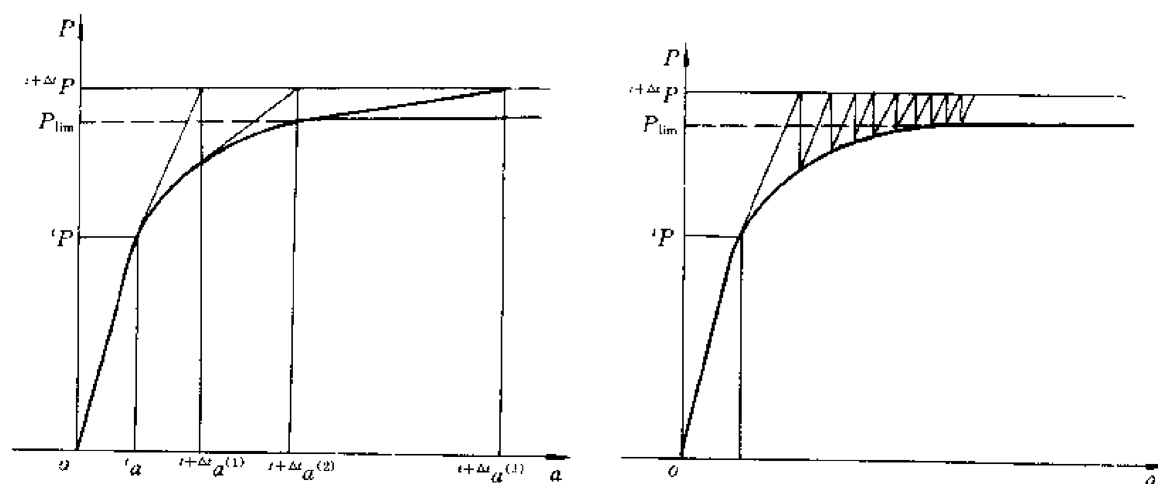


图 15.15 规定载荷增量条件计算结构的极限载荷

(*a*) N-R 迭代 (*b*) mN-R 迭代

在研究载荷增量步长自动选择的方法时，首先是假设载荷的分布模式是给定的，变化的只是它的幅值。在此情况下，外载荷可表示成

$$\left.\begin{aligned} {}^t\overline{\boldsymbol{F}} &= {}^tp\overline{\boldsymbol{F}}_0,\ {}^t\overline{\boldsymbol{T}} = {}^tp\overline{\boldsymbol{T}}_0, \\ \Delta\overline{\boldsymbol{F}} &= \Delta p\overline{\boldsymbol{F}}_0,\ \Delta\overline{\boldsymbol{T}} = \Delta p\overline{\boldsymbol{T}}_0 \end{aligned}\right\} \tag{15.5.14}$$

相应地，结构的等效结点载荷向量也表示成

$${}^t\boldsymbol{Q}_l = {}^tp\boldsymbol{Q}_0,\ \Delta\boldsymbol{Q}_l = \Delta p\boldsymbol{Q}_0 \tag{15.5.15}$$

以上式中，$\overline{\boldsymbol{F}}_0$，$\overline{\boldsymbol{T}}_0$ 和 $\boldsymbol{Q}_0$ 分别体积力、表面力和结点载荷的模式，p 是载荷幅值，或称载荷因子。载荷的分步实际就是 $p(t)$ 的分步。

假定对于 ${}^tp = p(t)$ 的解已求得，现在要确定 ${}^{t+\Delta t}p = {}^tp + \Delta p$ 的大小。在载荷步长自动选择的求解过程中，通常 Δp 不是一次给定，而是通过多次迭代不断修正以最后确定。现约定如下表示式：

$${}^{t+\Delta t}p^{(n+1)} = {}^{t+\Delta t}p^{(n)} + \Delta p^{(n)} \quad (n = 0,1,2,\cdots,r) \tag{15.5.16}$$

且有

$$\Delta p = \sum_{n=0}^{r} \Delta p^{(n)} \tag{15.5.17}$$

其中 n 是迭代次数，r 是迭代收敛的次数，$\Delta p^{(n)}$ 是 n 次迭代确定的 Δp 的修正值。${}^{t+\Delta t}p^{(n)}$ 经

$n-1$ 次迭代修正后得到的 ${}^{t+\Delta t}p$ 的数值。

现具体讨论几种常用的自动选择载荷步长的方法。

1. 规定"本步刚度参数"的变化量以控制载荷增量。

此方法中，每一增量步的载荷因子增量 Δp 仍是一次确定的，但是它是通过事先规定结构在本增量步的刚度变化来控制的，这是 Bergan 等人提出的一种自动进行载荷分布的方法[1]。此法对计算结构的极限载荷特别有效。其基本思想是对于每一载荷分步，让结构刚度的变化保持差不多的大小。

(1) "本步刚度参数"的概念

第 i 增量步结构的总体刚度可用下式度量

$$S_p^{(i)*} = \frac{\Delta \boldsymbol{Q}^{(i)\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{Q}^{(i)}}{\Delta \boldsymbol{a}^{(i)\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{Q}^{(i)}} \tag{15.5.18}$$

初始(全弹性)结构总体刚度的度量是

$$S_p^{(0)*} = \frac{\boldsymbol{Q}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_e}{\boldsymbol{a}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_e} \tag{15.5.19}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_e$ 和 $\boldsymbol{a}_e$ 是载荷向量和按弹性分析得到的位移向量。

用无量纲参数 S_p^i 作为第 i 步的结构刚度参数

$$S_p^{(i)} = \frac{S_p^{(i)*}}{S_p^{(0)*}} \tag{15.5.20}$$

$S_p^{(i)}$ 称为第 i 步的"本步刚度参数"，它代表结构本身的刚度性质，与载荷增量的大小无关。当结构处于完全弹性时，$S_p^{(i)}=1$。随着载荷的增加，结构中的塑性区逐渐扩大，结构逐渐变软，$S_p^{(i)}$ 也逐渐减小。当到达极限载荷时，$S_p^{(i)}=0$。

对于比例加载情况，如前所述，这时可记 $\boldsymbol{Q}_e=p_e\boldsymbol{Q}_0$，$\Delta\boldsymbol{Q}^{(i)}=\Delta p_i\boldsymbol{Q}_0$，于是(15.5.20)式可以简化为

$$S_p^{(i)} = \frac{\Delta p_i}{p_e} \frac{\boldsymbol{a}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_0}{\Delta \boldsymbol{a}^{(i)\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_0} \tag{15.5.21}$$

其中 p_e 是弹性极限载荷参数，$\boldsymbol{Q}_0$ 是 $p=1$ 时的结点载荷向量(载荷模式)。

利用本步刚度参数可以使步长调整得比较合理，并可减少总的增量步数，特别适合于计算理想弹塑性材料组成的结构的极限载荷等情况。

(2) 增量步长的自动选择

以计算结构的极限载荷为例，利用"本步刚度参数"的规定变化量自动选择增量步长时，具体的算法步骤是

(i) 求弹性极限载荷参数 p_e

先施加任意的载荷 $p\boldsymbol{Q}_0$，假定结构为完全弹性求解，求出结构内的最大等效应力 $\bar{\sigma}_{\max}$，则

$$p_e = p\frac{\sigma_{s0}}{\bar{\sigma}_{\max}} \tag{15.5.22}$$

其中 σ_{s0} 是材料的初始屈服应力。

(ii) 给定第一步载荷参数增量 Δp_1(例如取 $\Delta p_1=p_e/N$，N 的值可以事先给定)，用 p_1

$=p_e+\Delta p_1$ 求解第一增量步。

(iii) 给定第二及以后各增量步的刚度参数变化的预测值 $\Delta\tilde{S}_p$(它的大小决定步长的大小，例如可在 0.05～0.2 之间选择)，并给定刚度的最小允许值 $S_p^{\min}$(到达极限载荷时 $S_p=0$，但在计算中如 $S_p=0$，则结构刚度矩阵奇异，所以 $S_p^{\min}$ 应为接近于 0 的小的正数)，则每步载荷参数的增量为

$$\Delta p_i=\Delta p_{i-1}\frac{\min\{\Delta\tilde{S}_p,S_p^{(i-1)}-S_p^{\min}\}}{|S_p^{(i-2)}-S_p^{(i-1)}|}\quad(i=2,3,\cdots)\tag{15.5.23}$$

然后用 $p_i=p_{i-1}+\Delta p_i$ 求解第 i 载荷增量步。

在第 i 增量步的解答求得以后，利用(15.5.20)式计算本步刚度参数 $S_p^{(i)}$ 和它的变化值 $\Delta S_p^{(i)}=S_p^{(i)}-S_p^{(i-1)}$，$\Delta S_p^{(i)}$ 和预测值 $\Delta\tilde{S}_p$ 会有一定差别。所以此算法是在保持本步刚度参数变化值接近为常数条件下选择载荷增量的大小。算法的执行示意如图 15.16。从图可见，Δp_i 是在给定 $\Delta\tilde{S}_p$ 情况下，利用 $\Delta p_{i-1}/|S_p^{(i-2)}-S_p^{(i-1)}|$ 线性外推得到。实际计算中，由于 $S_p\sim p$ 曲线不一定如图示那样规则，在给定 $\Delta\tilde{S}_p$ 的情况下，可能使 Δp_i 时而过大、时而过小，影响计算的执行。此时可以利用 $S_p^{(i-3)},S_p^{(i-2)},S_p^{(i-1)}$ 二次外推得到 Δp_i，实际计算表明，这样确定 Δp_i 可避免上述现象，从而使最终计算结果有较大改进。

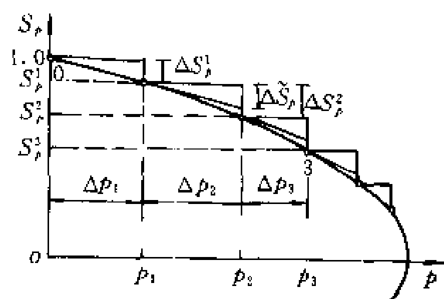


图 15.16 载荷的自动分步

2. 规定某个结点的位移增量以确定载荷增量

增量迭代的有限元求解方程在 15.5.1 节中已给出。以 mN-R 迭代为例，它可以表示成

$${}^{t}\boldsymbol{K}_{ep}\Delta\boldsymbol{a}^{(n)}=\Delta\boldsymbol{Q}^{(n)}\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{15.5.24}$$

在载荷增量步长自动控制的求解方法中，$\Delta\boldsymbol{Q}^{(n)}$ 可以表示成

$$\Delta\boldsymbol{Q}^{(n)}={}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l^{(n+1)}-{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_i^{(n)}\tag{15.5.25}$$

其中：

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l^{(n+1)}={}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_l^{(n)}+\Delta\boldsymbol{Q}_l^{(n)}=({}^{t+\Delta t}p^{(n)}+\Delta p^{(n)})\boldsymbol{Q}_0\tag{15.5.26}$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_i^{(n)}=\sum_e\int_{V_e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}\,t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\mathrm{d}V\tag{15.5.27}$$

(15.5.25)式还可以改写成

$$\Delta\boldsymbol{Q}^{(n)}=\Delta\boldsymbol{Q}_u^{(n)}+\Delta\boldsymbol{Q}_l^{(n)}=\Delta\boldsymbol{Q}_u^{(n)}+\Delta p^{(n)}\boldsymbol{Q}_0\tag{15.5.28}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{Q}_u^{(n)}$ 是 $n-1$ 次迭代后得到的 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ 和外载荷 ${}^{t+\Delta t}p^{(n)}\boldsymbol{Q}_0$ 构成的不平衡结点力向量，即

$$\Delta \boldsymbol{Q}_u^{(n)} = {}^{t+\Delta t}p^{(n)}\boldsymbol{Q}_0 - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}_i^{(n)} \tag{15.5.29}$$

$\Delta p^{(n)}$是在 n 次迭代中由某个规定的约束条件来确定的载荷因子增量 Δp 的第 n 次修正量。在现在的方法中，这约束条件就是某个结点的位移增量的大小。例如规定 $\Delta \boldsymbol{a}$ 中的某个分量 Δa_g 是给定的，此条件可表示为

$$\Delta a_g^{(n)} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\Delta \boldsymbol{a}^{(n)} = \begin{cases} \Delta l & (n=0) \\ 0 & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{15.5.30}$$

其中 Δl 是 Δa_g 的规定值，$\boldsymbol{b}$ 是除第 g 个元素为 1，其余元素为 0 的向量。具体迭代的算法步骤如下：

(1) 计算对于结点载荷模式 $\boldsymbol{Q}_0$ 的位移模式 $\boldsymbol{a}_0$

$$\boldsymbol{a}_0 = {}^{t}\boldsymbol{K}_{ep}^{-1}\boldsymbol{Q}_0 \tag{15.5.31}$$

(2) 计算对于不平衡结点力向量 $\Delta \boldsymbol{Q}_u^{(n)}$ 的位移增量修正值 $\Delta \boldsymbol{a}_u^{(n)}$ 和 n 次迭代后位移增量修改值的全量 $\Delta \boldsymbol{a}^{(n)}$

$$\Delta \boldsymbol{a}_u^{(n)} = {}^{t}\boldsymbol{K}_{ep}^{-1}\Delta \boldsymbol{Q}_u^{(n)} \tag{15.5.32}$$

$$\Delta \boldsymbol{a}^{(n)} = \Delta \boldsymbol{a}_u^{(n)} + \Delta p^{(n)}\boldsymbol{a}_0 \quad (n=1,2,\cdots) \tag{15.5.33}$$

其中 $\Delta p^{(n)}$是待定的载荷因子增量的修正值。

(3) 利用条件(15.5.30)式确定 $\Delta p^{(n)}$

$$\Delta a_g = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\Delta \boldsymbol{a}^{(n)} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\Delta \boldsymbol{a}_u^{(n)} + \Delta p^{(n)}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_0 = \begin{cases} \Delta l & (n=0) \\ 0 & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{15.5.34}$$

从上式可得

$$\Delta p^{(n)} = \frac{\Delta a_g^{(n)} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\Delta \boldsymbol{a}_u^{(n)}}{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_0} \tag{15.5.35}$$

这样就确定了 $\Delta p^{(n)}$，从而得到 $\Delta \boldsymbol{a}^{(n)}$，$\Delta \boldsymbol{Q}_l^{(n)} = \Delta p^{(n)}\boldsymbol{Q}_0$ 等。

(4) 计算 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ $\Delta \boldsymbol{Q}_u^{(n+1)}$ 等，并检验收敛准则的要求是否满足。如未满足，回到步骤(2)进行新的一次迭代，直至收敛准则的要求满足为止。本增量步的外载荷增量、位移增量、应力增量的结果是

$$\left.\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{Q}_l &= \sum_{n=0}^{r}\Delta \boldsymbol{Q}_l^{(n)} = \sum_{n=0}^{r}\Delta p^{(n)}\boldsymbol{Q}_0 \\ \Delta \boldsymbol{a} &= \sum_{n=0}^{r}\Delta \boldsymbol{a}^{(n)}, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} = \sum_{n=0}^{r}\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \end{aligned}\right\} \tag{15.5.36}$$

其中 r 为迭代收敛时的次数。

关于每一个增量步某个指定结点位移增量 Δl 本身的选择，通常的方法是第 1 个增量步可由某个给定的载荷因子增量 Δp_1(例如令 $\Delta p_1 = p_e/N$，其中 p_e 是弹性极限载荷因子，N 可取 5～10)通过求解得到 Δl_1。以后各增量步的 Δl_i 可由下式确定，

$$\Delta l_i = \sqrt{\frac{r_0}{r_{i-1}}}\Delta l_{i-1} \tag{15.5.37}$$

式中 Δl_{i-1}是前一增量步的规定位移增量，r_{i-1}是前一次增量步迭代收敛的次数，r_0 是优化的迭代次数，例如取 $r_0 = 4$～6。上式的倾向是使在严重非线性阶段、Δl 缩短，而在接近线性阶段、Δl 加长。

实际计算表明，采用规定某个结点的位移增量以确定载荷增量步长的方法，结合采用(15.5.37)式调节位移增量的大小，计算结构的极限载荷取得了相当满意的结果。

15.5.3 弹塑性状态的决定和本构关系的积分

从上节的讨论中可以看到，增量形式有限元格式中${}^{t}\boldsymbol{D}_{ep}$和 $\Delta\boldsymbol{Q}^{(n)}$的确定是基于已经求得上一增量步或迭代结束时的${}^{t}\sigma$,${}^{t}\alpha$ 和 ${}^{t}\bar{\varepsilon}^{p}$，因此为了进行下一增量步或迭代的计算，需要根据本步或迭代计算得到的位移增量，决定 $\Delta\sigma$,$\Delta\alpha$,$\Delta\bar{\varepsilon}^{p}$ 等，从而得到本步或迭代结束时的弹塑性状态，即 $\boldsymbol{\sigma}$,$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\bar{\varepsilon}^{p}$ 等。这一步骤称为状态决定，它和增量方程的建立(线性化步骤)以及方程组求解一起构成了非线性分析的基本算法过程。它不仅在计算中占相当大的工作量，而且对整个计算结果的精度有很大影响，因此应当给予足够的重视。

1. 决定弹塑性状态的一般算法步骤

在每一增量步或每次迭代，求得位移增量或其修正量 $\Delta\boldsymbol{u}$ 以后，决定新的弹塑性状态的基本步骤如下：

(1) 利用几何关系计算应变增量(或其修正量)

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{a}$$

(2) 按弹性关系计算应力增量的预测值以及应力的预测值

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_e\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{15.5.38}$$

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{t}\boldsymbol{\sigma} + \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tag{15.5.39}$$

其中${}^{t}\boldsymbol{\sigma}$是上一增量步(即 $i-1$ 步)结束时的应力值。

(3) 按单元内各个积分点计算 $\boldsymbol{D}$ 的预测值

1) 计算屈服函数值 $F({}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}},{}^{t}\boldsymbol{\alpha},{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p})$，然后区分三种情况

(i) 若 $F({}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}},{}^{t}\boldsymbol{\alpha},{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p})\leqslant 0$，则该积分点为弹性加载，或由塑性按弹性卸载，这时均有

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tag{15.5.40}$$

(ii) 若 $F({}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}},{}^{t}\boldsymbol{\alpha},{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p})>0$ 且 $F({}^{t}\boldsymbol{\sigma},{}^{t}\boldsymbol{\alpha},{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p})<0$，则该积分点为由弹性进入塑性的过渡情况，应由

$$F({}^{t}\boldsymbol{\sigma} + m\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}},{}^{t}\boldsymbol{\alpha},{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p}) = 0 \tag{15.5.41}$$

计算比例因子 m。上式隐含着假设在增量过程中应变成比例的变化。计算 m 是为确定应力到达屈服面的时刻。采用 V. Mises 屈服准则时，m 是下列二次方程的解

$$a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0 \tag{15.5.42}$$

其中： $a_2=\frac{1}{2}\Delta\tilde{\boldsymbol{S}}^{T}\Delta\tilde{\boldsymbol{S}}$, $a_1=({}^{t}\boldsymbol{S}-{}^{t}\boldsymbol{\alpha})^{T}\Delta\tilde{\boldsymbol{S}}$, $a_0=F({}^{t}\boldsymbol{\sigma},{}^{t}\boldsymbol{\alpha},{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p})$ (15.5.43)

对于各向同性硬化情况，$\boldsymbol{\alpha}\equiv 0$。因为${}^{t}\boldsymbol{\sigma}$ 总是在屈服曲面上或屈服曲面之内，所以常数 $a_0\leqslant 0$。同时 $a_2>0$，m 必须取正值，所以

$$m = \left(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\right)\Big/2a_2 \tag{15.5.44}$$

(iii) 若 $F({}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}},{}^{t}\boldsymbol{\alpha},{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p})>0$ 且 $F({}^{t}\boldsymbol{\sigma},{}^{t}\boldsymbol{\alpha},{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p})=0$，则该积分点为塑性继续加载，这时令 $m=0$。

2) 对于(ii)、(iii)两种情况，均有对应于弹塑性部分的应变增量

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' = (1 - m)\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{15.5.45}$$

3）计算弹塑性部分应力增量

$$\Delta\sigma' = \int_0^{\Delta\varepsilon} \boldsymbol{D}_{ep}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\alpha},\bar{\varepsilon}^p)\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{15.5.46}$$

一般情况下用数值积分方法进行此积分，在积分过程中可以同时得到 $\Delta\boldsymbol{\alpha},\Delta\bar{\varepsilon}^p$。

4）计算本增步或迭代结束时刻的 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$，${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}$ 和 ${}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^p$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + m\Delta\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}',\quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha} = {}^t\boldsymbol{\alpha} + \Delta\boldsymbol{\alpha},\quad {}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^p = {}^t\bar{\varepsilon}^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p \tag{15.5.47}$$

2. 本构关系的积分

关于本构关系的积分(15.5.46)式，对于其中的某些情况，已经获得了解析解或解析的近似解，例如 Key 得到了理想弹塑性本构关系的解析解[3]。运动硬化材料本构关系的解析解[4]和各向同性硬化材料本构关系的以 $E^p/(3G+E^p)$ 为小参数的渐近解[5]，近年来都已获得。它们用于实际计算取得较好的结果，即以较小的工作量得到较精确的结果。但是现有的计算程序中仍都采用数值积分方法，其中采用最多的是切向预测径向返回的子增量法。另外，广义中点法近年来也受到较多的重视。现对这二种方法作一较详细的介绍。

(1) 切向预测径向返回子增量法

所谓切向预测就是将 Euler 方法用于(15.5.46)式，得到应力增量的预测值，即

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}_{ep}({}^t\boldsymbol{\sigma},{}^t\boldsymbol{\alpha},{}^tE^p)\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{15.5.48}$$

进一步得到应力的预测值

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tag{15.5.49}$$

同时还可以得到

$$\Delta\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{3}\Delta\lambda\sigma_s \tag{15.5.50}$$

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3}E^p(1-M)\Delta\lambda({}^t\boldsymbol{s} - {}^t\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{Prager 法则}) \tag{15.5.51}$$

或

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3}E^p(1-M)\Delta\lambda({}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{Zeigler 法则}) \tag{15.5.52}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_e\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_e(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}) + (4/9)\sigma_s^2E^p} \\ \sigma_s &= \sigma_s({}^t\bar{\varepsilon}^p,M) = \sigma_{s0} + M[\sigma_s({}^t\bar{\varepsilon}^p) - \sigma_{s0}] \end{aligned}\right\} \tag{15.5.53}$$

并且有

$$\left.\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^p &= {}^t\bar{\varepsilon}^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p \\ {}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} &= {}^t\boldsymbol{\alpha} + \Delta\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned}\right\} \tag{15.5.54}$$

以上各式是对于混合硬化的一般情况给出的，对于各向同性硬化，$M=1$；对于运动硬化，$M=0$。

因为(15.5.50)式所表达的算法是显式的 Euler 方法，其中的 $\boldsymbol{D}_{ep}({}^t\boldsymbol{\sigma},{}^t\boldsymbol{\alpha},{}^t\bar{\varepsilon}^p)$ 是起点切线刚度，所以 $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 是在加载曲面的切线方向。同时由于加载曲面是外凸的，因此 ${}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 总是在加载曲面之外。但是屈服准则要求应力 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ 只能在加载曲面之上或者之内，所以常需再采用径向返回的方法以求得满足屈服条件的 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ 和 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}$。真体做法是令

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = r\,{}^{t+\Delta t}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$ {}^{t+\Delta t}\alpha = r^{t+\Delta t}\widetilde{\alpha} \tag{15.5.55} $$

其中 r 是比例因子，它由下式

$$ F({}^{t+\Delta t}\sigma, {}^{t+\Delta t}\alpha, {}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p}) = 0 \tag{15.5.56} $$

得到

$$ r = \left\{ \frac{2}{3}\sigma_s^2({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^p, M) \Big/ [({}^{t+\Delta t}\widetilde{S} - {}^{t+\Delta t}\widetilde{\alpha})^{T}({}^{t+\Delta t}\widetilde{S} - {}^{t+\Delta t}\widetilde{\alpha})] \right\}^{1/2} \tag{15.5.57} $$

应当指出，虽然经过校正以后得到的 ${}^{t+\Delta t}\sigma$ 是位于屈服曲面上的，但因为假设应变增量 $\Delta\epsilon$ 和等效塑性应变 ${}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}^{p}$ 均保持不变，所以这样的弹塑性状态并不是完全一致的。显然这种不一致性随增量步长的增加而增加。为减小由于这种不一致引起的误差，可将上述方法和子增量法相结合。

所谓子增量法，是将总的应变增量分成若干个子增量。对于每个子增量利用上述的状态决定方法。每一个子增量结束时的弹塑性状态作为下一个子增量的初始状态。显然子增量法将提高计算精度，加快后继迭代的收敛速度。但是子增量数目的增加使得计算量也相应地增加。因此恰当地决定子增量数目是很重要的。

以下两种决定子增量数的方法是比较合理的。

(i) 根据弹性应变偏量增量的大小 $\Delta\bar{e}^{e}$ 确定子增量数 N，即

$$ N = 1 + \frac{\Delta\bar{e}^{e}}{M} \tag{15.5.58} $$

式中 M 根据计算精度的要求加以选择，Bushnell 的计算经验认为取 $M=0.0002$ 就可得到较满意的结果[8]。上式中的 $\Delta\bar{e}^{e}$ 由下式決定

$$ \Delta\bar{e}^{e} = \left(\frac{2}{3}\Delta e_{ij}^{e}\Delta e_{ij}^{e} \right)^{1/2} \tag{15.5.59} $$

其中：

$$ \Delta e_{ij}^{e} = \Delta e_{ij} - \Delta e_{ij}^{p} = \Delta e_{ij} - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{15.5.60} $$

$$ \Delta e_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}(\Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22} + \Delta\varepsilon_{33}) \tag{15.5.61} $$

式内 $\Delta\lambda$ 是 $d\lambda$ 表达式中 $d\varepsilon_{ij}$ 改为 $\Delta\varepsilon_{ij}$ 的结果。$d\lambda, f$ 根据材料硬化情况采用 15.3 节中的各自表达式。

(ii) 根据此增量步开始时的应力偏量 s_{ij}^{c} 和增量步结束时的弹性预测应力偏量 s_{ij}^{F} 之间的夹角 ψ 确定子增量数 N[6]，即

$$ N = 1 + \frac{\psi}{k} \tag{15.5.62} $$

其中

$$ \psi = \cos^{-1}\left[\frac{s_{ij}^{c}s_{ij}^{F}}{(s_{ij}^{c}s_{ij}^{c})^{1/2}(s_{ij}^{F}s_{ij}^{F})^{1/2}} \right] \tag{15.5.63} $$

(15.5.62)式中的 k 根据计算精度的要求而定。我们的计算经验表明，当 $k=0.01$ 时，(15.5.46)式的积分精度可保持在 1%左右。

以上两种确定子增量数目的方法之所以比较合理，是因为它们都是按应变偏量增量

的弹性部分 Δe_{ij}^{e} 的大小来决定子增量数的，而 Δe_{ij}^{e} 是导致应力点偏离屈服曲面的主要原因。如果它是零，表明应变偏量增量全部是塑性，这时根据切向预测法计算出来的应力将可保持在屈服面上，因此不必将 $\Delta\varepsilon_{ij}$ 再划分为若干子增量和采用子增量法进行计算。

如上所述，切向预测是基于显式的 Euler 方法，为使应力的结果保持在屈服面上，通常必需采用径向返回这种人为的强制方法，而进一步和子增量法相结合，不过是使人为强制方法所造成的不一致性尽量减小。虽然当子增量数无限增加时，切向预测径向返回子增量法可以逼近理论上精确解的结果，但是毕竟会使计算量过分增加，因此近年来基于隐式算法的广义中心点受到较多的重视。

(2) 广义中点法[7]

为一般化起见，仍以混合硬化材料的本构关系为例，导出广义中点法数值积分的算法步骤。现假定 ${}^{t}\sigma_{ij}, {}^{t}\alpha_{ij}, {}^{t}\bar{\varepsilon}^{p}, \Delta\varepsilon_{ij}$ 已知，决定 ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}={}^{t}\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij}, {}^{t+\Delta t}\alpha_{ij}={}^{t}\alpha_{ij}+\Delta\alpha_{ij}, {}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p}={}^{t}\bar{\varepsilon}^{p}+\Delta\bar{\varepsilon}^{p}$ 等状态量的基本公式是

$$\Delta\sigma_{ij}=D_{ijkl}^{e}(\Delta\varepsilon_{kl}-\Delta\varepsilon_{kl}^{p}) \tag{15.5.64}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{p}=\Delta\lambda[(1-\theta){}^{t}A_{ij}+\theta{}^{t+\Delta t}A_{ij}] \tag{15.5.65}$$

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\varepsilon}^{p}&=\left(\frac{2}{3}\Delta\varepsilon_{ij}^{p}\Delta\varepsilon_{ij}^{p}\right)^{1/2}\\&=\Delta\lambda\left\{\frac{2}{3}[(1-\theta){}^{t}A_{ij}+\theta{}^{t+\Delta t}A_{ij}][(1-\theta){}^{t}A_{ij}+\theta{}^{t+\Delta t}A_{ij}]\right\}^{1/2}\end{aligned} \tag{15.5.66}$$

$$\Delta\alpha_{ij}=\frac{2}{3}E^{p}(1-M)\Delta\lambda[(1-\theta){}^{t}A_{ij}+\theta{}^{t+\Delta t}A_{ij}] \tag{15.5.67}$$

$$F({}^{t+\Delta t}\sigma_{ij},{}^{t+\Delta t}\alpha_{ij},{}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p},M)=\frac{1}{2}{}^{t+\Delta t}A_{ij}{}^{t+\Delta t}A_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{s}^{2}({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p},M)=0 \tag{15.5.68}$$

其中

$$A_{ij}=S_{ij}-\alpha_{ij}\quad(0\leqslant\theta\leqslant1)$$

当 $\theta=0$，(15.5.65)～(15.5.68)各式右端将不包含未知量 ${}^{t+\Delta t}A_{ij}$，算法是显式的。此时它相当于前面讨论的切向预测径向返回方法。当 $\theta>0$，算法是隐式的。当 $\theta\geqslant\frac{1}{2}$，算法是无条件稳定的，而且与屈服面的形状无关，所以这是通常采用的。θ 的具体取值，根据问题的载荷特点和应变增量的大小及方向的不同而与计算结果的精度关联着。对于小的应变增量，$\theta=\frac{1}{2}$ 可得到较高的精度，而一般情况，$\theta=0.7$ 或 0.8 可以得到较好的结果。

需要指出的是，以上各式中的未知量 ${}^{t+\Delta t}A_{ij}$ 实际上可以归结为一个待定的标量 $\Delta\lambda$（现不同于(15.5.53)式中已是确定量的 $\Delta\lambda$）。它最后通过一致性条件(15.5.68)式解出。为导出求解 $\Delta\lambda$ 的方程，首先从(15.5.64)式可得

$$\Delta S_{ij}=2G(\Delta e_{ij}-\Delta\varepsilon_{ij}^{p}) \tag{15.5.69}$$

其中

$$\Delta e_{ij}=\Delta\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{m},\quad \varepsilon_{m}=\frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$$

又因为

$$\begin{aligned}{}^{t+\Delta t}A_{ij}&={}^{t+\Delta t}S_{ij}-{}^{t+\Delta t}\alpha_{ij}\\&={}^{t}A_{ij}+\Delta S_{ij}-\Delta\alpha_{ij}\end{aligned} \tag{15.5.70}$$

将(15.5.67)和(15.5.69)式代入上式，可以得到

$$ {}^{t+\Delta t}A_{ij} = \frac{{}^{t}A_{ij}^{*} - c_1{}^{t}A_{ij}\Delta\lambda}{1 + c_2\Delta\lambda} \tag{15.5.71} $$

其中

$$ {}^{t}A_{ij}^{*} = {}^{t}A_{ij} + 2G\Delta e_{ij} $$

$$ C_1 = C_3(1-\theta),\ C_2 = C_3\theta $$

$$ C_3 = \left[2G + \frac{2}{3}E^{p}(1-M)\right] $$

注意到(15.5.68)式中

$$ \begin{aligned} \sigma_s({}^{t-\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p}, M) &= \sigma_{s0} + M[\sigma_s({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p}) - \sigma_{s0}] \\ &= (1-M)\sigma_{s0} + M\sigma_s({}^{t}\bar{\varepsilon}^{p} + \Delta\bar{\varepsilon}^{p}) \end{aligned} \tag{15.5.72} $$

将(15.5.71)和(15.5.72)式代入(15.5.68)式，就可得到用以确定 $\Delta\lambda$ 的非线性方程

$$ \left|\frac{{}^{t}A_{ij}^{*} - C_1{}^{t}A_{ij}\Delta\lambda}{1+C_2\Delta\lambda}\right|^2 - \frac{2}{3}\left[(1-M)\sigma_{s0} + M\sigma_s\left({}^{t}\bar{\varepsilon}^{p} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda\left|(1-\theta){}^{t}A_{ij} + \theta\frac{{}^{t}A_{ij}^{*} - C_1{}^{t}A_{ij}\Delta\lambda}{1+C_2\Delta\lambda}\right|\right)\right]^2 = 0 \tag{15.5.73} $$

其中 $|x_{ij}| = (x_{ij}x_{ij})^{1/2}$，$\sigma_s({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p})$的函数形式由材料应力应变曲线确定。上述非线性方程通常需要利用数值方法求解，例如利用 N-R 方法或二分法迭代求解。由于方程只包含一个未知量 $\Delta\lambda$，计算工作量很小。当 $\Delta\lambda$ 求得以后，代回以前各式，可以得到新的状态量 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$，${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}$，${}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}^{p}$ 等。

(15.5.73)式中 $M=1$ 或 0 时，分别代表各向同性硬化和运动硬化情况，这时(15.5.73)式可以适当简化。对于某些进一步简化情况，从该式可以得到 $\Delta\lambda$ 的解析解。例如 $M=1, \theta=1$，并且材料呈线性硬化性质，$\sigma_s = \sigma_{s0} + k\bar{\varepsilon}^{p}$。这时从该式可以方便地得到

$$ \Delta\lambda = \frac{\bar{\sigma}^{*} - \sigma_{s0} - k{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p}}{2G(\sigma_{s0} + k{}^{t}\bar{\varepsilon}^{p}) + \frac{2}{3}k\bar{\sigma}^{*}} \tag{15.5.74} $$

其中

$$ \bar{\sigma}^{*} = \sqrt{\frac{3}{2}}|{}^{t}S_{ij}^{*}| = \sqrt{\frac{3}{2}}|{}^{t}S_{ij} + 2G\Delta e_{ij}| $$

如前所述，广义中心点是隐式算法，可以避免切向预测法中所包含的不一致性，因此不需要径向返回的步骤。同时在 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ 的情况下，通常不需要采用子增量方法，即可达到工程所要求的计算精度，因此广义中心法近年来受到广泛的重视，并被很多研究工作所采用。但是也正如前面所指出的，它的计算精度不仅与 θ 的取值有关，而且与问题的载荷特点及载荷增量的大小有关。有时为达到一定的精度要求，需要通过多次的试验和比较，这是数值方法的共同特点。

由于本构方程的积分，在每一增量步的每一次迭代以后，对于单元内的每一高斯积分点都要进行，不仅计算工作量很大，而且影响到整个解的稳定性和可靠性，因此本构方程积分方案的研究一直受到广泛的重视。文[2]，[3]，[4]的工作中提出了理想弹塑性，运动硬化及各向同性材料本构方程的精确积分或渐近积分，在精度和效率上显著改进了现行的数值积分方法。最近 H. K. Hong 等人进一步研究了热弹塑性本构方程的积分方案[8]。他们将问题归结为标量的初值问题，虽然仍需要利用 Runge-Kutta 数值积分方法求解，

但是在同样精度要求条件下，计算效率较之前述的数值积分方案有大幅度的提高。有兴趣读者可参考有关文章。

15.5.4 单元刚度矩阵的数值积分

关于弹塑性刚度矩阵的数值积分，除了4.6节中在讨论如何选择弹性刚度矩阵数值积分的阶次时所提出的一般原则仍然适用而外，还有一些新的因素需要考虑。

首先是单元刚度矩阵$\int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,{}^{t}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V$中本构关系矩阵${}^{t}\boldsymbol{D}$不再是常数，这就提高了被积函数$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,{}^{t}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$的阶次。为了保证积分的精度，数值积分的阶次应作相应的提高。通常弹塑性刚度矩阵的积分阶次要比弹性刚度矩阵高1～2阶。

有时还应考虑的另一因素是，通常情况下总是单元边界的材料先进入塑性。但是Gauss积分方法不包含布置在边界上的积分点。因此采用Gauss积分方法将不能准确地判断单元开始进入塑性的时刻，从而影响计算的精度。当必须考虑此因素时，可以采用Labatto积分方法，它是一种利用不等间距内插、且包括边界积分点的数值积分方法。Labatto方法的求积公式如下：

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \lambda_1^{(n)} f(-1) + \sum_{k=2}^{n-1} \lambda_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)}) + \lambda_n^{(n)} f(1) \qquad (15.5.75)$$

其中n是积分阶数，$(-1,1)$是积分的区间。3～8阶Labatto积分的取样点$\xi_k^{(n)}$和权系数$\lambda_k^{(n)}$见表15.1。

表15.1

积分阶次 n	取样点 $\xi_k^{(n)}$	权系数 $\lambda_k^{(n)}$
3	±1 0	0.33333333 1.33333333
4	±1 ±0.44721360	0.16666667 0.83333333
5	±1 ±0.65465367 0	0.10000000 0.54444444 0.71111111
6	±1 ±0.76505532 ±0.28523152	0.06666667 0.37847496 0.55485838
7	±1 ±0.83022390 ±0.46884879 0	0.04761904 0.27682604 0.43174538 0.48761904
8	±1 ±0.87174015 ±0.59170018 ±0.20929922	0.03571428 0.21070422 0.34112270 0.41245880

例 受均匀分布载荷、两端简支、由理想弹塑性材料构成的梁如图 15.17 所示。由于左右对称，在半跨内用 8 个 20 结点的三维等参元可以得到弹性问题的精确解答。因为沿厚度方向应变线性分布，只需一个单元。直至塑性出现以前，应力沿厚度方向也是线性分布的。而能否正确地反映单元内各处开始进入塑性的时刻取决于数值积分点的选择。在图 15.18 上表示出不同阶 Labatto 积分对计算结果的影响以及 Labatto 积分和 Gauss 积分的比较。在厚度方向布置 8 个 Labatto 积分点的计算结果和解析解比较，误差在 1%范围之内。另外由于 Labatto 积分包括边界积分点，可以精确地判断截面上下表面开始进入塑性的时刻，因此相同数目的积分点数，Labatto 积分比 Gauss 积分的结果要更精确一些。

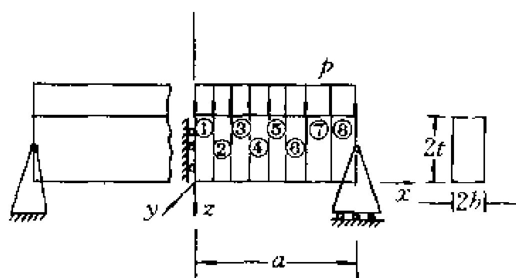
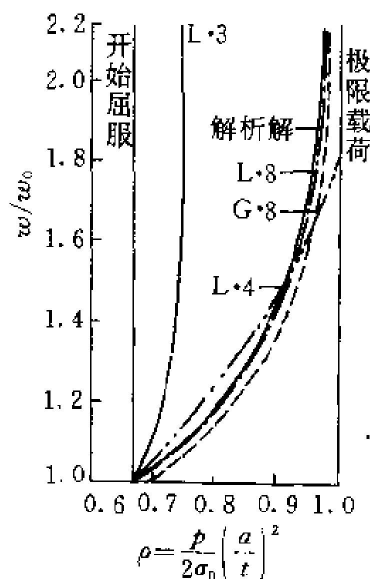


图 15.17 承受均匀载荷的简支梁及其有限元模型



$$\rho=\frac{p}{2\sigma_0}\left(\frac{a}{t}\right)^2$$

图 15.18 简支梁挠度-载荷曲线
(L-n)和(G-n)表示沿梁高度 Labatto 和 Gauss 积分的点数 n。w_0 为开始屈服时的中心挠度，σ_0 为屈服应力

15.5.5 线性方程组的求解

从前面讨论已知，在利用切线刚度法进行结构弹塑性有限元分析时，对于每一增量步，一般需要求解一系数有所变化的线性代数方程组。但是这种变化通常限于系数矩阵的局部区域，这是由于结构即使到达失效阶段，通常大部分区域还保持为弹性状态，针对这种特点，现已提出了不少旨在提高计算效率，降低计算费用的算法。

1. 子结构法

该算法的基本点是将结构在加载过程中保持为弹性的区域和可能进入塑性的区域划分为不同的子结构。各子结构内部自由度凝聚后组成的结构刚度矩阵的阶数将比原来整个结构的自由度数小得多。对于每一载荷增量，弹性子结构的刚度矩阵保持不变。计算工作量缩减为各弹塑性子结构的刚度矩阵以及阶数较低的总体刚度矩阵的重新形成和分解。如果能对结构可能进入塑性的区域事先有较准确的估计，即使进入塑性的区域分散在

结构的不同区域，使用此法也是比较适宜的。但如果事先对可能进入塑性的区域缺乏准确的估计，势必为避免在计算中发生麻烦，将可能进入塑性的区域，也即每次需要重新形成并分解其刚度矩阵的子结构划得过大，而使计算效率降低。另外，即使最后全部进入塑性的子结构，在载荷的开始阶段，其中大部分区域还是处于弹性状态，这时这部分刚度矩阵的重新形成和分解，实际上也是不必要的。

2. 顺序-逆序修正法[9]

这是基于高斯消去的一种算法，它的基本点是将消元的最后一行自动调整到每次加载时塑性区域边缘所对应的行号上，从而将刚度矩阵重新形成和分解的工作量压缩到最小。

如刚度矩阵采用等带宽半带储存，如图 15.19(a)所示，并指定 p 行是消去的最后一行，则先进行 $p-1$ 次顺序的消元，图 15.19(b)中横向实线表示经 $p-1$ 次消元后有所变化的元素，再进行 $n-p$ 次逆序消元，并仍存于上半带，图 15.19(c)中竖向实线表示经 $n-p$ 次逆序消元后有所变化的元素。若在下一步计算中 p 和 $p+b-1$ 列之间的元素发生变化，则求解方程时只要对 p 行和 $p+b-1$ 列之间的元素(即图 15.19(c)上横线和竖线交叉所构成的三角形)进行修改就可以得到解答，而 p 行以前及 $p+b-1$ 列以后的元素都保持不变。若下一步计算中 $G(<p)$ 行和 $H(>p+b-1)$ 列之间的元素发生变化，则只要修改 G 行和 H 列之间的元素就可得到解答。而 G 行以前，H 列以后元素保持不变。一次求解的全部运算操作数是

$$(H-G)\frac{b}{2}\{b(M+A)+3M+A\}\approx(H-G)\frac{b^2}{2}(M+A) \quad (15.5.76)$$

式中 b 是二维带状矩阵的半带宽，M 代表乘除法运算操作，A 代表加减法操作，此法和子结构法相比，由于在求解过程中能自动判定弹塑性区域，基本上可以完全避免弹性区域刚度矩阵的重新形成和分解，因此这种算法的效率是明显的。同时从程序编制上看也是比较简单的。此算法的缺点是要求塑性区比较集中，最好 $H-G$ 之间不要包含弹性区域，以避免不必要的运算。

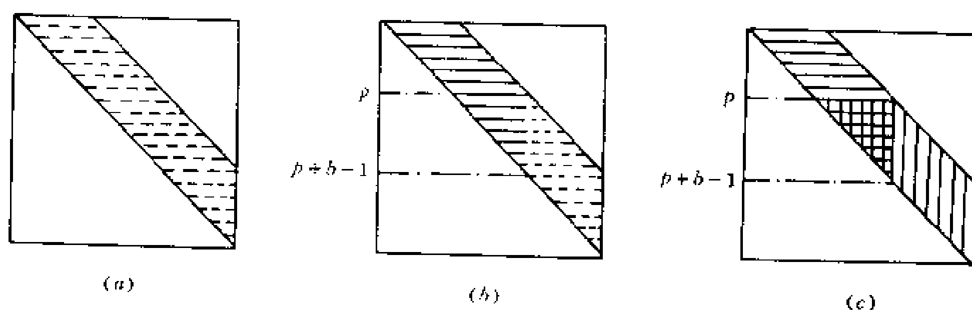


图 15.19 顺序-逆序修正法运算执行示意图

(a) K 的上半带储存 (b) $p-1$ 次顺序消元后的 K (c) 再经 $n-p$ 次逆序消元后的 K

15.6 算 例

例 1 分析一轴向受到约束的承受内压作用的厚壁圆筒[10]，见图 15.20(a)，材料是

弹性-理想塑性，并服从 V. Mises 屈服条件，尺寸和材料参数为 $a=1.0\text{cm}$，$b=2.0\text{cm}$，$E=\frac{26}{3}\times10^4\text{N/mm}^2$，$\nu=0.3$，$\sigma_s=17.32\text{N/mm}^2$，有限元模型如图 15.20($b$)所示，在厚度方向用 4 个 8 结点轴对称单元，刚度矩阵采用 2×2 Gauss 积分。此算例有解析解，所以为弹塑性有限元程序提供一很好的校核。

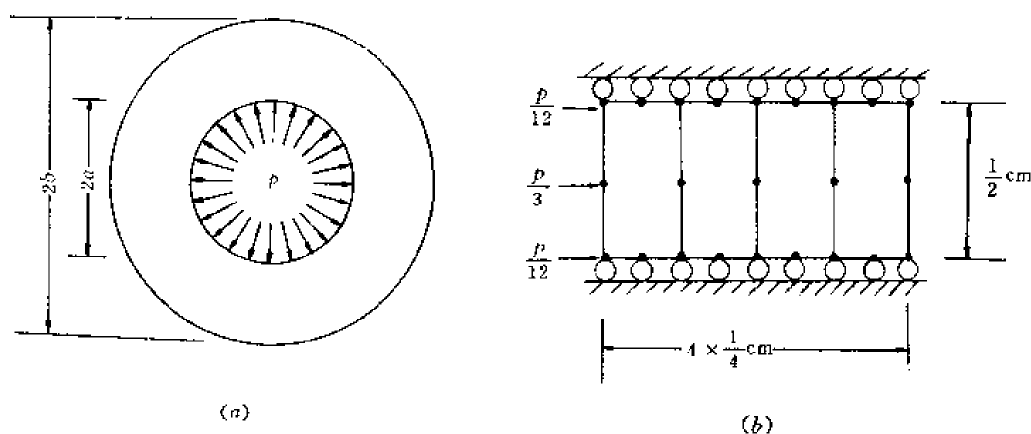


图 15.20 (a) 厚壁筒 (b) 有限元模型

用于计算的加载方案有二：

(1) 内压按 0.5MPa 分级单调加载，直至塑性区达到厚度的 3/4。

(2) 压力循环变化，具体是

$$p=0.0\rightarrow10.0\rightarrow12.5\rightarrow0.0\rightarrow-10.0\rightarrow-12.5\rightarrow0.0\text{MPa}$$

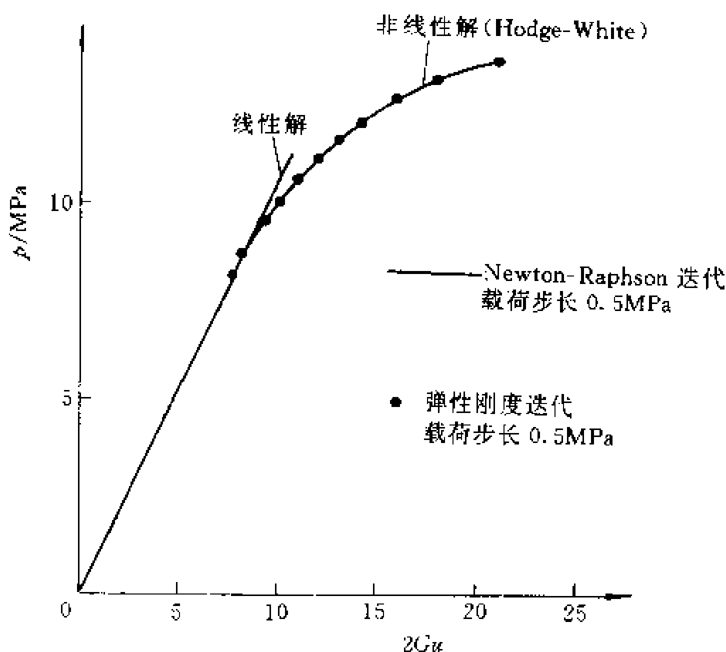


图 15.21 单调加载时的外表面径向位移

第一加载方案的外表面径向位移如图 15.21 所示。用 Newton-Raphson 迭代和弹性常刚度迭代得到的结果都表示在图上。这些结果实际上和 Hodge 和 White 的解析解是一致的。Newton-Raphson 迭代平均每一步需要 1.6 次迭代，总共 17 次重新形成和分解刚度矩阵。常刚度迭代平均每步需要 9 次迭代，但刚度矩阵只形成和分解一次。

$p=12.5$Mpa 时(塑性区达厚度的 1/2)的应力分布如图 15.22(a)，(b)。再次表明有限元解和 Hodge 等的解析解是一致的。

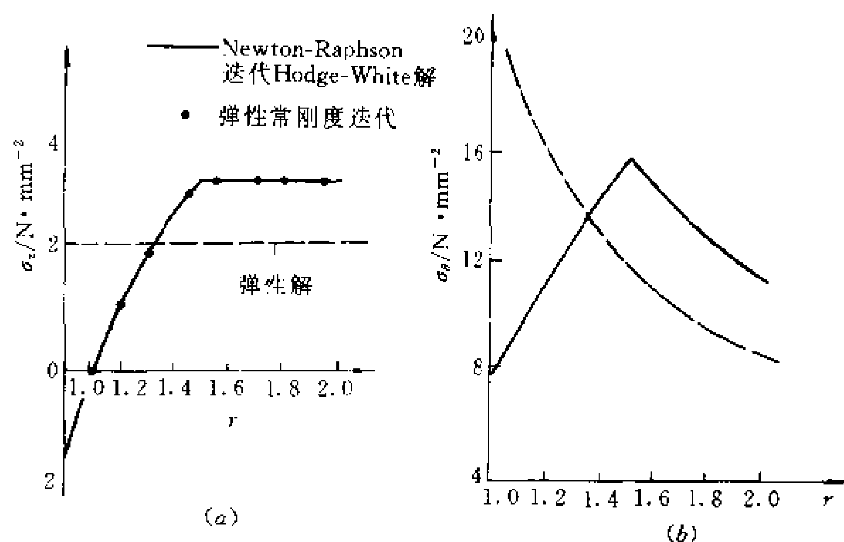


图 15.22 (a) 轴向应力分布 (b) 环向应力分布

对于第二加载方案，只采用了弹性常刚度迭代，外表面的径向位移如图 15.23 所示。

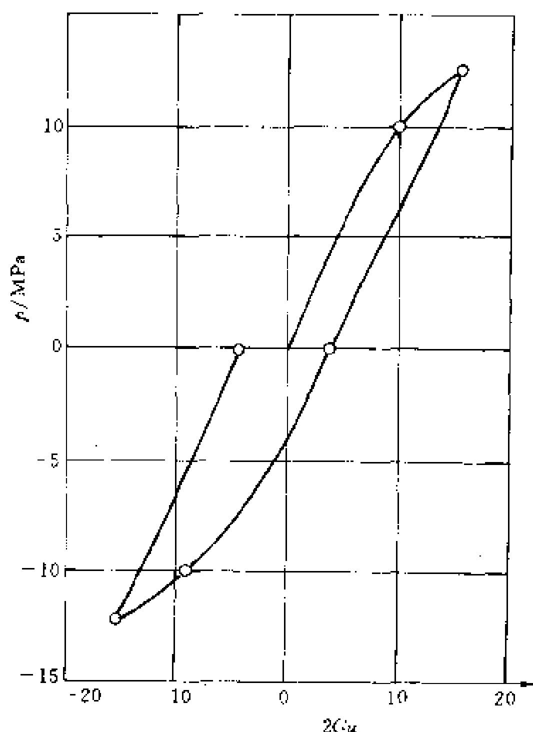


图 15.23 循环加载时的外表面径向位移

此算例还采用规定"本步刚度参数"的变化量以控制载荷增量方法(15.5.2 节)对单调加载方案进行了计算,只用了 5 个载荷增量步骤就最后算出极限载荷,与解析解相差仅 0.7%,说明改进算法对非线性有限元分析是很重要的。

例 2 图 15.24(a)所示为一具有接管受内压的球形压力容器,在图(b)中给出了接管球壳联结附近区域的单元划分和塑性区分布。随着压力的升高,塑性区从接管和球壳的交界面附近逐步扩大,即两端分别向接管和球壳方向发展。计算采用规定"本步刚度参数"的变化量以自动选择载荷步长($\Delta p_1=p_e/3,\Delta\bar{S}_p=0.1$),每增量步长开始时部分地重新形成和分解刚度矩阵,然后进行常刚度迭代,共进行 7 个增量步,达到极限载荷。全部 CPU 时间仅为求解同一弹性问题的 8 倍。这里除总的增量步和迭代次数较少而外,还采用了顺序-逆序修正法,省去了刚度矩阵弹性区域的重新形成和分解时间。

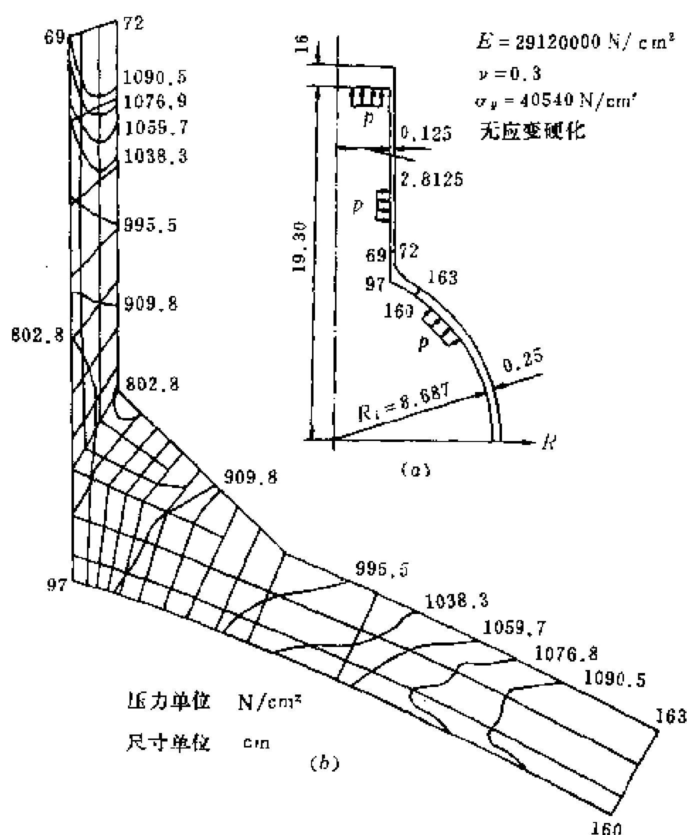


图 15.24 (a) 有接管的球形容器 (b) 接管区的塑性区扩展

15.7 小 结

材料非线性问题有限元分析的基本问题有两个方面:材料本构关系及其积分方法和非线性方程的解法。

关于材料本构关系,在有限元分析中普遍采用的是增量型本构关系,重要的是如何依据塑性力学的基本法则(屈服准则、流动法则和硬化规律)导出它在各种应力状态中的矩阵表示。与之相关的另一要点是如何根据已得的位移增量积分本构方程以获得新的应力

应变状态。

关于非线性方程的求解方法涉及到三个基本步骤:求解(线性化)方案的选择、线性化方程组(每个增量步中,它的系数矩阵局部有所变化)的求解以及新的弹塑性状态的决定和收敛准则的检验。与第一个步骤相关的还有载荷步长自动选择的方法。

虽然弹塑性有限元分析从 60 年代开始被研究和应用以来,至今已相当成熟,本章所介绍的即是其通常被采用的内容。但是为提高分析的能力以及求解的精度和效率,就是这些基本内容仍有很多研究工作在进行。特别是本章讨论的主要是限于静力载荷作用下的弹塑性增量分析,虽然它的基本原理和方法对于其它材料非线性分析和下一章讨论几何非线性分析具有普遍适用的意义,但是由于不同问题的各自特殊性,单就广义的材料非线性有限元分析而言,仍有很多问题的研究对于有限元方法的发展和应用是有重要意义的。

除弹塑性而外的材料非线性问题,例如热弹塑性-蠕变问题、粘弹塑性问题等,由于同时涉及独立于时间和依赖于时间的两类非弹性变形以及本构方程的高度非线性,无论是其本构方程的建立和它的积分方法,还是非线性方程组的求解方法都远比通常的弹塑性分析困难得多。有大量研究工作的报告和论文可以参考,因超出本书内容,这里不一一介绍。

关于弹塑性动力问题,原则上可以采用在第 14 章讨论的关于弹性动力问题的各种方法进行分析。但由于此时刚度矩阵是依赖于变形历史的,也带来一些应予注意的问题,这将在下一章包括几何非线性在内的一般非线性问题的动力分析中一并讨论。

最后指出一点,由于弹塑性增量分析具有普遍的适应性,即它可以用于复杂的加载方式和加载路径,因此作为有限元通用程序,现在差不多无例外的采用增量分析。但是实际工程中有很多问题加载方式和路径是比较简单的,在本章讨论载荷增量步长自动选择时(15.5.2 节),实际上也已对此作了简化的假设(见(15.5.14)式)。在此情况下,如果只涉及单调加载,采用基于塑性力学形变理论的全量分析[1]可以使问题大为简化,计算程序的长度和计算工作量都大大缩减。大量算例,包括受内压作用的三通接管这样比较复杂的结构的计算表明,用此简化方法可以得到和详细增量有限元分析符合得非常好的结果,而计算量仅为详细分析的百分之几。

习 题

15.1 一维弹塑性问题如图 15.25(a)所示,作用于中间截面的轴向力 $P=30$ 材料性质如图 15.25(b),分别用直接迭代法,N-R 法和 mN-R 法求解($A_1=A_2=1$)。

15.2 用增量法求解题 15.1。对于以下两种加载方案:

(1) $0\to15\to20\to25\to30$

(2) $0\to16\to24\to30$

分别用有平衡校正和无平衡校正的 Euler 法计算。

15.3 分别用有加速收敛和无加速收敛的常刚度迭代法求解题 15.2 的问题。每个增量步不采用平衡校正,但规定不平衡允许误差为 0.1。

15.4 证明(15.3.19)式。

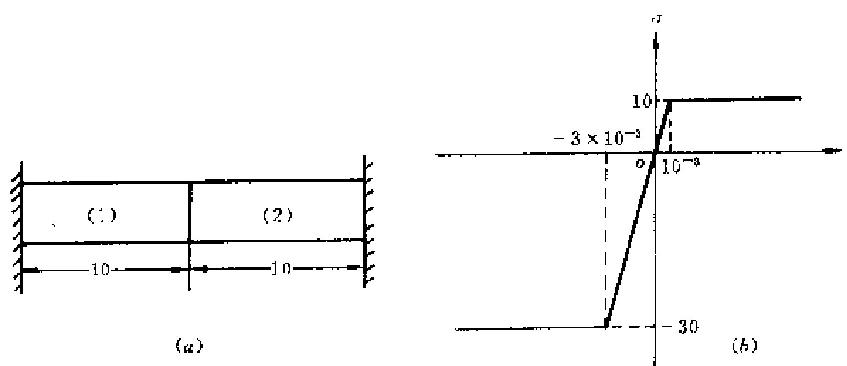


图 15.25

15.5 证明(15.3.24)式。

15.6 导出平面应力问题运动硬化情况的本构矩阵 $\boldsymbol{D}_{rp}$。

15.7 导出(15.3.81)式和(15.3.82)式。

15.8 证明:如果应变偏量的增量 Δe_{ij} 和应力偏量 s_{ij} 的方向相同,则按切向预测得到的应力是在屈服面上。(提示:证明 $|\Delta s|=\Delta R$ 即达到目的)

参考文献

1 Bergan P G., Holand I and Söreide T H. Use of Current Stiffness Parameter in Solution of Nonlinear Problems, Energy Methods in Finite Element Analysis (Edited by R. Glowinski et al). John Wiley & Sons, 1979, 265~282

2 R. D. Krieg, D. B. Krieg. Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-perfectly Plastic Model. Journal of Pressure Vessel Technology, 1977, 510~515

3 王勖成,常亮明. 运动硬化材料的本构关系的精确积分及其推广应用. 力学学报, 1986年第3期,226~234页

4 王勖成,常亮明. 各向同性硬化材料弹塑性本构关系的渐近积分及其计算精度. 固体力学学报,1986年第1期,69~77页

5 Bushnell D., A Strategy for Solution of Problems Involving Large Deflections, Plasticity and Creep. Int, J. Num. Meth. Engng., 1977, 11, 683~708

6 Schreyer H L., et al. Accurate Numerical Solution for Elastic-Plastic Models. J. Pressure Vessel Technology, 1979, 101, 226~234

7 Ortiz M and Popov E P. Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations. Int. J. Num. Meth. Engng., 1985, 21, 1561~1576

8 Hong H K., Lan H S., Liou L K. Study of Integration Strategy for Thermal-Elastic-Plastic Models. J. of Pres. Ves. Tech., 1992, 114, 39~45

9 王勖成,常亮明. 用于结构弹塑性有限元分析的顺序-逆序修正法. 清华大学学报, 1982年第2期,73~88

10 Mondkar D P and Powell G H. Static and bynamic analysis of nonlinear structures. Report No. EERC 75～10, Earthquake Engineering Research Center, Univ. of California, Berkeley, 1975

11 Wang Xucheng and Wang Xiaoning. Simplified Method for Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Hardening Materials. Computers and Structures, 1995, 55, 703～308

第 16 章　几何非线性问题的有限单元法

16.1　引　　言

在以前各章所讨论的问题中，都是基于小变形的假设，即假定物体所发生的位移远小于物体自身的几何尺度，应变远小于 1。在此前提下，建立物体或微元体的平衡条件时可以不考虑物体的位置和形状（简称位形）的变化，因此分析中不必区分变形前和变形后的位形。同时在加载和变形过程中的应变可用一阶无穷小的线性应变进行度量。

实际上，我们会遇到很多不符合小变形假设的问题，例如板、壳等薄壁结构在一定载荷作用下，尽管应变很小、甚至未超过弹性极限，但是位移较大，材料线元素有较大的转动。这时必须考虑变形对平衡的影响，即平衡条件应建立在变形后的位形上，同时应变表达式也应包括位移的二次项。这样一来，平衡方程和几何关系都将是非线性的。这种由于大位移和大转动引起的非线性问题称为几何非线性问题。和材料非线性问题一样，几何非线性问题在结构分析中具有重要意义。例如在平板的大挠度理论中，由于考虑了中面内薄膜力的影响，可能使得按小挠度理论分析得到的挠度有很大程度的缩减。再如在薄壳的过屈曲问题中，载荷到达一定的数值以后，挠度和线性理论的预测值比较，将快速地增加。

实际中还有另一类几何非线性问题，例如金属的成型、橡皮型材料受载荷作用，都可能出现很大的应变，这时除了采用非线性的平衡方程和几何关系而外，还需要引入相应的应力应变关系，尽管对于后一问题材料通常还处于弹性状态。当然很多大应变问题是和材料的非弹性性质联系在一起的。

早期几何非线性有限元分析基本上也是线性分析的扩展，针对各个具体问题进行分析。近年来基于非线性连续介质力学原理的有限元分析有很大发展，可以包括所有非线性因素，同时结合等参元的应用，可以得到统一的一般非线性分析的表达格式，并已有效地应用于广阔的领域。

在涉及几何非线性问题的有限单元法中，通常都采用增量分析方法。它基本上可以采用两种不同的表达格式。第一种格式中所有静力学和运动学变量总是参考于初始位形，即在整个分析过程中参考位形保持不变，这种格式称为完全的 Lagrange 格式。另一种格式中所有静力学和运动学的变量参考于每一载荷或时间步长开始时的位形，即在分析过程中参考位形是不断被更新的，这种格式称为更新的 Lagrange 格式。在通用的有限元分析程序中，通常同时包括这两种格式，使用时可以根据所分析问题及材料本构关系的具体特点和形式选择最有效的格式。

本章 2，3，4，5 节分别讨论大变形情况下应变和应力的度量、几何非线性问题的表达格式、有限元矩阵方程的具体形式和解法以及大变形情况下的本构关系等问题。最后列出若干实例，用以证实有限元分析所具有的广泛适应性并对不同格式作了比较。

16.2 大变形情况下的应变和应力的度量

16.2.1 应变的度量

考虑一在固定的笛卡儿坐标系内的物体，在某种外力的作用下连续地改变其位形，如图 16.1 所示。用${}^0x_i(i=1,2,3)$表示物体处于 0 时刻位形内任一点 P 的坐标，用${}^0x_i+\mathrm{d}{}^0x_i$表示和 P 点相邻近的 Q 点在 0 时刻位形内的坐标。其中左上标表示什么时刻物体的位形。

由于外力的作用，在以后的某个时刻，物体运动并变形到新的位形。用${}^tx_i$ 和${}^tx_i+\mathrm{d}{}^tx_i$分别表示 P 和 Q 点在 t 时刻位形内的坐标。我们可以将物体位形的变化看作是从${}^0x_i$ 到${}^tx_i$的一种数学上的变换。对于某一固定的时刻 t，这种变换可以表示成

$$
{}^tx_i={}^tx_i({}^0x_1,{}^0x_2,{}^0x_3) \tag{16.2.1}
$$

根据变形的连续性要求，这种变换必须是一一对应的，也即变换应是单值连续的，同时上述变换应有唯一的逆变换，也即存在下列单值连续的逆变换

$$
{}^0x_i={}^0x_i({}^tx_1,{}^tx_2,{}^tx_3) \tag{16.2.2}
$$

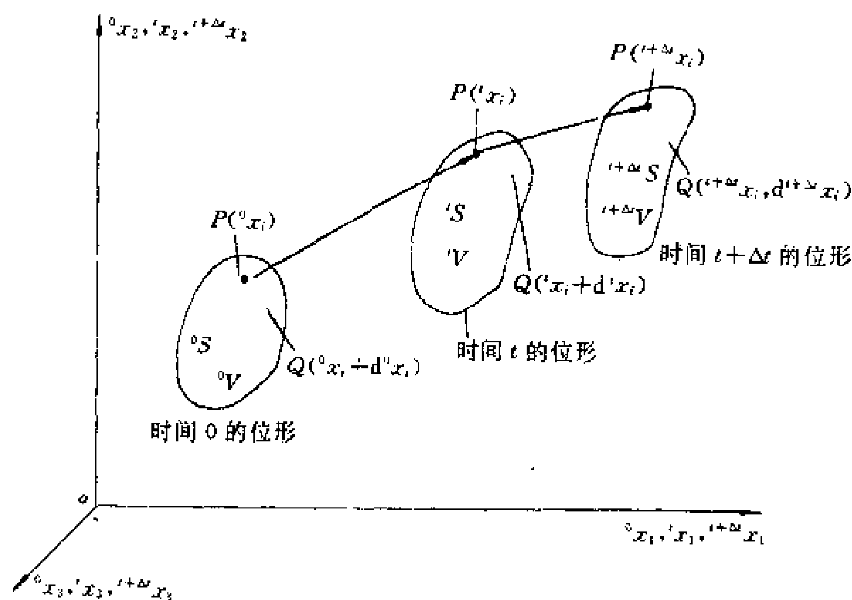


图 16.1 笛卡儿坐标系内物体的运动和变形

利用上列变换，可以将 $\mathrm{d}{}^0x_i$ 和 $\mathrm{d}{}^tx_i$ 表示成

$$
\mathrm{d}{}^0x_i=\left(\frac{\partial{}^0x_i}{\partial{}^tx_j}\right)\mathrm{d}{}^tx_j,\ \mathrm{d}{}^tx_i=\left(\frac{\partial{}^tx_i}{\partial{}^0x_j}\right)\mathrm{d}{}^0x_j \tag{16.2.3}
$$

引用符号

$$
{}^0_tx_{i,j}=\frac{\partial{}^0x_i}{\partial{}^tx_j},\ {}^t_0x_{i,j}=\frac{\partial{}^tx_i}{\partial{}^0x_j} \tag{16.2.4}
$$

则(16.2.3)式可表示成

$$
\mathrm{d}{}^0x_i={}^0_tx_{i,j}\,\mathrm{d}{}^tx_j,\ \mathrm{d}{}^tx_i={}^t_0x_{i,j}\,\mathrm{d}{}^0x_j
$$

其中左下标表示该量对什么时刻位形的坐标求导数，右下标“，”后的符号表示该量对之求偏导数的坐标号。

利用上式，可将 P，Q 两点之间在时刻 0 和时刻 t 的距离 ${}^0\mathrm{d}s$ 和 ${}^t\mathrm{d}s$ 表示为

$$({}^0\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}^0x_i\,\mathrm{d}^0x_i = {}_t^0x_{i,m}\,{}_t^0x_{i,n}\,\mathrm{d}^tx_m\mathrm{d}^tx_n \tag{16.2.5}$$

$$({}^t\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}^tx_i\,\mathrm{d}^tx_i = {}_0^tx_{i,m}\,{}_0^tx_{i,n}\mathrm{d}^0x_m\,\mathrm{d}^0x_n \tag{16.2.6}$$

现在我们来研究变形前后此线段长度的变化，即变形的度量，对此可有两种表示，即

$$\begin{aligned}({}^t\mathrm{d}s)^2 - ({}^0\mathrm{d}s)^2 &= ({}_0^tx_{k,i}\,{}_0^tx_{k,j} - \delta_{ij})\mathrm{d}^0x_i\,\mathrm{d}^0x_j \\ &= 2{}_0^t\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}^0x_i\,\mathrm{d}^0x_j\end{aligned} \tag{16.2.7}$$

或

$$\begin{aligned}({}^t\mathrm{d}s)^2 - ({}^0\mathrm{d}s)^2 &= (\delta_{ij} - {}_t^0x_{k,i}\,{}_t^0x_{k,j})\mathrm{d}^tx_i\,\mathrm{d}^tx_j \\ &= 2{}_t^t\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}^tx_i\,\mathrm{d}^tx_j\end{aligned} \tag{16.2.8}$$

其中定义了两种应变张量，即

$${}_0^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}_0^tx_{k,i}\,{}_0^tx_{k,j} - \delta_{ij}) \tag{16.2.9}$$

$${}_t^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - {}_t^0x_{k,i}\,{}_t^0x_{k,j}) \tag{16.2.10}$$

${}_0^t\varepsilon_{ij}$ 称为 Green-Lagrange 应变张量（以后简称 Green 应变张量），它是用变形前坐标表示的，即它是 Lagrange 坐标的函数。${}_t^t\varepsilon_{ij}$ 称为 Almansi 应变张量，它是用变形后坐标表示的，即它是 Euler 坐标的函数。其中左下标表示用什么时刻位形的坐标表示的，即相对于什么位形度量的。

这两种应变张量之间的关系可以利用(16.2.3)式从(16.2.7)和(16.2.8)式导出

$${}_t^t\varepsilon_{ij} = {}_t^0x_{k,i}\,{}_t^0x_{l,j}\,{}_0^t\varepsilon_{kl} \tag{16.2.11}$$

$${}_0^t\varepsilon_{ij} = {}_0^tx_{k,i}\,{}_0^tx_{l,j}\,{}_t^t\varepsilon_{kl} \tag{16.2.12}$$

为得到应变和位移的关系，可引入位移场

$${}^tu_i = {}^tx_i - {}^0x_i \tag{16.2.13}$$

${}^tu_i$ 表示物体中一点从变形前（时刻 0）位形到变形后（时刻 t）位形的位移，它可以表示为 Lagrange 坐标的函数，也可以表示为 Euler 坐标的函数。从上式可得

$${}_0^tx_{i,j} = \delta_{ij} + {}_0^tu_{i,j} \tag{16.2.14}$$

和

$${}_t^0x_{i,j} = \delta_{ij} - {}_t^tu_{i,j} \tag{16.2.15}$$

将它们代入(16.2.9)和(16.2.10)式就可得到

$${}_0^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}_0^tu_{i,j} + {}_0^tu_{j,i} + {}_0^tu_{k,i}\,{}_0^tu_{k,j}) \tag{16.2.16}$$

$${}_t^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}_t^tu_{i,j} + {}_t^tu_{j,i} - {}_t^tu_{k,i}\,{}_t^tu_{k,j}) \tag{16.2.17}$$

当位移很小时，上式中位移导数的二次项相对于它的一次项可以忽略，这时 Green 应变张量 ${}_0^t\varepsilon_{ij}$ 和 Almansi 应变张量 ${}_t^t\varepsilon_{ij}$ 都简化为小位移情况下的无限小应变张量 ε_{ij}，它们之间的差别也消失了，即

$${}_0^t\varepsilon_{ij} = {}_t^t\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \tag{16.2.18}$$

另外，从(16.2.7)和(16.2.8)式可以看到，在大变形情况下，$({}^t\mathrm{d}s)^2 - ({}^0\mathrm{d}s)^2 = 0$ 意味

着${}^t_0\varepsilon_{ij}=0$ 和${}^t_t\varepsilon_{ij}=0$，反之亦然，即物体为刚体运动的必要而充分的条件是${}^t_0\varepsilon_{ij}$和${}^t_t\varepsilon_{ij}$的所有分量到处为零。

最后应指出，由于 Green 应变张量是参考于时间 0 的位形，而此位形的坐标${}^0x_i(i=1,2,3)$是固结于材料的随体坐标，当物体发生刚体转动时，微线段的长度 ds 不变，同时 d${}^0x_i$ 也不变，因此联系 ds 变化和 d${}^0x_i$ 的 Green 应变张量的各个分量也不变。在连续介质力学中称这种不随刚体转动的对称张量为客观张量。Green 应变张量的上述性质还可以通过算例（习题 16.2）加以进一步验证。此性质对今后建立本构关系是十分重要的。

16.2.2 应力的度量

在大变形问题中，是用从变形后的物体内截取出的微元体来建立平衡方程和与之相等效的虚功原理的。因此首先在从变形后物体内截取出的微元体（如图 16.2 右图所示）上面定义应力张量，此应力张量称为 Euler 应力张量，用${}^t\tau_{ij}$表示，此应力张量有明确的物理意义，代表真实的应力。然而在分析过程中，我们必须联系应力和应变，如应变是用变形前坐标表示的 Green 应变张量，则需要定义与之对应的，即关于变形前位形的应力张量。

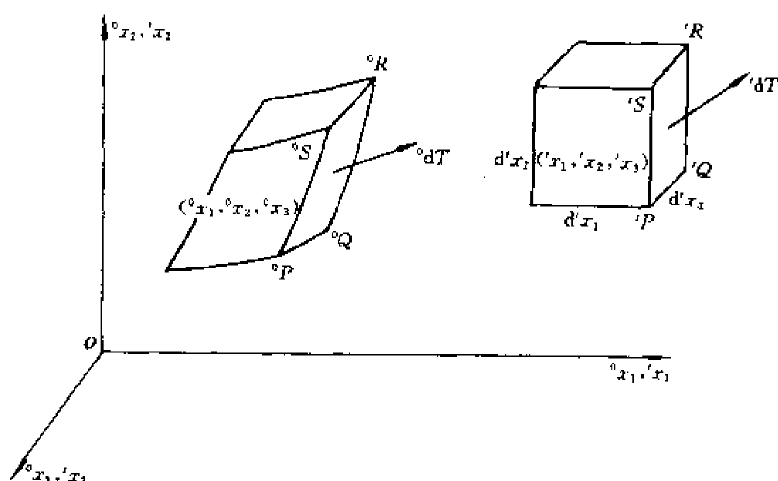


图 16.2 应力的度量

变形后位形${}^tP{}^tQ{}^tR{}^tS$ 面上的应力是${}^t\mathrm{d}\boldsymbol{T}/{}^t\mathrm{d}S$，假设相应的变形前位形的${}^0P{}^0Q{}^0R{}^0S$ 面上的虚拟应力是${}^0\mathrm{d}\boldsymbol{T}/{}^0\mathrm{d}S$，其中${}^0\mathrm{d}S$ 和${}^t\mathrm{d}S$ 分别是变形前和变形后的面积微元。${}^0\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ 和${}^t\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ 之间的相应关系可以任意规定，但是必须保持数学上的一致性，通常有以下两种规定（参看图 16.3）

1. Lagrange 规定：

$$ {}^0\mathrm{d}T_i^{(L)}={}^t\mathrm{d}T_i \qquad (16.2.19)$$

上式规定变形前面积微元上的内力分量和变形后面积微元上的内力分量相等。

2. Kirchhoff 规定：

$$ {}^0\mathrm{d}T_i^{(K)}={}^0_tx_{i,j}\,{}^t\mathrm{d}T_j \qquad (16.2.20)$$

上式规定${}^0\mathrm{d}T^{(K)}$和${}^t\mathrm{d}T$ 用和变换 $\mathrm{d}{}^0x_i={}^0_tx_{i,j}\,\mathrm{d}{}^tx_j$ 相同的规律相联系。

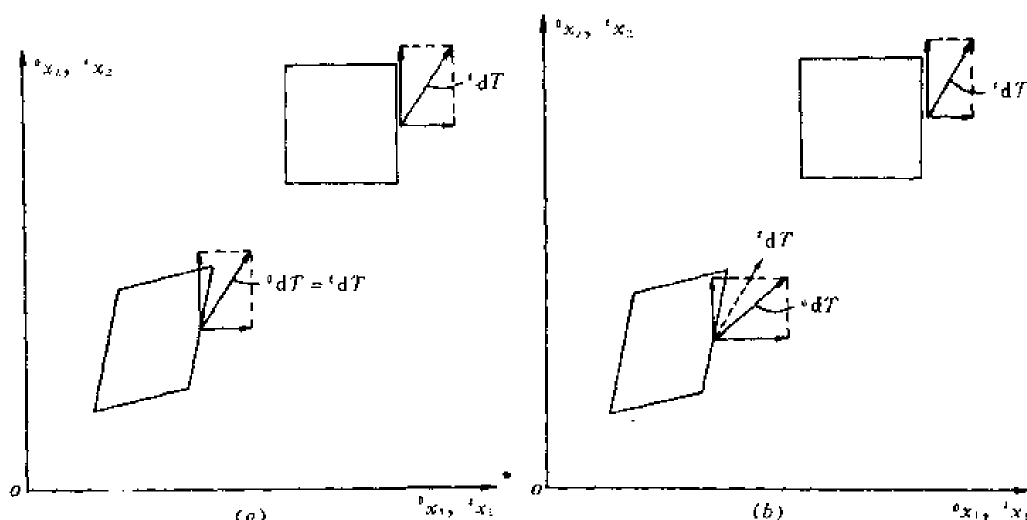


图 16.3 二维情况 Lagrange 和 Kirchhoff 应力规定的示意图

因为${}^t\tau_{ij}$是变形后位形的应力分量，所以有如下关系式

$$ {}^t\mathrm{d}T_i = {}^t\tau_{ji}\,{}^t\nu_j\,{}^t\mathrm{d}S \tag{16.2.21}$$

其中${}^t\nu_j$是面积微元${}^t\mathrm{d}S$上法线的方向余弦。

将类似于上式所表示的关系用于变形前的位形，可具体定义两种应力张量。如用 Lagrange 规定，则有

$$ {}^0\mathrm{d}T_i^{(L)} = {}^t_0T_{ji}\,{}^0\nu_j\,{}^0\mathrm{d}S = {}^t\mathrm{d}T_i \tag{16.2.22}$$

如用 Kirchhoff 规定，则有

$$ {}^0\mathrm{d}T_i^{(K)} = {}^t_0S_{ji}\,{}^0\nu_j\,{}^0\mathrm{d}S = {}^0_tx_{i,j}\,{}^t\mathrm{d}T_j \tag{16.2.23}$$

其中${}^0\nu_j$是变形前面积微元${}^0\mathrm{d}S$上法线的方向余弦。${}^t_0T_{ij}$和${}^t_0S_{ij}$分别称为第一类和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量，有时又分别称为 Lagrange 应力张量和 Kirchhoff 应力张量。左上标 t 表示应力张量是属于变形后(时刻 t)位形的，左下标 0 表示此量是在变形前(时刻 0)位形内度量的。

为了得到${}^t\tau_{ij}$,${}^t_0T_{ij}$,${}^t_0S_{ij}$这些应力张量之间的关系，必须先确定${}^t\nu_j\mathrm{d}^tS$和${}^0\nu_j\mathrm{d}^0S$之间的关系。考虑变形后位形内的二条线元素 $\mathrm{d}^t\boldsymbol{x}(\mathrm{d}^tx_1,\mathrm{d}^tx_2,\mathrm{d}^tx_3)$和 $\delta^t\boldsymbol{x}(\delta^tx_1,\delta^tx_2,\delta^tx_3)$，变形前位形内和它们相应的是 $\mathrm{d}^0\boldsymbol{x}(\mathrm{d}^0x_1,\mathrm{d}^0x_2,\mathrm{d}^0x_3)$和 $\delta^0\boldsymbol{x}(\delta^0x_1,\delta^0x_2,\delta^0x_3)$。以 $\mathrm{d}^t\boldsymbol{x}$ 和 $\delta^t\boldsymbol{x}$ 为边的平行四边形的面积${}^t\mathrm{d}S$可借助于排列符号表示成

$$ {}^t\nu_i\,{}^t\mathrm{d}S = e_{ijk}\,\mathrm{d}\,{}^tx_j\,\delta\,{}^tx_k \tag{16.2.24}$$

类似地 $\mathrm{d}^0\boldsymbol{x}$ 和 $\delta^0\boldsymbol{x}$ 形成的平行四边形面积${}^0\mathrm{d}S$可表示为

$$ {}^0\nu_i\,{}^0\mathrm{d}S = e_{ijk}\,\mathrm{d}^0x_j\,\delta\,{}^0x_k = e_{ijk}\,{}^0_tx_{j,\alpha}\,{}^0_tx_{k,\beta}\,\mathrm{d}^tx_\alpha\,\delta^tx_\beta \tag{16.2.25}$$

其中

$$ e_{ijk} = \begin{cases} 0 & (i=j\ 或\ j=k\ 或\ k=i) \\ 1 & (i,j,k=1,2,3\ 或\ 2,3,1\ 或\ 3,1,2) \\ -1 & (i,j,k=3,2,1\ 或\ 2,1,3\ 或\ 1,3,2) \end{cases} $$

两端乘以${}_t^0x_{i,\gamma}$，并利用行列式定义：

$$e_{ijk}\,{}_t^0x_{i,\gamma}\,{}_t^0x_{j,\alpha}\,{}_t^0x_{k,\beta}=e_{\gamma\alpha\beta}\det|{}_t^0x_{l,m}| \tag{16.2.26}$$

和质量守恒定律

$$\int_{{}^tV}{}^t\rho\,{}^t\mathrm{d}V=\int_{{}^0V}{}^0\rho\,{}^0\mathrm{d}V=\int_{{}^tV}{}^0\rho\,\det|{}_t^0x_{l,m}|\,{}^t\mathrm{d}V$$

即

$$\frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}=\det|{}_t^0x_{l,m}| \tag{16.2.27}$$

（其中${}^0\rho$和${}^t\rho$分别是变形前位形和变形后位形的材料密度）简化结果，可以得到

$${}_t^0x_{i,\gamma}\,{}^0\nu_i\,{}^0\mathrm{d}S=\frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}e_{\gamma\alpha\beta}\,\mathrm{d}^tx_\alpha\,\delta^tx_\beta=\frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}\,{}^t\nu_\gamma\,{}^t\mathrm{d}S \tag{16.2.28}$$

所以从(16.2.22)，(16.2.21)及(16.2.28)式、可以得到

$${}_0^tT_{ji}=\frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}\,{}_t^0x_{j,m}\,{}^t\tau_{mi} \tag{16.2.29}$$

类似地，从(16.2.23)，(16.2.21)及(16.2.28)式，可以得到

$${}_0^tS_{ji}=\frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}\,{}_t^0x_{i,\alpha}\,{}_t^0x_{j,\beta}\,{}^t\tau_{\alpha\beta} \tag{16.2.30}$$

从(16.2.29)和(16.2.30)式可见

$${}_0^tS_{ij}={}_t^0x_{i,\alpha}\,{}_0^tT_{j\alpha} \tag{16.2.31}$$

又因为有以下等式：

$$\delta_{ij}={}_t^0x_{i,p}\,{}_0^tx_{p,j}\quad \delta_{ij}={}_0^tx_{i,p}\,{}_t^0x_{p,j} \tag{16.2.32}$$

所以可以得到上述三种应力张量之间关系的变换形式

$${}^t\tau_{ji}=\frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}\,{}_0^tx_{i,p}\,{}_0^tT_{pj}=\frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}\,{}_0^tx_{i,\alpha}\,{}_0^tx_{j,\beta}\,{}_0^tS_{\beta\alpha}$$

$${}_0^tT_{ij}={}_0^tS_{ip}\,{}_0^tx_{j,p} \tag{16.2.33}$$

从(16.2.29)式可见 Lagrange 应力张量${}_0^tT_{ji}$是非对称的，所以它不适合用于应力应变关系，因为应变张量总是对称的。而从(16.2.30)式可见 Kirchhoff 应力张量${}_0^tS_{ij}$是对称的，所以更适用于此目的。从此式还可以看到，在小变形情况下，由于${}_t^0x_{i,j}\approx\delta_{ij}$，${}^0\rho/{}^t\rho\approx1$，这时可以忽略${}_0^tS_{ij}$和${}^t\tau_{ij}$之间的差别，它们都蜕化为工程应力$\sigma_{ij}$。

还应指出，按 Kirchhoff 规定，联系变形前后面积微元${}^0\mathrm{d}S$和${}^t\mathrm{d}S$上的作用力${}^0\mathrm{d}T_i$和${}^t\mathrm{d}T_i$的关系式(16.2.20)式与联系变形前后线段微元d^0x_i和d^tx_i的关系式(16.2.3)式是相同的。因为物体发生刚体转动时，参考于时间 0 位形的d^0x_i，${}^0\nu_j$，${}^0\mathrm{d}S$不发生变化，因此${}^0\mathrm{d}T_i$以及通过(16.2.23)定义的 Kirchhoff 应力张量${}_0^tS_{ij}$也不随刚体转动而变化。这就是说${}_0^tS_{ij}$和${}_0^t\epsilon_{ij}$一样也是客观张量。它们构造成描述材料本构关系的一个适当的匹配。这将在16.5 节进一步讨论。关于应力张量${}_0^tS_{ij}$的上述性质也可通过运算进一步加以验证。

从前一章材料非线性问题的讨论中，已经知道，对于依赖于材料变形历史的非弹性问题，通常情况下需要采用增量理论进行分析。其中材料本构关系应采用微分型或速率型的。正由于此，在连续介质力学中还定义了一种其分量不随材料刚体转动而变化的速率型的应力张量。这就是以下引出的 Jaumann 应力速率张量${}^t\dot{\sigma}_{ij}^J$。

$${}^t\dot{\sigma}_{ij}^J={}^t\dot{\tau}_{ij}-{}^t\tau_{ip}\,{}^t\Omega_{pj}-{}^t\tau_{jp}\,{}^t\Omega_{pi} \tag{16.2.34}$$

其中上标"·"表示对时间的导数，Ω_{ij}是旋转张量。

$$ {}^t\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial {}^t\dot{u}_j}{\partial {}^t x_i} - \frac{\partial {}^t\dot{u}_i}{\partial {}^t x_j}\right) = \frac{1}{2}({}^t\dot{u}_{j,i} - {}^t\dot{u}_{i,j}) \tag{16.2.35} $$

它的物理意义是表示材料的角速度。

从(16.2.34)式可见，Jaumann 应力速率张量是对称张量。同时可以验证它是不随材料微元的刚体旋转而发生变化的客观张量。它和 Kirchhoff 应力张量的不同点在于后者是全量型的，而它是速率型，因此适合于建立速率型本构关系的要求。和它对偶的应变速率张量是

$$ {}^t\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial {}^t\dot{u}_i}{\partial {}^t x_j} + \frac{\partial {}^t\dot{u}_j}{\partial {}^t x_i}\right) = \frac{1}{2}({}^t\dot{u}_{i,j} + {}^t\dot{u}_{j,i}) \tag{16.2.36} $$

${}^t\dot{e}_{ij}$也是对称的，且为不随材料微元的刚体旋转而发生变化的客观张量。还应指出，${}^t\sigma^J_{ij}$和${}^t\dot{e}_{ij}$在物理上分别代表真应力和真应变的瞬时变化率。

16.3 几何非线性问题的表达格式

在涉及几何非线性问题的有限单元法中，通常都采用增量分析的方法，这是因为问题涉及材料非线性所必需的。即使问题不包括材料非线性，为得到加载过程应力和变形的演变历史，以及保证求解的精度和稳定，通常也需要采用增量方法求解。

考虑一个在笛卡尔坐标系内运动的物体(参见图 16.1)，增量分析的目的是确定此物体在一系列离散的时间点 $0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots$ 处于平衡状态的位移、速度、应变、应力等运动学和静力学参量。现在假定问题在时间 0 到 t 的所有时间点的解答已经求得，下一步需要求解时间为 $t+\Delta t$ 时刻的各个力学量。这是一典型的步骤，反复使用此步骤，就可以求得问题的全部解答。

16.3.1 虚位移原理

现在分别用：${}^0x_i, {}^tx_i, {}^{t+\Delta t}x_i (i=1,2,3)$描述物体内各点在时间 0，时间 t 和时间 $t+\Delta t$ 的位形内的坐标。类似地用${}^tu_i$ 和${}^{t+\Delta t}u_i (i=1,2,3)$表示各质点在时间 t 和时间 $t+\Delta t$ 的位移，即

$$ \begin{aligned} {}^tx_i &= {}^0x_i + {}^tu_i \\ {}^{t+\Delta t}x_i &= {}^0x_i + {}^{t+\Delta t}u_i \end{aligned} \tag{16.3.1} $$

所以从时间 t 到时间 $t+\Delta t$ 的位移增量可表示为

$$ u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^tu_i $$

为得到用以求解时间 $t+\Delta t$ 位形内各个未知变量的方程，首先建立虚位移原理。和时间 $t+\Delta t$ 位形内物体的平衡条件相等效的虚位移原理可表示为

$$ \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}\, \delta_{t+\Delta t}e_{ij}\, {}^{t+\Delta t}\mathrm{d}V = {}^{t+\Delta t}Q \tag{16.3.2} $$

其中${}^{t+\Delta t}Q$ 是时间 $t+\Delta t$ 位形的外载荷的虚功

$$ {}^{t+\Delta t}Q = \int_{{}^{t+\Delta t}S} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}t_k \, \delta u_k \, {}^{t+\Delta t}\mathrm{d}S + \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\rho \, {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}f_k \delta u_k \, {}^{t+\Delta t}\mathrm{d}V \qquad (16.3.3) $$

在以上两式中 δu_k 是现时位移分量 ${}^{t+\Delta t}u_k$ 的变分，即从时间 t 到时间 $t+\Delta t$ 的位移增量分量 u_k 的变分。$\delta_{t+\Delta t}e_{ij}$ 是相应的无穷小应变的变分，即

$$ \delta_{t+\Delta t}e_{ij} = \delta \frac{1}{2}({}_{t+\Delta t}u_{i,j} + {}_{t+\Delta t}u_{j,i}) \qquad (16.3.4) $$

${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$ 是时间 $t+\Delta t$ 位形的 Euler 应力，${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}f_k$ 和 ${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}t_k$ 分别是时间 $t+\Delta t$ 位形的、并在同一位形内度量的体积和面积载荷，${}^{t+\Delta t}V$，${}^{t+\Delta t}S$ 和 ${}^{t+\Delta t}\rho$ 分别是物体在 $t+\Delta t$ 位形的体积、表面积和质量密度。

方程(16.3.2)式不能直接用来求解，因为它所参考的时间 $t+\Delta t$ 位形是未知的。为了得到解答，所有变量应参考一已经求得的平衡位形。原则上，时间 $0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, t$ 等任一已经求得的位形都可作为参考位形，但在实际分析中，只作以下两种可能的选择：

1. 全 Lagrange 格式(Total Lagrange Formulation，简称 T.L. 格式)，这种格式中所有变量以时间 0 的位形作为参考位形，即通常所谓的 Lagrange 格式。

2. 更新的 Lagrange 格式(Updated Lagrange Formulation 简称 U.L. 格式)，这种格式中所有变量以时间 t 的位形作为参考位形。因为求解过程中参考位移是不断改变的，所以称为更新的 Lagrange 格式。

16.3.2 全 Lagrange 格式

在此格式中，方程(16.3.2)和(16.3.3)式被转换为参考物体初始(时间 0)位形的等效形式。也即方程中所有变量都是以初始位形为参考位形。

首先引入单位初始表面积上的等效载荷 ${}^{t+\Delta t}_{0}t_k$ 和单位初始质量上的等效载荷 ${}^{t+\Delta t}_{0}f_k$。现在先假定施加于物体的面积载荷和体积载荷是不依赖于物体位形的，即载荷是保守的，则有

$$ \begin{aligned} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}t_k \, {}^{t+\Delta t}\mathrm{d}S &= {}^{t+\Delta t}_{0}t_k \, {}^{0}\mathrm{d}S \\ {}^{t+\Delta t}\rho \, {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}f_k \, {}^{t+\Delta t}\mathrm{d}V &= {}^{0}\rho \, {}^{t+\Delta t}_{0}f_k \, {}^{0}\mathrm{d}V \end{aligned} \qquad (16.3.5) $$

因为质量守恒定律(16.2.27)式，所以从上式的后一式可以得到

$$ {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}f_k = {}^{t+\Delta t}_{0}f_k $$

它的物理意义是作用于单位质量的体积力在不同位形中保持不变。

再参照(16.2.9)式，并利用(16.3.1)、(16.3.4)等式可以得到

$$ \delta^{t+\Delta t}_{0}\varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}_{0}x_{k,i} \, {}^{t+\Delta t}_{0}x_{k,j} - \delta_{ij}) = \delta({}_{t+\Delta t}e_{rs}) \, {}^{t+\Delta t}_{0}x_{s,i} \, {}^{t+\Delta t}_{0}x_{r,j} \qquad (16.3.6) $$

又参照(16.2.30)式可以得到

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}S_{ij} = \frac{{}^{0}\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} \, {}^{t+\Delta t}\tau_{rs} \, {}_{t+\Delta t}^{0}x_{i,s} \, {}_{t+\Delta t}^{0}x_{j,r} \qquad (16.3.7) $$

以上式中 ${}^{t+\Delta t}_{0}S_{ij}$，${}^{t+\Delta t}_{0}\varepsilon_{ij}$ 分别是时间 $t+\Delta t$ 位形的 Kirchhoff 应力张量和 Green 应变张量，并都是参考于初始位形度量的。

将以上各式一并代入(16.3.2)和(16.3.3)式，则可得到和物体在时间 $t+\Delta t$ 位形、但参考于初始位形的与平衡方程相等效的虚位移原理

$$\int_{^0V} {}^{t+\Delta t}_{\ 0}S_{ij}\,\delta\,{}^{t+\Delta t}_{\ 0}\varepsilon_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V = {}^{t+\Delta t}Q \tag{16.3.8}$$

其中${}^{t+\Delta t}Q$按下式计算

$$ {}^{t+\Delta t}Q = \int_{^0S} {}^{t+\Delta t}_{\ 0}t_k\,\delta u_k\,{}^0\mathrm{d}S + \int_{^0V} {}^0\rho\,{}^{t+\Delta t}_{\ 0}f_k\,\delta u_k\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16.3.9}$$

为最后得到增量形式的求解方程，引入下列增量分解

$$\left.\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}_{\ 0}S_{ij} &= {}^t_0S_{ij} + {}_0S_{ij} \\ {}^{t+\Delta t}_{\ 0}\varepsilon_{ij} &= {}^t_0\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{16.3.10}$$

其中${}_0S_{ij}$和${}_0\varepsilon_{ij}$分别是从时间t到$t+\Delta t$位形的Kirchhoff应力和Green应变的增量，并都是参考于初始位形度量的。式中${}^t_0S_{ij}$，${}^t_0\varepsilon_{ij}$都是已知的量，所以从(16.3.10)式可得

$$\delta\,{}^{t+\Delta t}_{\ 0}\varepsilon_{ij} = \delta_0\varepsilon_{ij} \tag{16.3.11}$$

进一步参照Green应变的位移表达式(16.2.16)，并利用(16.3.1)式将可得到

$${}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \tag{16.3.12}$$

其中${}_0e_{ij}$和${}_0\eta_{ij}$分别是关于位移增量u_i的线性项和二次项

$$\begin{aligned} {}_0e_{ij} &= \frac{1}{2}({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i}\,{}_0u_{k,j} + {}^t_0u_{k,j}\,{}_0u_{k,i}) \\ {}_0\eta_{ij} &= \frac{1}{2}\,{}_0u_{k,i}\,{}_0u_{k,j} \end{aligned} \tag{16.3.13}$$

这样一来，方程(16.3.8)式可以改写成

$$\int_{^0V} {}_0S_{ij}\,\delta_0\,\varepsilon_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V + \int_{^0V} {}^t_0S_{ij}\,\delta_0\,\eta_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V = {}^{t+\Delta t}Q - \int_{^0V} {}^t_0S_{ij}\,\delta\,{}_0e_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16.3.14}$$

上式给出了关于位移增量u_i的非线性方程。因为左端第一个积分中在用${}_0\varepsilon_{ij}$表示${}_0S_{ij}$以后，将包含u_i的四次项，为达到实际求解目的，尚需进一步进行线性化处理，这在16.3.4节再进行讨论。

16.3.3 更新的Lagrange格式

在此格式中，方程(16.3.2)和(16.3.3)式中的所有变量是以时间t位形，即物体更新了的位形为参考位形，利用和导出T.L格式相类似的步骤，方程(16.3.2)式可以转换为

$$\int_{^tV} {}^{t+\Delta t}_{\ t}S_{ij}\,\delta\,{}^{t+\Delta t}_{\ t}\varepsilon_{ij}\,{}^t\mathrm{d}V = {}^{t+\Delta t}Q \tag{16.3.15}$$

其中${}^{t+\Delta t}_{\ t}S_{ij}$和${}^{t+\Delta t}_{\ t}\varepsilon_{ij}$分别是时间$t+\Delta t$位形的Kirchhoff应力张量，和Green应变张量，它们都是参考于时间t位形。可以分别称为更新的Kirchhoff应力张量和更新的Green应变张量，它们和${}^{t+\Delta t}\tau_{rs}$和${}^{t+\Delta t}e_{rs}$有类似于(16.3.7)及(16.3.6)式的关系，即

$${}^{t+\Delta t}_{\ t}S_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho}\,{}^{t+\Delta t}\tau_{rs}\,{}^{\ \ t}_{t+\Delta t}x_{i,r}\,{}^{\ \ t}_{t+\Delta t}x_{j,s} \tag{16.3.16}$$

$${}^{t+\Delta t}_{\ t}\varepsilon_{ij} = {}^{t+\Delta t}e_{rs}\,{}^{t+\Delta t}_{\ t}x_{r,i}\,{}^{t+\Delta t}_{\ t}x_{s,j} \tag{16.3.17}$$

如果我们仍假定载荷不依赖于变形，则${}^{t+\Delta t}Q$的计算同T.L.格式的(16.3.9)式。为建立增量方程，对于现在的情况，应力的增量分解为

$${}^{t+\Delta t}_{\ t}S_{ij} = {}^t\tau_{ij} + {}_tS_{ij} \tag{16.3.18}$$

关于应变增量，存在以下关系

$$ {}^{t+\Delta t}_{\ \ t}\varepsilon_{ij} = {}_t\varepsilon_{ij} \tag{16.3.19} $$

其中

$$ {}_t\varepsilon_{ij} = {}_te_{ij} + {}_t\eta_{ij} $$

$$ {}_te_{ij} = \frac{1}{2}({}_tu_{i,j} + {}_tu_{j,i}),\ {}_t\eta_{ij} = \frac{1}{2}\,{}_tu_{k,i}\,{}_tu_{k,j} \tag{16.3.20} $$

对比(16.3.20)式和(16.3.13)式可以看到，${}_te_{ij}$中不包含初始位移项，这是由于增量应变${}_t\varepsilon_{ij}$是从时间 t 位形开始计算并参考于时间 t 位形。利用以上各式，(14.3.15)式可以改写成

$$ \int_{{}^tV} {}_tS_{ij}\,\delta\,{}_t\varepsilon_{ij}\,{}^t\mathrm{d}V + \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij}\,\delta_t\eta_{ij}\,{}^t\mathrm{d}V = {}^{t+\Delta t}Q - \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij}\,\delta_te_{ij}\,{}^t\mathrm{d}V \tag{16.3.21} $$

此式和(16.3.14)式一样，也给出了关于位移增量 u_i 的非线性方程。

方程(16.3.21)式和(16.3.14)式在理论上是等效的，如若采用数学上相一致的本构关系，它们将产生相同的结果。但在求解的有限元矩阵方程本身和求解步骤上仍是有一定差别的。

16.3.4 平衡方程的线性化

如前面所指出，无论是 T.L. 格式得到的方程(16.3.14)式，还是 U.L. 格式得到的方程(16.3.21)式都是非线性的。为了实际求解，需要预先对它们进行线性化处理。线性化处理包括以下两个方面。

1. 假定(16.3.14)和(16.3.21)式中第一个积分内的应力增量${}_0S_{ij}$和${}_tS_{ij}$分别和应变增量${}_0\varepsilon_{ij}$及${}_t\varepsilon_{ij}$成线性关系。即对于 T.L. 格式，有

$$ {}_0S_{ij} = {}_0D_{ijkl}\,{}_0\varepsilon_{kl} \tag{16.3.22} $$

对于 U.L. 格式，有

$$ {}_tS_{ij} = {}_tD_{ijkl}\,{}_t\varepsilon_{kl} \tag{16.3.23} $$

其中${}_0D_{ijkl}$和${}_tD_{ijkl}$是时间 t 的函数，并分别参考于时间 0 和时间 t 位形度量的切线本构张量。实际上，以上线性关系仅对线弹性材料是真实的。对于其他材料，例如非线性弹性以及上一章所讨论的弹塑性材料，线性关系仅能用于联系应力速率和应变速率，所以线性关系仅对无穷小步长才是真实的。对于有限时间步长，(16.3.22)和(16.3.23)式所表达的本构关系以及根据它们所建立的有限元求解方程只能是近似式，需要通过迭代方法求解。

2. 求解格式的进一步线性化。对于 T.L. 格式，将(16.3.22)式和(16.3.12)式代入(16.3.14)式的第一个积分，将得到

$$ \int_{{}^0V} {}_0S_{ij}\,\delta\,{}_0\varepsilon_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V = \int_{{}^0V} {}_0D_{ijkl}\,{}_0e_{kl}\,\delta\,{}_0e_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V $$
$$ + \int_{{}^0V} {}_0D_{ijkl}({}_0e_{kl}\,\delta\,{}_0\eta_{ij} + {}_0\eta_{kl}\,\delta\,{}_0e_{ij} + {}_0\eta_{kl}\,\delta\,{}_0\eta_{ij})\,{}^0\mathrm{d}V $$

上式变分的结果，右端第一项关于 u_i 是线性的，而第二项是非线性的。对于 U.L. 格式，将(16.3.23)式和(16.3.19)式代入(16.3.21)式，也将得到类似的结果。为了达到线性化方程的要求，对它们可能有两种处理方法

(1) 将非线性项移至(16.3.14)式或(16.3.21)式的右端作为虚拟载荷，在求解过程中与其它载荷项一起进行平衡迭代。

(2) 进一步将它们略去，这意味着对于 T.L. 格式，在(16.3.14)式的第一个积分中采用近似式 $\delta\, {}_0\varepsilon_{ij}=\delta\, {}_0e_{ij}$ 和在(16.3.22)式中采用近似式 ${}_0S_{ij}={}_0D_{ijkl}\,{}_0e_{kl}$；对于 U.L. 格式，在(16.3.21)式的第一个积分中近似地取 $\delta\, {}_t\varepsilon_{ij}=\delta\, {}_te_{ij}$ 和在(16.3.23)式中近似地采用 ${}_tS_{ij}={}_tD_{ijkl}\,{}_te_{kl}$。这样做的可能性是因为在一个增量步内，只要 Δt 足够小，忽略 ${}_0u_{i,j}$ 或 ${}_tu_{i,j}$ 的二阶及其更高阶项是允许的。经这样的线性化处理以后，虚位移原理对于 T.L. 格式是

$$\int_{{}^0V} {}_0D_{ijkl}\,{}_0e_{kl}\,\delta\,{}_0e_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V+\int_{{}^0V} {}_0^tS_{ij}\,\delta\,{}_0\eta_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V$$

$$={}^{t+\Delta t}Q-\int_{{}^0V} {}_0^tS_{ij}\,\delta\,{}_0e_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16.3.24}$$

对于 U.L. 格式是

$$\int_{{}^tV} {}_tD_{ijkl}\,{}_te_{kl}\,\delta\,{}_te_{ij}\,{}^t\mathrm{d}V+\int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij}\,\delta\,{}_t\eta_{ij}\,{}^t\mathrm{d}V$$

$$={}^{t+\Delta t}Q-\int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij}\,\delta\,{}_te_{ij}\,{}^t\mathrm{d}V \tag{16.3.25}$$

以上两个方程变分的结果将得到关于位移增量 u_i 的线性方程组，作为有限元分析的基础。在此应该先行指出的是，当应用 U.L. 格式于非弹性大应变分析时，由于不便于直接采用联系 ${}_tS_{ij}$ 和 ${}_t\varepsilon_{kl}$ 的本构关系(16.3.23)式，而是采用联系 Jaumann σ_{ij}^J 应力速率张量和应变速率张量 ${}_t\dot{e}_{kl}$ 的本构关系，最后得到虚位移原理表达式将使(16.3.25)式略有变化，这将在 16.5 节再具体讨论。

16.4 有限元求解方程及解法

16.4.1 有限元求解方程

如果用等参元对求解域进行离散，每个单元内的坐标和位移可以用其结点值插值表示如下：

$$\left.\begin{aligned} {}^0x_i=\sum_{k=1}^n N_k\,{}^0x_i^k,\quad {}^tx_i=\sum_{k=1}^n N_k\,{}^tx_i^k \\ {}^{t+\Delta t}x_i=\sum_{k=1}^n N_k\,{}^{t+\Delta t}x_i^k\quad (i=1,2,3) \end{aligned}\right\} \tag{16.4.1}$$

$${}^tu_i=\sum_{k=1}^n N_k\,{}^tu_i^k,\ u_i=\sum_{k=1}^n N_k u_i^k\quad (i=1,2,3) \tag{16.4.2}$$

其中 ${}^tx_i^k$ 是结点 k 在时间 t 的 i 方向坐标分量，${}^tu_i^k$ 是结点 k 在时间 t 的 i 方向位移分量，其他 ${}^0x_i^k$，${}^{t+\Delta t}x_i^k$，u_i^k 的意义类似。

N_k 是和结点 k 相关联的插值函数，n 是单元的结点数。

利用(16.4.1)和(16.4.2)式可以计算(16.3.24)和(16.3.25)式中各个积分所包含的位移导数项。如果只考虑一个单元，从(16.3.24)式可以导出用于 T.L. 格式的下列矩阵

求解方程①

$$({}_0^t\boldsymbol{K}_L + {}_0^t\boldsymbol{K}_{NL})\boldsymbol{u} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q} - {}_0^t\boldsymbol{F} \tag{16.4.3}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是结点位移向量，${}_0^t\boldsymbol{K}_L\boldsymbol{u}$，${}_0^t\boldsymbol{K}_{NL}\boldsymbol{u}$ 和 ${}_0^t\boldsymbol{F}$ 分别从一个单元的积分 $\int_{^0V} {}_0D_{ijrs}\,{}_0e_{rs}\,\delta\,{}_0e_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V$，$\int_{^0V} {}_0^tS_{ij}\,\delta\,{}_0\eta_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V$ 和 $\int_{^0V} {}_0^tS_{ij}\delta\,{}_0e_{ij}\,{}^0\mathrm{d}V$ 得到，它们可以表示为

$$ {}_0^t\boldsymbol{K}_L = \int_{^0V} {}_0^t\boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\,{}_0\boldsymbol{D}\,{}_0^t\boldsymbol{B}_L\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16.4.4}$$

$$ {}_0^t\boldsymbol{K}_{NL} = \int_{^0V} {}_0^t\boldsymbol{B}_{NL}^{\mathrm{T}}\,{}_0^t\boldsymbol{S}\,{}_0^t\boldsymbol{B}_{NL}\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16.4.5}$$

$$ {}_0^t\boldsymbol{F} = \int_{^0V} {}_0^t\boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\,{}_0^t\hat{\boldsymbol{S}}\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16.4.6}$$

(16.4.3)式中的向量 ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}$ 对于一个单元是按通常的方法计算(16.3.9)式得到。在以上各式中 ${}_0^t\boldsymbol{B}_L$ 和 ${}_0^t\boldsymbol{B}_{NL}$ 分别是线性应变 ${}_0e_{ij}$ 和非线性应变 ${}_0\eta_{ij}$ 和位移的转换矩阵，${}_0\boldsymbol{D}$ 是材料本构矩阵，${}_0^t\boldsymbol{S}$ 和 ${}_0^t\hat{\boldsymbol{S}}$ 是第二类 Piola-Kirchhoff 应力矩阵和向量。所有这些矩阵或向量的元素是对应于时间 t 位形并参考于时间 0 位形确定的。

为使 ${}_0^t\boldsymbol{K}_L$ 的物理意义更清楚，还可将 ${}_0^t\boldsymbol{B}_L$ 表示成

$$ {}_0^t\boldsymbol{B}_L = {}_0^t\boldsymbol{B}_{L0} + {}_0^t\boldsymbol{B}_{L1} \tag{16.4.7}$$

其中 ${}_0^t\boldsymbol{B}_L$ 和 ${}_0^t\boldsymbol{B}_{L1}$ 分别是应变 ${}_0e_{ij}$ 中 $(1/2)({}_0u_{i,j}+{}_0u_{j,i})$ 项和 $(1/2)({}_0^tu_{k,i}\,{}_0u_{k,j}+{}_0^tu_{k,j}\,{}_0u_{k,i})$ 项和位移的转换矩阵。这样一来，${}_0^t\boldsymbol{K}_L$ 可以表示成

$$ {}_0^t\boldsymbol{K}_L = {}_0^t\boldsymbol{K}_{L0} + {}_0^t\boldsymbol{K}_{L1} \tag{16.4.8}$$

其中

$$ {}_0^t\boldsymbol{K}_{L0} = \int_{^0V} {}_0^t\boldsymbol{B}_{L0}^{\mathrm{T}}\,{}_0\boldsymbol{D}\,{}_0^t\boldsymbol{B}_{L0}\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16.4.9}$$

$$ {}_0^t\boldsymbol{K}_{L1} = \int_{^0V} ({}_0^t\boldsymbol{B}_{L0}^{\mathrm{T}}\,{}_0D\,{}_0^t\boldsymbol{B}_{L1} + {}_0^t\boldsymbol{B}_{L1}^{\mathrm{T}}\,{}_0\boldsymbol{D}\,{}_0^t\boldsymbol{B}_{L0} + {}_0^t\boldsymbol{B}_{L1}^{\mathrm{T}}\,{}_0\boldsymbol{D}\,{}_0^t\boldsymbol{B}_{L1})\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16.4.10}$$

${}_0^t\boldsymbol{K}_{L0}$ 就是通常小位移情况下的单元刚度矩阵，${}_0^t\boldsymbol{K}_{L1}$ 是由于初始位移 ${}^tu_i$ 引起的，通常又称为初位移矩阵。至于 ${}_0^t\boldsymbol{K}_{NL}$ 则是由于初始应力 ${}_0^tS_{ij}$ 引起的，所以通常称为初应力矩阵。

类似地，对于 U.L. 格式从(16.3.25)式可以得到下列矩阵方程

$$({}_t^t\boldsymbol{K}_L + {}_t^t\boldsymbol{K}_{NL})\boldsymbol{u} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q} - {}_t^t\boldsymbol{F} \tag{16.4.11}$$

其中

$$ {}_t^t\boldsymbol{K}_L = \int_{^tV} {}_t^t\boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\,{}_t\boldsymbol{D}\,{}_t^t\boldsymbol{B}_L\,{}^t\mathrm{d}V \tag{16.4.12}$$

$$ {}_t^t\boldsymbol{K}_{NL} = \int_{^tV} {}_t^t\boldsymbol{B}_{NL}^{\mathrm{T}}\,{}^t\boldsymbol{\tau}\,{}_t^t\boldsymbol{B}_{NL}\,{}^t\mathrm{d}V \tag{16.4.13}$$

$$ {}_t^t\boldsymbol{F} = \int_{^tV} {}_t^t\boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\,{}^t\hat{\boldsymbol{\tau}}\,{}^t\mathrm{d}V \tag{16.4.14}$$

以上各式中 ${}_t^t\boldsymbol{B}_L$ 和 ${}_t^t\boldsymbol{B}_{NL}$ 分别是线性应变 ${}_te_{ij}$ 和非线性应变 ${}_t\eta_{ij}$ 与位移的转换矩阵，${}_t\boldsymbol{D}$ 是材料

① 因为单元集成是标准的步骤，所以只列出一个单元的方程。严格说上列方程对于单元组合体才成立。

本构矩阵，${}^t\tau$ 和 ${}^t\hat{\tau}$ 是 Cauchy 应力矩阵和向量。所有这些矩阵或向量的元素都是对应时间 t 位形，并参考于同一位形确定的。

应当指出，因为 ${}_te_{ij}$ 中不包含初始位移 ${}^tu_i$ 的影响，所以 ${}_t^tB_L={}_t^tB_{L0}$，即 ${}_t^tB_{L1}=0$，因此 U. L 格式的切线刚度矩阵中不包含初位移矩阵。

还应指出，(16. 4. 3)～(16. 4. 14)各式中的矩阵或向量元素在积分前应先通过坐标转换，全部表示为自然坐标的函数，而后在自然坐标内进行积分，该步骤同线性分析中等参元的运算。

应当指出：上列有限元方程是对于静力分析问题导出的，如用于动力分析，则需要适当修正。另外，上列有限元方程经适当的改造，还可用于求解另一类重要问题——结构稳定性问题(经典分叉问题)。现就上述两类问题，作一定的补充和讨论。

动力分析中，方程中还应包括惯性项和阻尼项。现暂忽略阻尼的影响，并认为物体的质量保持不变，则在两种格式中的质量矩阵，都可以在时间积分以前，运用时间 0 位形作为参考位形进行计算，这与第 14 章所讨论的情况相同。这样一来，在 T. L. 格式中，一个单元的增量平衡方程可表示为

$$M^{t+\Delta t}\ddot{u} + ({}_0^tK_L + {}_0^tK_{NL})u = {}^{t+\Delta t}Q - {}_0^tF \tag{16. 4. 15}$$

在 U. L. 格式中，这方程是

$$M^{t+\Delta t}\ddot{u} + ({}_t^tK_L + {}_t^tK_{NL})u = {}^{t+\Delta t}Q - {}_t^tF \tag{16. 4. 16}$$

其中 ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$ 是时间 $t+\Delta t$ 的单元结点加速度向量，M 是参考于时间 0 位形的单元质量矩阵。

至于结构稳定性问题，实际上是求结构的临界载荷问题。对于这类问题，载荷应表示成 15. 5. 2 节讨论载荷步长自动选择时所示形式，即 $Q=p\bar{Q}_0$。其中 $\bar{Q}_0$ 是载荷模式，p 是载荷幅值。求解过程是首先求解对应于载荷 $\bar{Q}_0$ 的线性平衡问题

$$K_t\bar{u} = \bar{Q} \tag{16. 4. 17}$$

其中 K_t 是结构的线弹性刚度矩阵，实际上也就是(16. 4. 9)式所表达的 ${}_0^tK_{L0}$。从上式解得 $\bar{u}$，并进而得到结构内的应力分布 $\bar{\sigma}$。结构临界载荷 p，可通过求解利用 T. L. 格式或 U. L. 格式形成的关于 p 的特征值问题得到。例如利用 T. L. 格式，可将 ${}_0^tu=p\bar{u}$，${}_0^t\sigma=p\bar{\sigma}$ 代入 T. L. 格式的有限元方程(16. 4. 3)式。如认为在结构初始失稳时，初始位移 ${}_0^tu$ 仍是很小的，则在有限元方程中可以忽略其影响。这样就可得到下列方程

$$({}_0^tK_{L0} + p\,{}_0^t\bar{K}_{NL})u = (p+\Delta p)\bar{Q}_0 - p\,{}_0^t\bar{F} \tag{16. 4. 18}$$

其中

$${}_0^t\bar{K}_{NL} = \int_{{}^0V} {}_0^tB_{NL}^{\mathrm{T}}\,\bar{S}\,{}_0^tB_{NL}\,{}^0\mathrm{d}V \tag{16. 4. 19}$$

$${}_0^t\bar{F} = \int_0^t B_{L0}^{\mathrm{T}}\,\hat{S}\,{}^0\mathrm{d}V = \int_{{}^0V} {}_0^tB_{L0}^{\mathrm{T}}\,{}_0D\,{}_0^tB_{L0}\,{}^0\mathrm{d}V\bar{u} = {}_0^tK_{L0}\,\bar{u} = \bar{Q} \tag{16. 4. 20}$$

式中 $\bar{S}$ 和 $\hat{S}$ 是 $\bar{\sigma}$ 的各个分量组成的矩阵和向量。实际上 $\hat{S}$ 即是应力向量 $\bar{\sigma}$，$\bar{S}$ 的具体形式见下一小节。考虑到结构达到稳定的临界载荷时，$\Delta p=0$，且有 $p\bar{Q}_0=p{}_0^t\bar{F}$，所以(16. 4. 18)式右端应为 0，这样就将求解结构稳定的临界载荷和失稳模态问题归结为求解下列矩阵特征值问题

$$({}_0^t\boldsymbol{K}_{L0} + p\,{}_0^t\boldsymbol{K}_{NL})\boldsymbol{u} = 0 \tag{16.4.21}$$

式中${}_0^t\boldsymbol{K}_{L0}$就是通常的线弹性刚度矩阵$\boldsymbol{K}_e$，而${}_0^t\boldsymbol{K}_{NL}$就是初应力矩阵，在稳定问题中通常称之为几何刚度矩阵，并用$\boldsymbol{K}_G$表示。所以上式可以写成

$$(\boldsymbol{K}_e + p\boldsymbol{K}_G)\boldsymbol{u} = 0 \tag{16.4.22}$$

这就是经典的结构稳定问题的求解方程。其实(16.4.22)式也可利用U.L.格式得到，只要认为在求得$\bar{u}$和$\bar{\sigma}$以后，在将$p\bar{u}$和$p\bar{\sigma}$引入求解方程时，认为初始位移${}_0^t\boldsymbol{u}$很小，可以不用更新结构的位形，即认为${}_t^t\boldsymbol{B}_L = {}_0^t\boldsymbol{B}_L$，${}_t^t\boldsymbol{B}_{NL} = {}_0^t\boldsymbol{B}_{NL}$，${}^tV = {}^0V$，最后即可得到和(16.4.21)式及(16.4.22)式同样的结果。

16.4.2 用于几何非线性的单元及单元矩阵和向量举例

为使以上列出的各个单元矩阵和向量具体化，现以得到广泛应用的二维（平面应力、平面应变、轴对称）单元为例，给出它在T.L.格式和U.L.格式中各个矩阵和向量的具体表达式。

1. T.L.格式

(1) 应变增量

$$\begin{aligned}
{}_0\varepsilon_{11} &= {}_0u_{1,1} + {}_0^tu_{1,1}\,{}_0u_{1,1} + {}_0^tu_{2,1}\,{}_0u_{2,1} + \frac{1}{2}[({}_0u_{1,1})^2 + ({}_0u_{2,1})^2] \\
{}_0\varepsilon_{22} &= {}_0u_{2,2} + {}_0^tu_{1,2}\,{}_0u_{1,2} + {}_0^tu_{2,2}\,{}_0u_{2,2} + \frac{1}{2}[({}_0u_{1,2})^2 + ({}_0u_{2,2})^2] \\
{}_0\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}[{}_0u_{1,2} + {}_0u_{2,1}] + \frac{1}{2}[{}_0^tu_{1,1}\,{}_0u_{1,2} + {}_0^tu_{2,1}\,{}_0u_{2,2} \\
&\quad + {}_0^tu_{1,2}\,{}_0u_{1,1} + {}_0^tu_{2,2}\,{}_0u_{2,1}] + \frac{1}{2}[{}_0u_{1,1}\,{}_0u_{1,2} + {}_0u_{2,1}\,{}_0u_{2,2}] \\
{}_0\varepsilon_{33} &= \frac{u_1}{{}^0x_1} + \frac{{}^tu_1u_1}{({}^0x_1)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_1}{{}^0x_1}\right)^2 \quad \text{（轴对称分析）}
\end{aligned} \tag{16.4.23}$$

(2) 线性应变-位移转换关系

$${}_0\boldsymbol{e} = {}_0^t\boldsymbol{B}_L\,\boldsymbol{u} \tag{16.4.24}$$

其中

$$\begin{aligned}
{}_0\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} &= [{}_0e_{11}\ {}_0e_{22}\ \ 2{}_0e_{12}\ {}_0e_{33}] \\
\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} &= [u_1^{\ 1}\ \ u_2^{\ 1}\ \ u_1^{\ 2}\ \ u_2^{\ 2}\ \ \cdots\ \ u_1^{\ n}\ \ u_2^{\ n}] \\
{}_0^t\boldsymbol{B}_L &= {}_0^t\boldsymbol{B}_{L0} + {}_0^t\boldsymbol{B}_{L1}
\end{aligned}$$

$${}_0^t\boldsymbol{B}_{L0} = \begin{bmatrix}
{}_0N_{1,1} & 0 & {}_0N_{2,1} & 0 & \cdots & {}_0N_{n,1} & 0 \\
0 & {}_0N_{1,2} & 0 & {}_0N_{2,2} & \cdots & 0 & {}_0N_{n,2} \\
{}_0N_{1,2} & {}_0N_{1,1} & {}_0N_{2,2} & {}_0N_{2,1} & \cdots & {}_0N_{n,2} & {}_0N_{n,1} \\
\dfrac{N_1}{{}^0\bar{x}_1} & 0 & \dfrac{N_2}{{}^0\bar{x}_1} & 0 & \cdots & \dfrac{N_n}{{}^0\bar{x}_1} & 0
\end{bmatrix} \tag{16.4.25}$$

$${}_0N_{k,j} = \frac{\partial N_k}{\partial\,{}^0x_j},\quad u_j^{\ k} = {}^{t+\Delta t}u_j^{\ k} - {}^tu_j^{\ k},\quad {}^0\bar{x}_1 = \sum_{k=1}^{n} N_k^0 x_1^{\ k}$$

$$
{}_0^t\boldsymbol{B}_{L1}=\begin{bmatrix}
L_{11}\,{}_0N_{1,1} & L_{21}\,{}_0N_{1,1} & L_{11}\,{}_0N_{2,1} & L_{21}\,{}_0N_{2,1} & \cdots L_{11}\,{}_0N_{n,1} & L_{21}\,{}_0N_{n,1}\\
L_{12}\,{}_0N_{1,2} & L_{22}\,{}_0N_{1,2} & L_{12}\,{}_0N_{2,2} & L_{22}\,{}_0N_{2,2} & \cdots L_{12}\,{}_0N_{n,2} & L_{22}\,{}_0N_{n,2}\\
(L_{11}\,{}_0N_{1,2}+L_{12}\,{}_0N_{1,1}) & (L_{21}\,{}_0N_{1,2}+L_{22}\,{}_0N_{1,1}) & (L_{11}\,{}_0N_{2,2}+L_{12}\,{}_0N_{2,1}) & (L_{22}\,{}_0N_{2,2}+L_{22}\,{}_0N_{2,1}) & \cdots(L_{11}\,{}_0N_{n,2}+L_{12}\,{}_0N_{n,1}) & (L_{21}\,{}_0N_{n,2}+L_{22}\,{}_0N_{n,1})\\
L_{33}\dfrac{N_1}{{}^0x_1} & 0 & L_{33}\dfrac{N_2}{x_1} & 0 & \cdots L_{33}\dfrac{N_n}{{}^0x_1} & 0
\end{bmatrix}
\tag{16.4.26}
$$

其中

$$
L_{11}=\sum_{k=1}^{n}{}_0N_{k,1}\,{}^tu_1^k,\quad L_{22}=\sum_{k=1}^{n}{}_0N_{k,2}\,{}^tu_2^k,\quad L_{21}=\sum_{k=1}^{n}{}_0N_{k,1}\,{}^tu_2^k
$$

$$
L_{12}=\sum_{k=1}^{n}{}_0N_{k,2}\,{}^tu_1^k,\quad L_{33}=\left(\sum_{k=1}^{n}N_k\,{}^tu_1^k\right)\Big/{}^0x_1
$$

（3）非线性应变-位移转换矩阵

$$
{}_0^t\boldsymbol{B}_{NL}=\begin{bmatrix}
{}_0N_{1,1} & 0 & {}_0N_{2,1} & 0 & \cdots & {}_0N_{n,1} & 0\\
{}_0N_{1,2} & 0 & {}_0N_{2,2} & 0 & \cdots & {}_0N_{n,2} & 0\\
0 & {}_0N_{1,1} & 0 & {}_0N_{2,1} & \cdots & 0 & {}_0N_{n,1}\\
0 & {}_0N_{1,2} & 0 & {}_0N_{2,2} & \cdots & 0 & {}_0N_{n,2}\\
\dfrac{N_1}{{}^0x_1} & 0 & \dfrac{N_2}{{}^0x_1} & 0 & \cdots & \dfrac{N_n}{{}^0x_1} & 0
\end{bmatrix}
\tag{16.4.27}
$$

（4）第二类 Piola-Kirchhoff 应力矩阵和向量

$$
{}_0^t\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}
{}_0^tS_{11} & {}_0^tS_{12} & 0 & 0 & 0\\
{}_0^tS_{21} & {}_0^tS_{22} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & {}_0^tS_{11} & {}_0^tS_{12} & 0\\
0 & 0 & {}_0^tS_{21} & {}_0^tS_{22} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & {}^tS_{33}
\end{bmatrix},\quad
{}_0^t\hat{\boldsymbol{S}}=\begin{Bmatrix}
{}_0^tS_{11}\\ {}_0^tS_{22}\\ {}_0^tS_{12}\\ {}_0^tS_{33}
\end{Bmatrix}
\tag{16.4.28}
$$

2. U.L. 格式

（1）应变增量

$$
\left.\begin{aligned}
{}_t\varepsilon_{11}&={}_tu_{1,1}+\frac{1}{2}\left[({}_tu_{1,1})^2+({}_tu_{2,1})^2\right]\\
{}_t\varepsilon_{22}&={}_tu_{2,2}+\frac{1}{2}\left[({}_tu_{1,2})^2+({}_tu_{2,2})^2\right]\\
{}_t\varepsilon_{12}&=\frac{1}{2}\left[{}_tu_{1,2}+{}_tu_{2,1}\right]+\frac{1}{2}\left[{}_tu_{1,1}\,{}_tu_{1,2}+{}_tu_{2,1}\,{}_tu_{2,2}\right]\\
{}_0\varepsilon_{33}&=\frac{u_1}{{}^tx_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{u_1}{{}^tx_1}\right)^2\quad\text{（轴对称分析）}
\end{aligned}\right\}
\tag{16.4.29}
$$

其中 $_{t}u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial\, {}^t x_j}$

（2）线性应变-位移转换关系

$$_{t}\boldsymbol{e}={}^t_t\boldsymbol{B}_L\boldsymbol{u} \tag{16.4.39}$$

其中

$$_{t}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=[{}_te_{11}\ {}_te_{22}\ \ 2{}_te_{12}\ {}_te_{33}]$$

$$\boldsymbol{u}=[u_1^1\ \ u_2^1\ \ u_1^2\ \ u_2^2\ \ \cdots\ \ u_1^n\ \ u_2^n]$$

$${}^t_t\boldsymbol{B}_L=\begin{bmatrix} {}_tN_{1,1} & 0 & {}_tN_{2,1} & 0 & \cdots & {}_tN_{n,1} & 0 \\ 0 & {}_tN_{1,2} & 0 & {}_tN_{2,2} & \cdots & 0 & {}_tN_{n,2} \\ {}_tN_{1,2} & {}_tN_{1,1} & {}_tN_{2,2} & {}_tN_{2,1} & \cdots & {}_tN_{n,2} & {}_tN_{n,1} \\ \frac{N_1}{{}^t\overline{x}_1} & 0 & \frac{N_2}{{}^t\overline{x}_1} & 0 & \cdots & \frac{N_n}{{}^t\overline{x}_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{16.4.31}$$

其中 ${}_tN_{k,j}=\frac{\partial N_k}{\partial\, {}^t x_j}$，$u_j^k={}^{t+\Delta t}u_j{}^k-{}^tu_j{}^k$，${}^t\overline{x}_1=\sum\limits_{k=1}^{n}N_k{}^tx_1{}^k$

（3）非线性应变-位移转换矩阵

$${}^t_t\boldsymbol{B}_{NL}=\begin{bmatrix} {}_tN_{1,1} & 0 & {}_tN_{2,1} & 0 & \cdots & {}_tN_{n,1} & 0 \\ tN_{1,2} & 0 & {}_tN_{2,2} & 0 & \cdots & {}_tN_{n,2} & 0 \\ 0 & {}_tN_{1,1} & 0 & {}_tN_{2,1} & \cdots & 0 & {}_tN_{n,1} \\ 0 & {}_tN_{1,2} & 0 & {}_tN_{2,2} & \cdots & 0 & {}_tN_{n,2} \\ \frac{N_1}{{}^t\overline{x}_1} & 0 & \frac{N_2}{{}^t\overline{x}_1} & 0 & \cdots & \frac{N_n}{{}^t\overline{x}_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{16.4.32}$$

（4）Cauchy 应力矩阵和向量

$${}^t\boldsymbol{\tau}=\begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} & {}^t\tau_{12} & 0 & 0 & 0 \\ {}^t\tau_{21} & {}^t\tau_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\tau_{11} & {}^t\tau_{12} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\tau_{21} & {}^t\tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\tau_{33} \end{bmatrix},\quad {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}}=\begin{Bmatrix} {}^t\tau_{11} \\ {}^t\tau_{22} \\ {}^t\tau_{12} \\ {}^t\tau_{33} \end{Bmatrix} \tag{16.4.33}$$

典型的二维 4～8 结点单元的插值函数 $N_k(k=1,2,\cdots,n;n=4,5,\cdots,8)$以及总体坐标$({}^0x_1,{}^0x_2)$或$({}^tx_1,{}^tx_2)$和自然坐标$(\xi,\eta)$之间的转换均见第 4 章，这里不再重复。

现在可以通过上述单元矩阵的具体表达式，比较非线性有限元分析中采用 T.L 格式和 U.L 格式在算法上的一些区别：

（1）T.L 格式中的${}^t_0\boldsymbol{B}_{L0}$，${}^t_0\boldsymbol{B}_{NL}$，${}^t_0\boldsymbol{S}$ 等矩阵和 U.L 格式中的${}^t_t\boldsymbol{B}_L$，${}^t_t\boldsymbol{B}_{NL}$，${}^t\boldsymbol{\tau}$ 等矩阵是一一对应的，其中非零元素的分布情况也是相同的。不同的是 T.L 格式中还包含初位移矩阵${}^t_0\boldsymbol{B}_{L1}$，并且它基本上是满阵，因此从这意义上说在 T.L 格式中计算矩阵${}^t_0\boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\ {}_0\boldsymbol{D}\ {}^t_0\boldsymbol{B}_L$ 将比 U.L 格式中计算矩阵${}^t_t\boldsymbol{B}_L^{\mathrm{T}}\ {}_t\boldsymbol{D}\ {}^t_t\boldsymbol{B}_L$ 的工作量要多一些。

（2）T.L 格式中插值函数的求导是对于时间 0 位形的坐标，这些坐标的数值在整个分析过程中是保持不变的。而 U.L 格式中插值函数的求导是对于时间 t 位形的坐标，这些坐标的数值是随着时间 t 而变化的。所以在 T.L 格式中这些插值函数的导数只需要在

加载前计算一次，就可储存起来供以后各次加载时调用。而在U.L格式中，对于各次加载都要重新计算插值函数的导数。

在二维分析中，两种格式用于求解的计算时间一般情况下相差不多，究竟选择哪种格式通常取决于所采用的本构关系的具体形式。关于后者将在下一节中进一步讨论。

以上列出的二维等参单元的各个矩阵和向量的表达式不难推广到三维等参单元情况，这里就不一一列出。只是对于大变形分析中的板壳一类结构力学单元仍需作一定的讨论。

板壳类单元在大变形分析中有广泛的应用，例如薄壁结构的大挠度、屈曲问题应用板壳类单元是合理的选择。应指出的是，在大挠度、屈曲问题中，由于结构的中面通常都是经受变形的，所以更具体的说应采用壳体单元进行离散。现就用于大变形分析的壳体单元作一定的讨论。

在第12章的讨论中，我们已知在有限元分析中有二类壳体单元。一类是基于壳体理论的壳体单元，它们是以中面的位移和转动作为场变量，通过壳体理论的几何方程和物理方程，得到壳体中面的广义应变和广义应力，最后利用在中面上积分的壳体能量方程，得到有限元求解方程。由于壳体几何方程和物理方程依赖于以应用于不同条件为目的壳体理论中所作的简化和假设，也就是说在不同的壳体理论中，它们是有所不同的。这与有限元分析的通用性不太协调，因而不便于应用。所以从实际需要的通用性出发，现在人们更多是采用从三维实体单元蜕化而来的超参壳元。

超参壳元，虽然也是以中面结点的位移和转动作为结点参数，不同于上述壳体单元的是，通过插值函数得到的是三维体内的位移场，再通过三维介质的几何关系和物理方程得到三维体内的应变和应力，最后利用在三维体内积分的能量方程得到有限元方程。其中除三维介质的几何关系和物理方程中引用了壳体的基本假设而外，不涉及具体的壳体理论，因而具有广泛的通用性。三维超参壳元内的位移场表达式如(12.3.6)式所示：

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} l_{1i} & -l_{2i} \\ m_{1i} & -m_{2i} \\ n_{1i} & -n_{2i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}$$

式中各个符号的定义已在12.3.2节中给出，这里不再重复。需要指出的是上式成立的条件是 α_i, β_i 应是小量，也就是上式是以中面法线的小转动为条件，因为在导出上式时，采用了

$$\cos\alpha_i \approx 1, \ \cos\beta_i \approx 1, \ \sin\alpha_i \approx \alpha_i, \ \sin\beta_i \approx \beta_i$$

在大变形分析中，应该允许中面法线有较大的转动。为使(12.3.6)式所示的位移表达式仍保持有效，应采用U.L.格式。每个增量步结束后更新参考位形，即重新确定单元结点的坐标和结点的中面法线方向 $\boldsymbol{v}_{3i}$ 及与之垂直的二个向量 $\boldsymbol{v}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{v}_{2i}$。同时限制载荷增量的步长，以使法线绕 $\boldsymbol{v}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{v}_{2i}$ 的转动 β_i 和 α_i 的增量，即 $\Delta\alpha_i$ 和 $\Delta\beta_i$ 足够小。这样就仍可采用(12.3.6)式的形式来表示单元内的位移增量，即有

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta w_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\zeta \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} l_{1i} & -l_{2i} \\ m_{1i} & -m_{2i} \\ n_{1i} & -n_{2i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\alpha_i \\ \Delta\beta_i \end{Bmatrix} \tag{16.4.34}$$

式中结点坐标和$(l_{1i}\ m_{1i}\ n_{2i})$及$(l_{2i}\ m_{2i}\ n_{2i})$是在前一增量步结束时的位形中定义的。

如果从分析的方便出发，仍需采用 T. L. 格式，为使位移场表达式摆脱小转动的限制，应采用以下表达式[1]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{\text{中面}} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \frac{\zeta t_i}{2} \boldsymbol{F}_i \tag{16.4.35}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 是 α_i，β_i 的三角函数，并且 α_i 和 β_i 的次序不能互换，则对此非线性函数 $\boldsymbol{F}_i$，应区别下述二种情况：

情况 A：按 $\beta \to \alpha$ 次序转动

等效于单元应力的结点力向量${}^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{F}^{(l)}$是由$\int_{^0V} {}^{t+\Delta t}_{0}S_{ij}^{(l)}\ \delta\, {}^{t+\Delta t}_{0}\varepsilon_{ij}^{(l)}\,{}^0\mathrm{d}V$ 计算得到，上标(l)表示应力和应变是按${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u}^{(l)}$计算的。因为

$$\delta\, {}^{t+\Delta t}_{0}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_0 u_{i,j} + \delta 0 u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}_{0}u_{k,i}\,\delta_0 u_{k,j} + {}^{t+\Delta t}_{0}u_{k,j}\,\delta_0 u_{k,i})$$

所以

$$ {}^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{F}^{(l)} = \int_{^0V} {}^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{B}_L^{(l)\mathrm{T}}\ {}^{t+\Delta t}_{0}\hat{\boldsymbol{S}}^{(l)}\ {}^0\mathrm{d}V \tag{16.4.41}$$

其中${}^{t+\Delta t}_{0}\boldsymbol{B}_L^{(l)}$和${}^{t+\Delta t}_{0}\hat{\boldsymbol{S}}^{(l)}$对于二维单元分别相应于(16.4.24)式和(16.4.28)式中的${}^t_0\boldsymbol{B}_L$和${}^t_0\hat{\boldsymbol{S}}$，但是它们是按${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u}^{(l)}$计算得到的。

在 U.L. 格式中，迭代按下式进行

$$({}^t_t\boldsymbol{K}_L + {}^t_t\boldsymbol{K}_{NL})\Delta\boldsymbol{u}^{(l)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q} - {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(l)} \quad (l = 0,1,2,\cdots) \tag{16.4.42}$$

其中${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(l)}$是由$\int_{^{t+\Delta t}V^{(l)}} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}^{(l)}\ \delta_{t+\Delta t}e_{ij}^{(l)}\,{}^{t+\Delta t}\mathrm{d}V^{(l)}$计算得到，即

$$ {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(l)} = \int_{^{t+\Delta t}V^{(l)}} {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\boldsymbol{B}_L^{(l)\mathrm{T}}\ {}^{t+\Delta t}\hat{\tau}^{(l)}\ {}^{t+\Delta t}\mathrm{d}V^{(l)} \tag{16.4.43}$$

其中${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\boldsymbol{B}_L^{(l)}$和${}^{t+\Delta t}\hat{\tau}^{(l)}$分别相应于(16.4.31)式和(16.4.33)式的${}^t_t\boldsymbol{B}_L$和${}^t\hat{\tau}$。但是它们是按${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u}^{(l)}$计算得到的。

2. 动力分析

对于忽略阻尼影响的动力分析，T.L. 格式和 U.L. 格式的求解方程已在(16.4.15)式和(16.4.16)式中给出。原则上说，线性动力分析问题的求解方法都可以用于现在的情况。但由于现在求解方程中刚度矩阵依赖于变形状态，因此带来了区别于线性动力分析的一些特点，现在此给予简要的讨论。

(1) 显式时间积分

应用中心差分法求解线性动力分析问题，由于方程建立于时间t，所以刚度矩阵$\boldsymbol{K}$仅出现在时间递推公式(14.3.4)式的右端。用于现在的情况，T.L. 格式和 U.L. 格式的中心差分法的递推公式可分别表示如下：

T.L. 格式

$$\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u} = {}^t\boldsymbol{Q} - \left({}^t_0\boldsymbol{K}_L + {}^t_0\boldsymbol{K}_{NL} - \frac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\right){}^t\boldsymbol{u} - \frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\ {}^{t-\Delta t}\boldsymbol{u} \tag{16.4.44}$$

U.L. 格式

$$\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u} = {}^t\boldsymbol{Q} - \left({}^t_t\boldsymbol{K}_L + {}^t_t\boldsymbol{K}_{NL} - \frac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\right){}^t\boldsymbol{u} - \frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\ {}^{t-\Delta t}\boldsymbol{u} \tag{16.4.45}$$

区别于线性分析的，首先是上式右端${}^t_0\boldsymbol{K}_L + {}^t_0\boldsymbol{K}_{NL}$和${}^t_t\boldsymbol{K}_L + {}^t_t\boldsymbol{K}_{NL}$在每个增量步中需要重新计算。另一点是用以确定中心差分法临界时间步长Δt_{cr}的系统最小特征周期T_n，由于系统刚度矩阵是变化的，因此T_n也是变化的。不过通常情况下，按弹性刚度矩阵计算得到的T_n偏小。所以由它确定的Δt_{cr}用于全过程的分析可以偏于安全。

(2) 隐式时间积分

应用 Newmark 方法求解线性动力分析问题的递推公式已在(14.3.15)式给出。用于

现在的情况，由于出现在方程左端的刚度矩阵是非线性的，因此需要迭代求解。当采用 mN-R 迭代法，Newmark 方法采用平均加速度方案，即 $\alpha=1/4$、$\beta=1/2$ 时的递推迭代公式是

T. L. 格式

$$\left({}_0^t\boldsymbol{K}_C+{}_0^t\boldsymbol{K}_{NL}+\frac{4}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\right)\Delta\boldsymbol{u}^{(l)}={}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}-{}_0^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(l)}-\boldsymbol{M}\left[\frac{4}{\Delta t^2}({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u}^{(l)}-{}^t\boldsymbol{u})-\frac{4}{\Delta t}{}^t\dot{\boldsymbol{u}}-{}^t\ddot{\boldsymbol{u}}\right] \tag{16.4.46}$$

U. L. 格式

$$\left({}_t^t\boldsymbol{K}_C+{}_t^t\boldsymbol{K}_{NL}+\frac{4}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\right)\Delta\boldsymbol{u}^{(l)}={}^{t+\Delta t}\boldsymbol{Q}-{}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(l)}-\boldsymbol{M}\left[\frac{4}{\Delta t^2}({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u}^{(l)}-{}^t\boldsymbol{u})-\frac{4}{\Delta t}{}^t\dot{\boldsymbol{u}}-{}^t\ddot{\boldsymbol{u}}\right] \tag{16.4.47}$$

以上两式中的${}_0^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(l)}$和${}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(l)}$分别如(16.4.41)式和(16.4.43)式所示。

(3) 振型叠加法

由于非线性系统中，刚度矩阵是依赖于变形的，因此系统的固有振型也是依赖于变形的。为将振型叠加法用于非线性分析，原则上应根据每一个增量步起点的刚度矩阵和质量矩阵，即${}^t\boldsymbol{K}$和${}^t\boldsymbol{M}$(通常可认为 $\boldsymbol{M}$ 不依赖于变形)求出适用于此增量步的固有振型，然后对此增量步用振型叠加法求解。显然，这将显著增加了计算工作量，可能完全抵消了振型叠加法用于线性分析情况时带来的好处。所以对于非线性动力分析，只是在要求进行动力分析的持续时间较短，且动力响应中包含的振型相当少的情况，考虑采用振型叠加法才是适宜的。

3. 结构稳定性分析

在结构保持弹性的情况，首先求解一弹性静力问题(16.4.17)式。然后根据解得的应力分布形成用以求解临界载荷和屈曲模态的矩阵特征值问题(16.4.22)式。此问题的求解可以采用第 14 章中讨论过的各种求解大型矩阵特征值问题的方法。

16.4.4 载荷增量步长的自动选择

和材料非线性问题相比，几何非线性问题有更为复杂多样的载荷-位移路径，图 16.4 所示是其最一般特性的表现。图中 B 点和 C 点称为载荷控制的极限点。当载荷到达 B 点以后继续增加，位移将疾速地突然增加到 D 点。这种现象称为"疾速通过"(Snap-through)，是扁壳(拱)受压时的典型表现。在扁壳(拱)受压的试验中，当压力增加到一定临界值(B 点)壳(拱)将失去稳定，接着发生曲率反向过屈曲现象(从 B 突变到 D 点)，然后随着载荷增加，位移继续增加(沿 $D\sim E$ 曲线)。图中 G 点和 H 点称为位移控制的极限点。当位移到达 G 点以后继续增加。载荷疾速下降到 I 点。这种现象也称为"疾速通过"，是圆柱形薄壳受轴压时的典型表现。在柱壳受轴压的试验中，用位移控制加载。当位移增至 G 点时，壳体失去稳定，压力疾速下降到 I 点，壳体发生过屈曲现象。然后载荷-位移沿 $I\sim J$ 路径发展。

在几何非线性分析中，完整的载荷-位移路途 $ABCDEFGHIJ$ 将被追踪，这可以预测试验中的"疾速通过"现象，具有重要的理论和实际意义。

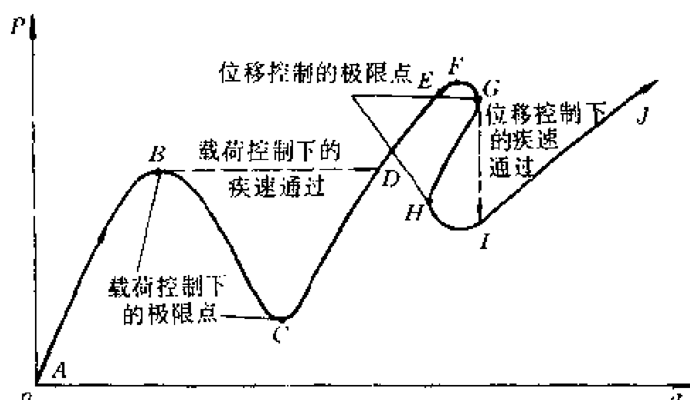


图 16.4 几何非线性问题载荷-位移路径的一般特性

面对几何非线性问题载荷-位移路径的复杂性，在 15.5.2 节所讨论的载荷增量步长自动选择的方法，仍不能胜任追踪全路径的任务。虽然在规定"本步刚度参数"变化量以控制载荷增量的方法中，提出了用在增量步中不进行迭代的方法以绕过载荷控制极限点(因为该点刚度阵奇异，无法进行迭代)，但将带来较大的误差。至于规定某个结点的位移增量以确定载荷增量的方法，虽然比较适合于计算极限载荷和由载荷控制的"疾速通过"现象。但是对于由位移控制的"疾速通过"现象，此法就不能应用。为此在本章再介绍一种近十多年来被广泛研究和应用的方法：广义弧长法。现介绍其中一种较一般的形式。

此法所涉及符号及表达式和 15.5.2 节"规定某个结点的位移增量以确定载荷增量"的方法基本上相同，只是控制载荷因子增量的约束条件是用下式代替前一方法中的(15.5.30)式，即

$$\alpha[({}^{t+\Delta t}p^{(n)}-{}^{t}p)+\Delta p^{(n)}]^2+[({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n)}-{}^{t}\boldsymbol{a})+\Delta\boldsymbol{a}^{(n)}]^{\mathrm{T}}[({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n)}-{}^{t}\boldsymbol{a})+\Delta\boldsymbol{a}^{(n)}]=(\Delta l)^2 \tag{16.4.48}$$

式中 Δl 是弧长，α 是比例因子，由它调节载荷增量和位移增量在弧长 Δl 中的作用，它对弧长法的总体性能有很大的影响。现推荐下述三种情况

1. $\alpha=1$ 这时(16.4.48)式成

$$\{({}^{t+\Delta t}p^{(n)}-{}^{t}p)+\Delta p^{(n)}\}^2+[({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n)}-{}^{t}\boldsymbol{a})+\Delta\boldsymbol{a}^{(n)}]^{\mathrm{T}}[({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n)}-{}^{t}\boldsymbol{a})+\Delta\boldsymbol{a}^{(n)}]=(\Delta l)^2 \tag{16.4.49}$$

这就是 Crisfield 提出的球面弧长法[3]，对于单自由度系统，在用 mN-R 迭代求解时的示意如图 16.5。

2. $\alpha=0$ 这时(16.4.48)式成

$$[({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n)}-{}^{t}\boldsymbol{a})+\Delta\boldsymbol{a}^{(n)}]^{\mathrm{T}}[({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n)}-{}^{t}\boldsymbol{a})+\Delta\boldsymbol{a}^{(n)}]=(\Delta l)^2 \tag{16.4.50}$$

这也是 Crisfield 提出的[3]，因为在二个自由度系统中上式代表一圆柱面的方程，所以此法又称柱面弧长法。

3. $\alpha=S_p$，S_p 是(15.5.20)式表示的 Bergan 的本步刚度参数。由于 S_p 在求解过程中是变化的，因此现在的弧长法将随结构刚度的变化，而可能趋近于球面弧长法或柱面弧长法。它又称为椭圆弧长法。

将(15.5.33)式表示的 $\Delta \boldsymbol{a}^{(n)}$，即

$$\Delta \boldsymbol{a}^{(n)} = \Delta \boldsymbol{a}_{u}^{(n)} + \Delta p^{(n)} \boldsymbol{a}_{0}$$

代入(16.4.48)式，可以得到求解 $\Delta p^{(n)}$ 的二次方程。解之，如出现虚根，则 Δl 减半重新进行本增量步的计算。如得到二个实根，则应取使

$$\delta = [{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a}^{(n)} - {}^{t}\boldsymbol{a}]^{\mathrm{T}}[{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{a} - {}^{t}\boldsymbol{a} + \Delta \boldsymbol{a}_{u}^{(n)} + \Delta p^{(n)} \boldsymbol{a}_{0}] \tag{16.4.51}$$

较大的 $\Delta p^{(n)}$。目的使本次迭代后的位移增量的方向和前一次迭代的结果尽量接近些，以保证解的可靠性。很多研究工作表明，虽然对于不同的结构和载荷情况，很难说以上 α 不同取值的三种情况中哪种方法具有绝对的优势，但是 $\alpha=0$ 的柱面弧长法具有较好的普遍适应性。

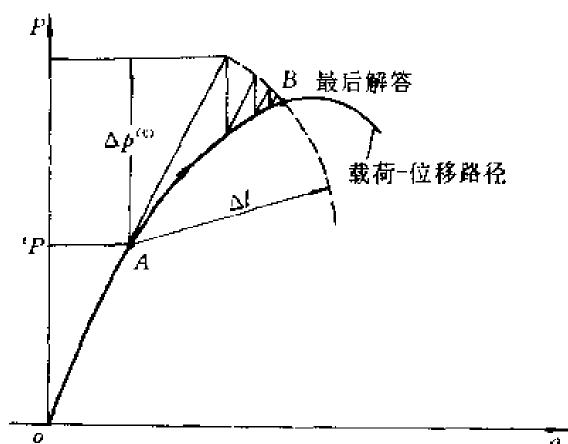


图 16.5 和 mN-R 法相结合的球面弧长法

16.4.5 依赖于变形的载荷

到现在为止，我们假设载荷是不依赖于物体的变形状态的，因此在实际计算中，每一时间分步的外载荷可以在增量分析开始以前就计算出来并储存于外部设备中。但是在结构产生大位移或大变形的情况下，有时有必要考虑外加载荷是依赖于变形状态的。这种载荷形式中，最常见的是压力载荷。在此情况下，时间 $t+\Delta t$ 位形的微面积 ${}^{t+\Delta t}\mathrm{d}S$ 上的载荷是

$$\mathrm{d}T_{k} = -{}^{t+\Delta t}p\,{}^{t+\Delta t}\nu_{k}\,{}^{t+\Delta t}\mathrm{d}S \tag{16.4.52}$$

其中 ${}^{t+\Delta t}p$ 是时间 $t+\Delta t$ 位形的表面压力。${}^{t+\Delta t}\nu_{K}$ 是时间 $t+\Delta t$ 位形外法线向量 ν 的 k 分量。

在 T.L. 格式中利用(16.2.28)式，载荷可转换为

$${}^{t+\Delta t}_{0}t_{k}\,{}^{0}\mathrm{d}S = -\frac{{}^{0}\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho}\,{}^{t+\Delta t}p\,{}_{t+\Delta t}^{\ \ 0}x_{i,k}\,{}^{0}\nu\,{}^{0}\mathrm{d}S \tag{16.4.53}$$

在 U.L. 格式中，载荷则可表示为

$${}^{t+\Delta t}_{t}t_{k}\,{}^{t}\mathrm{d}S = -\frac{{}^{t}\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho}\,{}^{t+\Delta t}p\,{}_{t+\Delta t}^{\ \ t}x_{i,k}\,{}^{t}\nu_{i}^{t}\mathrm{d}S \tag{16.4.54}$$

需要指出，以上两式中都包含着 ${}^{t+\Delta t}\rho$ 和对 $t+\Delta t$ 位形的坐标 ${}^{t+\Delta t}x_{i}$ 的导数，而 ${}^{t+\Delta t}\rho$

和${}^{t+\Delta t}x_i$本身都是待求的未知量，因此实际计算中只能对它们采用平衡迭代，即在每次迭代中，将(16.4.53)式和(16.4.54)式所表示的载荷项分别改写成

$$-\frac{{}^0\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho^{(l)}}\,{}^{t+\Delta t}p\,\frac{\partial\,{}^0x_i}{\partial\,{}^{t+\Delta t}x_k^{(l)}}\,{}^0\nu_i\,{}^0\mathrm{d}S \tag{16.4.55}$$

和

$$-{}^{t+\Delta t}p\,{}^{t+\Delta t}\nu_k^{(l)}\,{}^{t+\Delta t}\mathrm{d}S^{(l)} \tag{16.4.56}$$

其中右上标(l)表示迭代的位形。虽然这两种格式的近似性是相同的，但考虑到在U.L.格式中，每一时间步长本来就需要重新计算${}^{t+\Delta t}\nu_k$和${}^{t+\Delta t}\mathrm{d}S$，因此用(16.4.52)式计算依赖于变形的面积载荷不增加太多的工作量。所以在载荷依赖于变形的情况，采用U.L.格式通常更有效一些。

16.5 大变形情况下的本构关系

上节中导出的增量有限元求解方程(16.4.3)式(T.L.格式)和(16.4.11)式(U.L.格式)原则上可以用于任何一种类型的材料本构模型。当运用这些方程于具体问题时，首先需要确定用以联系应力和应变的材料本构张量${}_0D_{ijrs}$或${}_tD_{ijrs}$。正如在前一章的讨论中所见，在包含材料非线性的有限元分析中，在每一增量步的每次迭代前，需要计算出每一积分点本构张量的数值，以形成刚度矩阵。在从求解方程解得位移增量以后，需要根据应变增量，再利用本构张量计算出应力增量以及应力矩阵和应力向量，为转入下一增量或迭代作好准备。问题是在大变形情况下，本构关系的建立比单纯材料非线性情况需要给予更多的注意。

我们知道，在等温或绝热条件下的小变形线弹性情况，应力应变关系可以用以下三种等效的方法进行描述。

(1) $\sigma_{ij}=D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ (16.5.1)

(2) $\sigma_{ij}=\dfrac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\qquad W=\dfrac{1}{2}D_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl}$ (16.5.2)

(3) $\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t}=D_{ijkl}\dfrac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial t}$ (16.5.3)

其中ε_{kl}是工程(无穷小)应变，即$\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k})$，本构张量$D_{ijkl}$是常数张量，它可以依赖于温度，但独立于应力或应变，对于各向同性的线弹性材料

$$D_{ijkl}=2G\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

数学上将以上描述推广到小变形线弹性以外的情况，但仍保持“弹性”的概念，可以得到三种不再等效，实际上是三种具有不同程度普遍性的本构关系。连续介质力学中将它们分别称为弹性(elasticity)，超弹性(hyperelasticity)和拟弹性(hypoelasticity)。现结合实际材料变形及有限元分析的特点，对它们进行具体的讨论。

首先应该指出：在实际的分析中，从结构变形特点考虑，可以将大变形问题进一步区分为两类问题：大位移、大转动、小应变问题和大位移、大转动、大应变问题。前者例如薄壁板壳结构的大挠度和后屈曲问题。其特点是尽管位移和截面的转动相当大，但应变很小，

甚至还保持在材料的弹性应变范围之内。后一类问题区别于前者的特点是应变很大(以后简称这类问题为大应变问题),例如金属的成型,橡皮型材料的受力等都属于这类问题(尽管后一种情况材料仍保持为弹性)。从材性特点考虑,实际问题又可以区别为弹性问题和非弹性问题。前者应力和应变之间有一一对应的关系,而不依赖于变形的历史。后者则应力和应变之间不存在一一对应的关系,而与变形的历史有关。前一章讨论的材料弹塑性变形和蠕变变形即是非弹性变形的二种最经常遇到的具体情况。在了解了大变形情况下的结构变形和材料性质的不同特点以后,就可以比较方便地具体建立适合在不同条件下进行实际分析的本构关系。

16.5.1 弹性

材料处于弹性情况的特点是应力和应变之间存在一一对应的关系。在小应变情况下,这种关系是线性的;在大应变情况下,这种关系是非线性的。

1. 大位移、大转动、小应变情况

对此情况我们可以采用小变形线弹性本构关系第一种描述(16.5.1)式的推广形式

$$ {}_0^tS_{ij} = {}_0^tD_{ijkl}\,{}_0^t\varepsilon_{kl} \tag{16.5.4}$$

其中${}_0^tS_{ij}$是 Kirchhoff 应力张量,${}_0^t\varepsilon_{kl}$是 Green 应变张量。${}_0^tD_{ijkl}$是常数弹性本构张量,对于三维应力状态

$$ {}_0^tD_{ijkl} = D_{ijkl} = 2G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \tag{16.5.5}$$

其中 G、ν 是材料弹性常数。从前面的讨论中已经知道,在大位移、大转动、小应变情况下,${}_0^tS_{ij}$和${}_0^t\varepsilon_{ij}$在数值上就等于随体坐标中的工程应力和工程应变,因此本构张量(16.5.5)式保持和小变形情况完全相同的形式,其中弹性常数 G、ν 可以通过通常小变形条件下的材料试验确定。

由于实际分析通常采用如(16.3.24)式所示的增量形式,此时需要利用到切线本构张量${}_0D_{ijkl}$。因为${}_0^tD_{ijkl}$是常数张量,所以有

$$ {}_0D_{ijkl} = {}_0^tD_{ijkl} \tag{16.5.6}$$

2. 大应变情况

对于大应变情况,在连续介质力学中用超弹性来表征这种材料特性。此时假定材料有一应变能函数 ${}^tW$。它是 Green 应变张量${}_0^t\varepsilon_{ij}$的解析函数,但不限于${}^tW=\frac{1}{2}{}_0^tD_{ijkl}\,{}_0^t\varepsilon_{ij}\,{}_0^t\varepsilon_{kl}$的形式,它可能包含${}_0^t\varepsilon_{ij}$的高次项。按和(16.5.2)式相同的形式,可以从${}^tW$ 导出 Kirchhoff 应力张量${}_0^tS_{ij}$,即

$$ {}_0^tS_{ij} = {}^0\rho\,\frac{\partial\,{}^tW}{\partial\,{}_0^t\varepsilon_{ij}} \tag{16.5.7}$$

为了得到切线本构张量${}_0D_{ijkl}$,可将上式在时间 t 位形附近作 Taylor 展开,并取至一次近似,就可以得到

$$ {}_0S_{ij} = {}^0\rho\,\frac{\partial^2\,{}^tW}{\partial\,{}_0^t\varepsilon_{ij}\,\partial\,{}_0^t\varepsilon_{kl}}\,{}_0\varepsilon_{kl} \tag{16.5.8}$$

将上式和(16.3.22)式对比,即得

$$
{}_0D_{ijkl} = {}^0\rho \frac{\partial^2 W}{\partial {}_0^t\varepsilon_{ij}\, \partial {}_0^t\varepsilon_{kl}} \tag{16.5.9}
$$

以上讨论的本构关系是建立于 Kirchhoff 应力张量${}_0^tS_{ij}$和 Green 应变张量${}_0^t\varepsilon_{kl}$或它们的增量${}_0S_{ij}$和${}_0\varepsilon_{kl}$之间的。在前面已经知道，在大变形情况下，${}_0^tS_{ij}$和${}_0^t\varepsilon_{kl}$都是不随材料微元刚体转动而变化的客观张量，因此在弹性分析中选用与上述本构关系相匹配的 T.L. 格式是一种自然而合理的选择。

如果在实际分析中，有必要采用 U.L. 格式，这时则应有与之相匹配的${}_t^tD_{ijkl}$和${}_tD_{ijkl}$。它们可以通过对已知的${}_0^tD_{ijkl}$和${}_0D_{ijkl}$进行坐标转换得到。首先将${}_0^tS_{ij}$和${}^t\tau_{kl}$及${}_0^t\varepsilon_{ij}$和${}_t^t\varepsilon_{kl}$之间的关系式(16.2.30)式和(16.2.12)式代入(16.5.4)式，即可得到联系 Euler 应力张量${}^t\tau_{ij}$和 Almansi 应变张量${}_t^t\varepsilon_{kl}$的本构关系式

$$
{}^t\tau_{ij} = {}_t^tD_{ijkl}\, {}_t^t\varepsilon_{kl} \tag{16.5.10}
$$

其中：

$$
{}_t^tD_{ijkl} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}\, {}_0^tx_{i,m}\, {}_0^tx_{j,n}\, {}_0^tD_{mnpq}\, {}_0^tx_{k,p}\, {}_0^tx_{l,q} \tag{16.5.11}
$$

反之，如果已知${}_t^tD_{mnpq}$，可以通过以下转换得到${}_0^tD_{ijkl}$

$$
{}_0^tD_{ijkl} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}\, {}_t^0x_{i,m}\, {}_t^0x_{j,n}\, {}_t^tD_{mnpq}\, {}_t^0x_{k,p}\, {}_t^0x_{l,q} \tag{16.5.12}
$$

为得到${}_tD_{ijkl}$，可以根据导出${}_0^tS_{ij}$和${}^t\tau_{kl}$及${}_0^t\varepsilon_{ij}$和${}_t^t\varepsilon_{kl}$之间关系的原理，并利用(16.3.10)、(16.3.18)和(16.3.19)等式，可导出以下关系式

$$
\begin{aligned}
{}_0\varepsilon_{ij} &= {}_0^tx_{k,i}\, {}_0^tx_{l,j}\, {}_t\varepsilon_{kl} \\
{}_t\varepsilon_{ij} &= {}_t^0x_{k,i}\, {}_t^0x_{l,j}\, {}_0\varepsilon_{kl}
\end{aligned} \tag{16.5.13}
$$

和

$$
\begin{aligned}
{}_0S_{ij} &= \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}\, {}_t^0x_{i,k}\, {}_t^0x_{j,l}\, {}_tS_{kl} \\
{}_tS_{ij} &= \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}\, {}_0^tx_{i,k}\, {}_0^tx_{j,l}\, {}_0S_{kl}
\end{aligned} \tag{16.5.14}
$$

从以上各式可见，${}_0\varepsilon_{ij}$和${}_t\varepsilon_{kl}$及${}_0S_{ij}$和${}_tS_{kl}$之间存在着与${}_0^t\varepsilon_{ij}$和${}_t^t\varepsilon_{kl}$及${}_0^tS_{ij}$和${}^t\tau_{ij}$之间完全相同的转换关系，因此${}_0D_{ijkl}$和${}_tD_{mnpq}$之间也存在着与${}_0^tD_{ijkl}$和${}_t^tD_{mnpq}$之间完全相同的转换关系，即

$$
{}_tD_{ijkl} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho}\, {}_0^tx_{i,m}\, {}_0^tx_{j,n}\, {}_0D_{mnpq}\, {}_0^tx_{k,p}\, {}_0^tx_{l,q} \tag{16.5.15}
$$

$$
{}_0D_{ijkl} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho}\, {}_t^0x_{i,m}\, {}_t^0x_{j,n}\, {}_tD_{mnpq}\, {}_t^0x_{k,p}\, {}_t^0x_{l,q} \tag{16.5.16}
$$

需要指出，以上列出的转换关系式，是按大变形一般情况导出的。当用于小应变，由于${}^t\rho/{}^0\rho \approx 1$，以上各式仅反映材料发生刚体转动时引起的变化。如果材料是各向同性的，则本构关系不依赖于方向的变化，这时应有

$$
{}_t^tD_{ijkl} = {}_0^tD_{ijkl}, \quad {}_tD_{ijkl} = {}_0D_{ijkl} \tag{16.5.17}
$$

并因为材料是线弹性的，本构关系是常数张量，所以进一步有

$$
{}_t^tD_{ijkl} = {}_0^tD_{ijkl} = {}_0D_{ijkl} = {}_tD_{ijkl} = D_{ijkl} \tag{16.5.18}
$$

16.5.2 非弹性

当材料进入非弹性状态以后，由于它的应力和应变之间不再存在一一对应的关系，而依赖于变形的历史，因此它不能采用全量形式的本构关系，而应采用联系应力微分和应变微分的拟弹性型(如(16.5.3)式所表示)的本构关系。现分别大位移、大转动、小应变和大应变两种情况加以讨论。

1. 大位移、大转动、小应变情况

如前面已指出，Kirchhoff 应力张量${}_0^tS_{ij}$和 Green 应变张量${}_0^t\varepsilon_{ij}$是不随材料微元的刚体转动而变化的客观张量。在小应变情况下数值上就等于工程应力和工程应变，因此可以方便地利用它们来建立现在情况下的本构关系，即

$$\mathrm{d}\,{}_0^tS_{ij} = {}_0^tD_{ijkl}\,\mathrm{d}\,{}_0^t\varepsilon_{kl} \tag{16.5.19}$$

其中 d_0S_{ij}和 $\mathrm{d}_0\varepsilon_{kl}$分别是 Kirchhoff 应力张量和 Green 应变张量的微分，${}_0D_{ijkl}$是时间 t 位形的、并参考于时间 0 位形的切线本构张量，它是 Kirchhoff 应力张量和 Green 应变张量的函数。对于弹塑性变形情况${}_0D_{ijkl}$和前一章讨论的单纯材料非线性情况在形式上完全相同，只是用${}_0^tS_{ij}$和${}_0^t\varepsilon_{ij}$代替了其中的工程应力和工程应变。以各向同性硬化材料为例，它可以表示如下

$${}_0D_{ijkl} = D^e_{ijkl} - {}_0D^p_{ijkl} \tag{16.5.20}$$

其中

$$D^e_{ijkl} = 2G\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}\right)$$

$${}_0D^p_{ijkl} = \begin{cases} \dfrac{{}_0^tS'_{ij}\,{}_0^tS'_{kl}}{(1/9)(\sigma_s^2/G)(3G+E^p)} & \text{(弹塑性加载)} \\ 0 & \text{(弹性加载或卸载)} \end{cases}$$

上式中${}_0^tS'_{ij}$ 是时间 t 的 Kirchhoff 应力的偏斜张量，塑性模量 E^p 是从材料单向受力试验得到的工程应力-应变曲线得到的。

和上述本构关系相应的屈服(加载)函数和流动法则也应表示成 Kirchhoff 应力张量和 Green 应变张量的函数，即

$${}^tF({}_0^tS_{ij},\,{}^tk) = \frac{1}{2}\,{}_0^tS'_{ij}\,{}_0^tS'_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_s^2({}_0^t\bar{\varepsilon}^p) = 0 \tag{16.5.21}$$

$$\mathrm{d}\,{}_0^t\varepsilon^p_{ij} = {}^t\mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial\,{}^tF}{\partial\,{}_0^tS_{ij}} \tag{16.5.22}$$

其中

$${}_0^t\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \mathrm{d}\,{}_0^t\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t\left(\frac{2}{3}\mathrm{d}\,{}_0^t\varepsilon^p_{ij}\,\mathrm{d}\,{}_0^t\varepsilon^p_{ij}\right)^{1/2}$$

$${}^t\mathrm{d}\lambda = \frac{{}_0^tS'_{ij}\,\mathrm{d}\,{}_0^t\varepsilon_{ij}}{(2/9)(\sigma_s^2/G)(3G+E^p)}$$

对于其他硬化情况，可以列出和(16.5.20)～(16.5.22)各式相应的表达式，这里不一一列举。

由于以上各式中${}_0^tS_{ij}$和${}_0^t\varepsilon_{ij}$都是参考于时间 0 位形度量的，因此在分析中采用 T.L.格

式是一种自然而合理的选择。即将(16.5.20)式所表达的本构关系代入T.L.格式经线性化后的虚位移原理(16.3.24)式,再进一步有限元离散即可形成有限元求解方程(16.4.3)式。

2. 大应变(包含大位移、大转动)情况

上述大位移、大转动、小应变情况,通常是指累积塑性应变 ${}_0^t\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \mathrm{d}\,{}_0^t\varepsilon_{ij}^p \mathrm{d}\,{}_0^t\varepsilon_{ij}^p \right)^{1/2}$ $<2\%$的情况。如果${}_0^t\bar{\varepsilon}^p>2\%$,则应属于大应变情况。在此情况下,${}_0^tS_{ij}$和${}_0^t\varepsilon_{ij}$在数值上不等于工程应力和工程应变,因而不便于用来确定本构关系中材料常数。在大应变材料试验中便于应用的是真应力和真应变(即对数应变)及其速率。在前面已经指出,Jaumann 应力速率张量${}^t\dot{\sigma}_{ij}^J$和应变速率张量${}^t\dot{e}_{ij}$在物理上分别代表真应力速率张量和真应变速率张量,所以在大应变情况下,采用联系${}^t\dot{\sigma}_{ij}^J$和${}^t\dot{e}_{ij}$的本构关系是一种合理的选择,它可以表示为

$$ {}^t\dot{\sigma}_{ij}^J = {}^tD_{ijkl}^J \, {}^t\dot{e}_{kl} \tag{16.5.23} $$

和前面小应变情况列出的各式相类似,可以列出大应变情况的各个表达式,只是其中的${}_0^tS_{ij}$和$\mathrm{d}\,{}_0^t\varepsilon_{ij}$被${}^t\tau_{ij}$和$\mathrm{d}\,{}_te_{ij}$所代替。对于各向同性硬化材料

$$ {}^tD_{ijkl}^J = {}^tD_{ijkl}^e - {}^tD_{ijkl}^p \tag{16.5.23$'$} $$

其中

$$ {}^tD_{ijkl}^e = 2G\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\,\delta_{kl} \right) $$

$$ {}^tD_{ijkl}^p = \begin{cases} \dfrac{{}^t\tau_{ij}'\,{}^t\tau_{kl}'}{(1/9)(\sigma_s^2/G)(3G+E^p)} & \text{(弹塑性加载)} \\ 0 & \text{(弹性加载或卸载)} \end{cases} $$

$$ {}^tF({}^t\tau_{ij},{}^tk) = \frac{1}{2}\,{}^t\tau_{ij}'\,{}^t\tau_{ij}' - \frac{1}{3}\sigma_s^2({}^t\bar{e}^p) \tag{16.5.24} $$

$$ \mathrm{d}\,{}^te_{ij}^p = {}^t\mathrm{d}\lambda \frac{\partial\,{}^tF}{\partial\,{}^t\tau_{ij}} \tag{16.5.25} $$

其中

$$ {}^t\bar{e}^p = \int_0^t \left(\frac{2}{3}\mathrm{d}^te_{ij}^p\,\mathrm{d}^te_{ij}^p \right) $$

$$ {}^t\mathrm{d}\lambda = \frac{{}^t\tau_{ij}'\ \mathrm{d}\,{}^te_{ij}}{(2/9)(\sigma_s^2/G)(3G+E^p)} $$

以上式中${}^t\tau_{ij}'$是时间t的Euler应力的偏斜张量,塑性模量E^p是从材料单向受力试验得到真应力-真应变曲线导出的。

以上各式中${}^t\tau_{ij}$、$\mathrm{d}\,{}^te_{ij}$等都是参考时间t位形度量的,无疑与之相应的,在分析中采用U.L.格式是一种自然的选择。但考虑到U.L.格式的虚位移原理表达式(16.3.21)式中需要利用本构关系代换的是更新的Kirchhoff应力张量的增量${}_tS_{ij}$,因此在利用(16.5.23)式于虚位移原理表达式前,需要先导出${}_tS_{ij}$和σ_{ij}^J的关系。为此首先将(16.2.34)式和(16.5.23)表示的速率方程改写成近似的增量方程

$$ \sigma_{ij}^J = \tau_{ij} - {}^t\tau_{ip}\,\frac{1}{2}({}_tu_{j,p} - {}_tu_{p,j}) - {}^t\tau_{pj}\,\frac{1}{2}({}_tu_{i,p} - {}_tu_{p,j}) \tag{16.5.26} $$

$$ \sigma_{ij}^J = {}^tD_{ijkl}^J\,{}_te_{kl} \tag{16.5.27} $$

其中 σ_{ij}^J是 Jaumann 应力张量的增量，${}_te_{kl}$是应变张量的增量。

前面我们已经导出

$$ {}_0S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}_t^0x_{i,k} {}_t^0x_{j,l} {}_tS_{kl} \quad (16.5.14) $$

和

$$ {}_0^tS_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}_t^0x_{i,k} {}_t^0x_{j,l} {}^t\tau_{kl} \quad (16.2.30) $$

对(16.2.30)式两端求物质导数，并利用(16.2.26)，(16.2.27)和(16.2.32)等式，就可以得到

$$ {}_0^t\dot{S}_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}_t^0x_{i,k} {}_t^0x_{j,l} ({}^t\dot{\tau}_{kl} - {}^t\tau_{kp} {}_t^t\dot{u}_{l,p} - {}^t\tau_{pl} {}_t^t\dot{u}_{k,p} + {}^t\tau_{kl} {}_t^t\dot{u}_{p,p}) \quad (16.5.28) $$

将上式改写成增量近似式，则有

$$ {}_0S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}_t^0x_{i,k} {}_t^0x_{j,l} (\tau_{kl} - {}^t\tau_{kp} {}_tu_{l,p} - {}^t\tau_{pl} {}_tu_{k,p} + {}^t\tau_{kl} {}_tu_{p,p}) \quad (16.5.29) $$

上式中最后一项反映体积变形增量的影响，在大变形非弹性变形中通常可以忽略。另方面，略去此项可以使最后导出的刚度矩阵保持对称性，这对于实际计算是很有必要的。

对比(16.5.14)式和(16.5.29)式，并忽略后一式中的最后一项，就得到

$$ {}_tS_{kl} = \tau_{kl} - {}^t\tau_{kp} {}_tu_{l,p} - {}^t\tau_{pl} {}_tu_{k,p} \quad (16.5.30) $$

将(16.5.26)式和(16.5.27)代入上式，并将下标 kl 改写为 ij，则有

$$ {}_tS_{ij} = {}^tD_{ijkl}^J {}_te_{kl} - {}^t\tau_{ip} {}_te_{jp} - {}^t\tau_{jp} {}_te_{ip} \quad (16.5.31) $$

将上式代入 U.L. 格式的虚位移原理表达式(16.3.21)式，并经整理，可以得到

$$ \begin{aligned} &\int_{{}^tV} [{}^tD_{ijkl}^J {}_te_{kl} \delta_te_{ij} - {}^t\tau_{ij} \delta({}_te_{pi} {}_te_{pj} - \eta_{ij})] {}^t\mathrm{d}V \\ &+ \int_{{}^tV} [{}^tD_{ijkl}^J {}_te_{kl} - {}^t\tau_{ip} {}_te_{jp} - {}^t\tau_{jp} {}_te_{ip}] \delta \eta_{ij} {}^t\mathrm{d}V \\ &= {}^{t+\Delta t}Q - \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta_te_{ij} {}^t\mathrm{d}V \end{aligned} \quad (16.5.32) $$

上式中左端的第二个体积分是高阶非线性项，如16.3.4节所述，有两种方法进行处理。一是将它移至方程的右端作为虚拟载荷，在求解过程中与其他载荷项一起进行平衡迭代；另一方法也是通常所采用的，将它略去。这样一来，非弹性大应变情况下的 U.L. 格式的虚位移原理表达式可简化如下：

$$ \begin{aligned} &\int_{{}^tV} [{}^tD_{ijkl}^J {}_te_{kl} \delta_t e_{ij} - {}^t\tau_{ij} \delta({}_te_{pi} {}_te_{pj} - \eta_{ij})] {}^t\mathrm{d}V \\ &= {}^{t+\Delta t}Q - \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}_te_{ij} {}^t\mathrm{d}V \end{aligned} \quad (16.5.33) $$

将上式和(16.3.25)式比较，除${}_tD_{ijkl}$换为${}^tD_{ijkl}^J$而外，还在左端的积分中增加了一${}^t\tau_{ij}\delta({}_te_{pi}{}_te_{pj})$项，这是应予注意的。16.4.2节单元矩阵和向量举例是根据(16.3.25)式列出的。根据以上论证，当应用 U.L. 格式于非弹性大应变分析，初应力${}_t^tK_{NL}$(16.4.13)式应修改为

$$ {}_t^tK_{NL} = {}_t^tK_{NL1} - K_{NL2} \quad (16.5.34) $$

其中${}_t^tK_{NL1}$即原(16.4.13)式所示，是由非线性应变增量${}_t\eta_{ij}$引起的。${}_t^tK_{NL2}$则是由${}_te_{pi}{}_te_{pj}$项引

起的。有的文献中，将此项也忽略，其影响应进一步考察。由于(16.5.33)式所表达的U.L.格式有别于(16.3.25)式，所以又称之为U.L.J.格式。

最后指出，在以上讨论中认为，对于非弹性的小应变和大应变情况，分别采用T.L.格式和U.L.J.格式是合理的选择。如果有不同选择的必要，也可按以前讨论的关于不同格式间本构张量转换的方法导出相应的表达格式。

16.6 算　　例

例1　悬臂梁的大位移静力分析[4]。

图16.6所示是一受均布载荷作用的悬臂梁，用5个8结点平面单元对梁进行离散

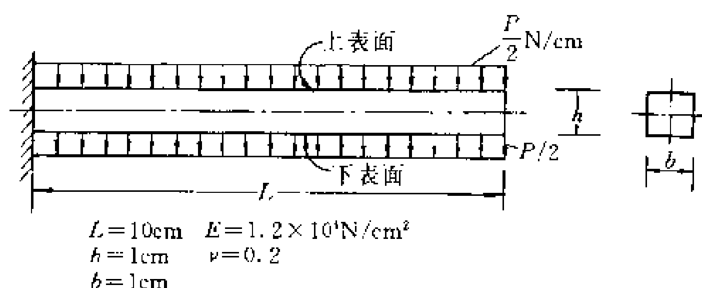


图 16.6　均布载荷作用下的悬臂梁

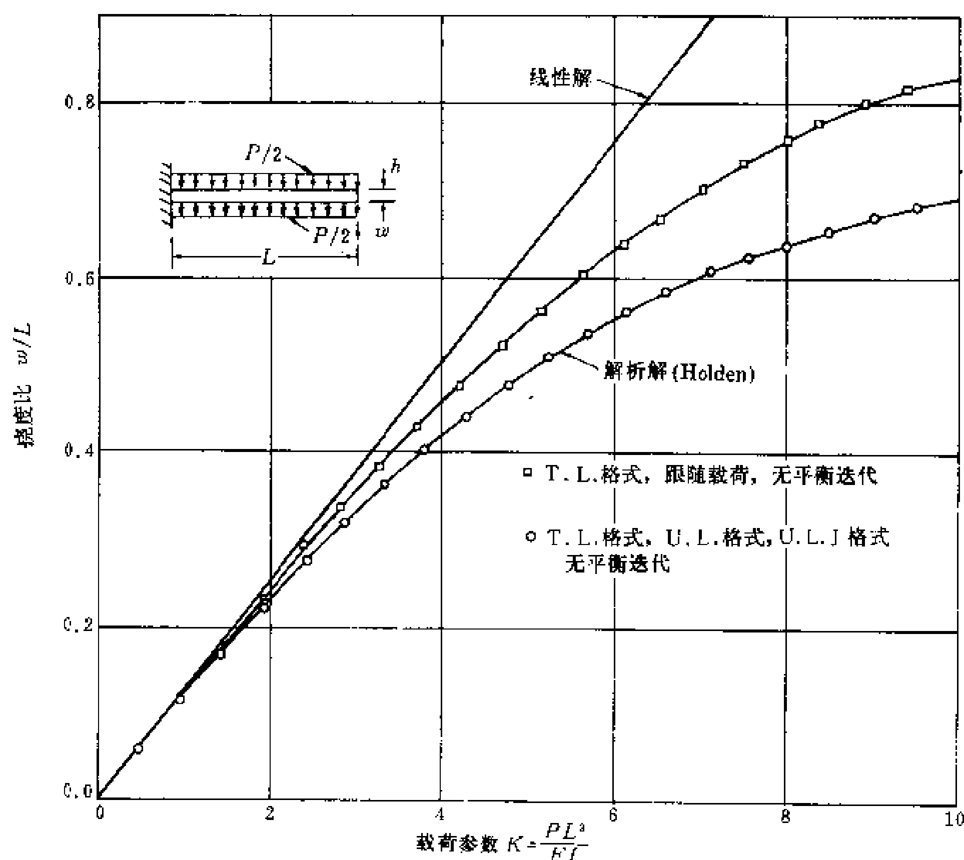


图 16.7　悬臂梁的计算结果

化。现对二种载荷情况求解，一种是载荷保持铅垂方向，即不依赖于变形；另一种是载荷保持和梁的项面及底面相垂直，即是跟随载荷。材料假设为线弹性。对于第一种载荷情况，同时用 T.L 格式、U.L 格式和 U.L.J. 格式三种方案进行分析。由于材料是线弹性，三种格式中本构张量都采用小应变的弹性张量，即(16.5.18)式。整个加载分成了 100 个步长。因此步长相当小，每一步未进行平衡迭代。计算结果见图 16.7。从结果可以看到，由于考虑大位移的影响，结构呈现出比线性分析结果刚硬的性质；此外，由于应变很小，对于几种不同格式，采用同样的材料常数，结果仍是一致的。同时还可以看到，有限元分析的结果和 Holden 的解析解符合得很好。对于第二种依赖于变形的跟随载荷情况，只用 T.L. 格式进

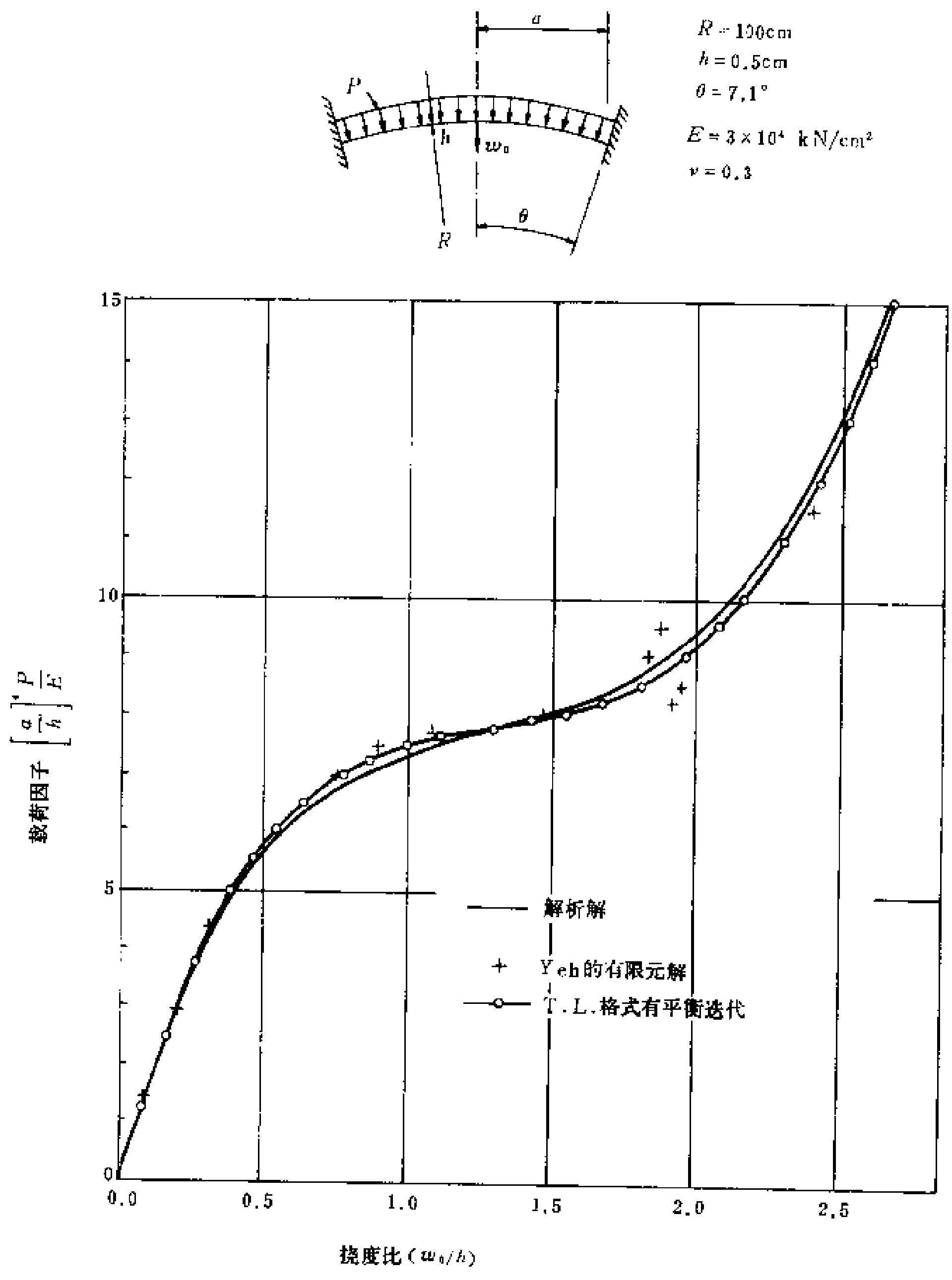


图 16.8 扁球壳的载荷-挠度曲线

行了计算，也是分成100步加载，每步不用平衡迭代。从结果看，在此例中变形对载荷的影响是使结构表现得比不依赖于变形的载荷情况柔软一些。

例2 球壳的大位移静力分析[4]

图16.8所示是一承受均匀压力的扁球壳，周边是固定支持，材料为线弹性。用8个8结点轴对称单元进行离散化。图中表示出用T.L格式得到的载荷挠度曲线。在分析中共用了36个载荷分步，每一分步进行了3～4次平衡迭代。结果和Kornishin等人的解析解，以及Yeh的另一有限元解进行了比较。可以看到，不同的解答是很一致的。但是由于现在的分析中采用了平衡迭代，出现在Yeh解答中过屈曲开始时的振荡现象避免了。同一问题还用U.L.格式进行了分析，其结果和T.L.格式的结果几乎是完全一致的。

例3 网状壳体的大位移静力分析[5]

网状壳体结构是工程中常用的结构形式，它的几何构形和尺寸如图16.9(*a*)所示，顶部受集中载荷，用空间杆单元进行离散，用广义弧长法控制载荷增量的步长，图16.9(*b*)，(*c*)，(*d*)中列出了顶点(1点)和2点的载荷-位移的变化路径。从图可见，不同点的载荷-位

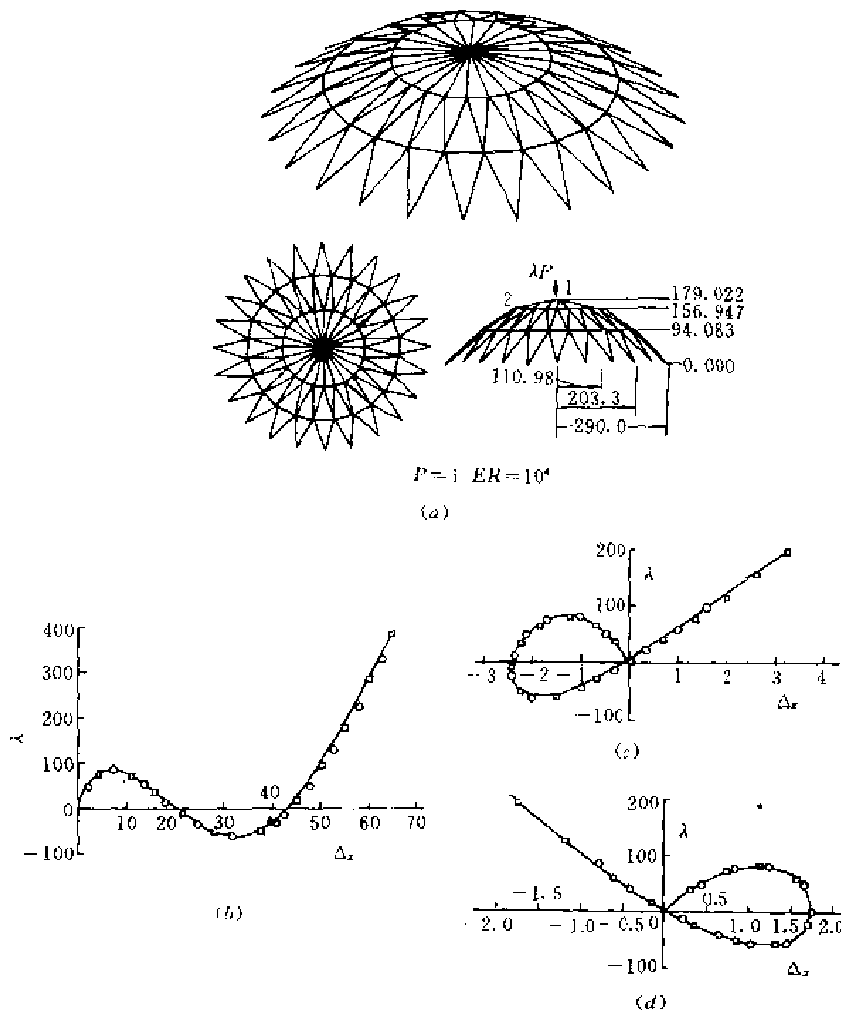


图 16.9 网状壳体的位移分析

(*a*) 几何构形；(*b*) 1点的垂直位移；(*c*) 2点的垂直位移；(*d*) 2点的水平位移

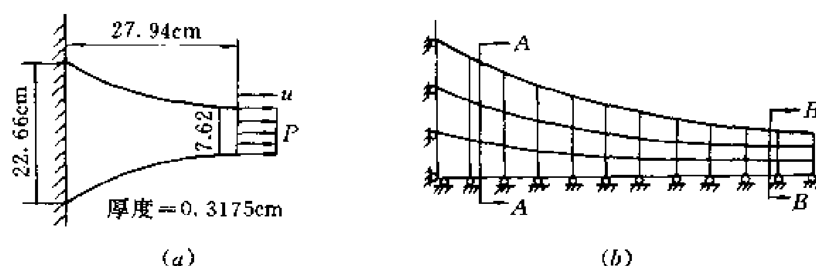


图 16.10 端部受拉橡皮薄片及有限元网格

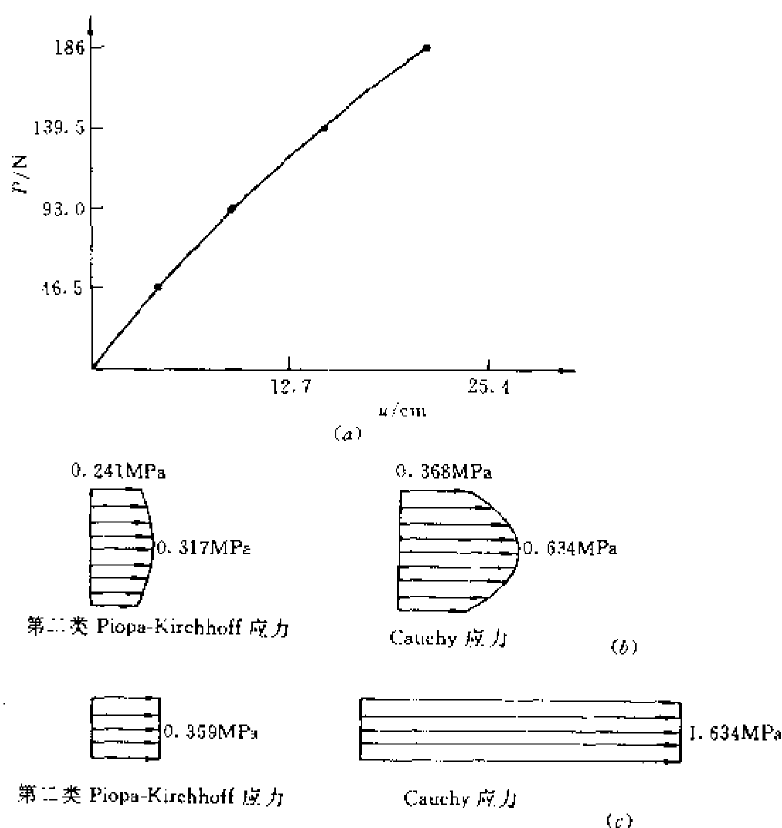


图 16.11 橡皮薄片的载荷-位移曲线和应力分布

移变化路径有不同的特点。1 点只有载荷控制的极限点，而 2 点则同时具有载荷控制和位移的极限点。Forde 等用球面弧长法及柱面弧长法等方法控制载荷增量步长，追踪得到结构内不同点的载荷-位移的全部变化路途。图中还给出 Papadrakakis 用向量迭代法计算得到的结果作为比较。

例 4 橡皮薄片的大位移大应变分析[6]

图 16.10 所示是端部受拉伸的橡皮薄片，材料是 Mooney-Rivlin 型的超弹性不可压缩材料，用于分析的有限元网格绘于同一图上。载荷均匀分布在端截面上，总的大小和方向保持不变，用 4 个分步达到最后载荷 $P=186$N，每个载荷分步平均进行 5 次平衡迭代，

载荷作用端的载荷-位移曲线见图 16.11。有限元解和试验结果非常吻合，端部最后的位移达到薄片原来长度的量级，最大的 Green-Lagrange 应变达到 1.81。为显示出第二类 Piola-Kirchhoff 应力和 Euler 应力的区别，二个截面上的这两种应力分布也表示在图 16.11上。应该指出，Euler 应力在端截面上的积分必须等于施加的载荷，而第二类 Piola-Kirchhoff 应力的总和则不等于施加的载荷。

例 5　球壳的弹塑性大位移动力分析[6]

图 16.12 所示球壳受一均布的突加载荷作用，即分析它的动力响应。材料服从 Mises 屈服条件，并具有各向同性的线性硬化特性。

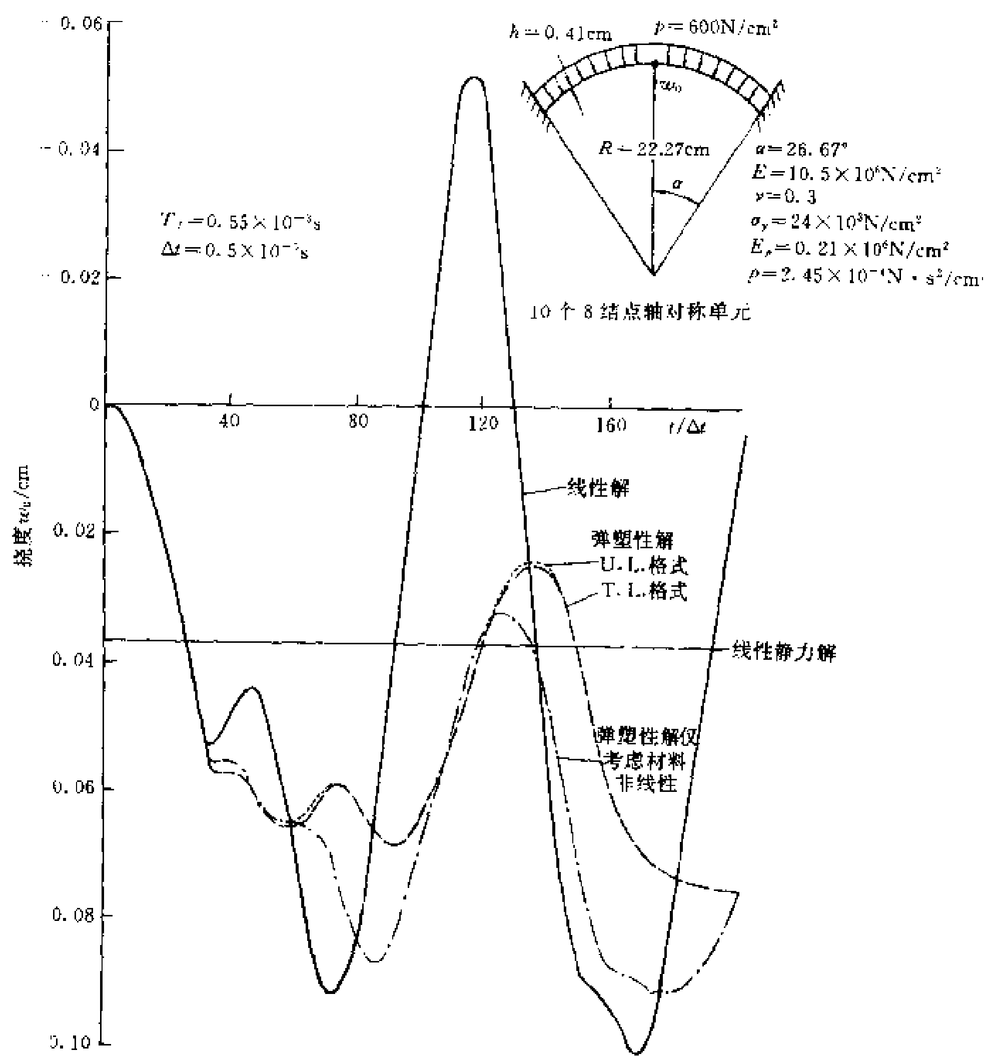


图 16.12　球壳的弹塑性大位移动力分析(Newmark 方法，$\alpha=0.50,\beta=0.25$)

分别对壳体进行线弹性、仅考虑材料非线性(即假定为小位移、小应变)以及同时考虑几何及材料非线性动力分析的结果表示于图 16.12 中。在同时考虑几何及材料非线性的分析中，和例 1 相同，分别采用了 T.L. 格式、U.L. 格式及 U.L.J. 格式。和例 1 情况一样，由于问题属于大转动小应变类型，所以这三种格式得到的结果是相同的。从图示结果可以

看到，仅考虑材料非线性的解答和线弹性的解有很大差别，这时壳体的振动幅值减小，而平均挠度增加。而仅考虑材料非线性和同时考虑几何非线性的结果比较也有一定差别，大挠度的影响使壳体的平均挠度有所减小。

16.7 小　结

本章讨论了建立于非线性连续介质力学基础上的非线性有限元分析的基本理论和方法。

作为理论基础，本章在 16.2 节和 16.5 节分别讨论了大变形情况下应变和应力的度量及本构关系。关于本构关系，在大变形总的前提下首先应区分是弹性变形还是非弹性变形，再则应分别区分是大位移、大转动、小应变情况还是大应变情况，它们分别有不同的特点和表达形式。根据不同情况采用合适的本构关系，不仅可以确当地建立起正确的力学模型，而且对求解方法和求解效率也有很大影响。

在 16.3 节着重讨论了求解几何非线性问题的两种基本格式，即全拉格朗日(T.L.)格式和更新拉格朗日(U.L.)格式。讨论了它们的各自特点，以及所形成的求解方程进一步线性化的方法。可以帮助我们在对具体实际问题进行分析以前对基本格式作出合理的选择。

在 16.4 节比较详细地讨论了有限元求解方程的具体形式及其解法的若干问题。在 16.4.1 和 16.4.2 两小节具体讨论了 T.L. 格式和 U.L. 格式分别用于静力问题、动力问题和稳定问题的各自特点以及单元特性矩阵的具体形式，并以二维等参单元为例给出示例。由于基于非线性连续介质力学的有限单元法基本格式不同于早期非线性有限元分析的情况(它基本上是从线性分析扩展而来)，为具有普遍的适用性也带来了相对的复杂性，掌握它的方程和单元矩阵的具体特点和表达形式是进行实际分析的前提，也是最基本的环节。在 16.4.3 和 16.4.4 两小节关于方程解法的讨论，原则上是以前各章线弹性问题或仅是材料非线性问题求解方法在考虑大变形以及同时考虑两种非线性情况下的推广。需要注意的是由于在一般情况下几何非线性分析中载荷-位移路径的复杂性，选择确当的方式控制增量步长以追踪载荷-位移的变化路径是很重要的，16.4.4 节中介绍的广义弧长法只是可供选择的一种较适用的方法。

本章在 16.6 节对几个算例作了较具体的阐述，可以帮助我们加深对几何非线性问题特点和解法的了解和体会。

习　题

16.1　经受大变形的 4 结点单元如图 16.13 所示。计算时间 t 位形的变形梯度 ${}_0^t x_{i,j}$ 和质量密度 ${}^t\rho$。

16.2　一 4 结点单元，时间 $0\sim t$ 过程中经受一拉伸，如图 16.14 所示。时间 $t\sim t+\Delta t$ 过程中经受一刚体转动(角度)θ。证明 ${}_0^t\epsilon_{ij}={}_0^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$，亦即 ${}_0^t\epsilon_{ij}$ 是不随刚体转动变化的客观张量。

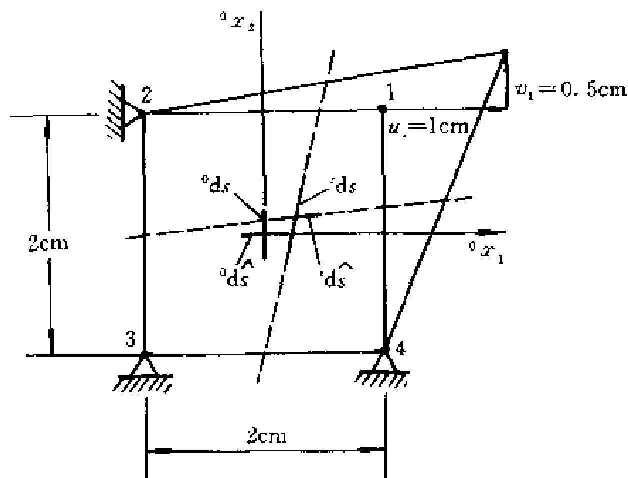


图 16.13

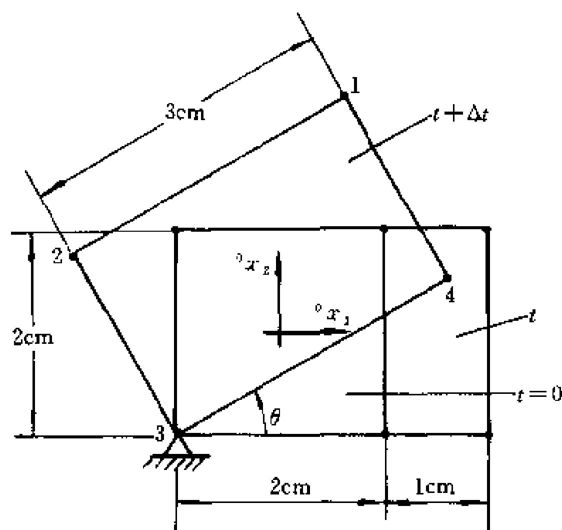


图 16.14

16.3 4 结点单元时间 0 位形上作用有$^0\tau_{11}$($^0\tau_{12}={}^0\tau_{21}={}^0\tau_{22}=0$)，如图 16.15 所示。时间 0～$\Delta t$ 过程中单元经受一刚体转动 θ，并假设在随体坐标内应力状态不变，即$^{\Delta t}\bar{\tau}_{11}={}^0\tau_{11}$ ($^{\Delta t}\bar{\tau}_{12}={}^{\Delta t}\bar{\tau}_{21}={}^{\Delta t}\bar{\tau}_{22}=0$)，计算$^{\Delta t}\tau_{ij}$($i=1,2$)，并证明$^{\Delta t}_{0}S_{ij}={}^0\tau_{ij}$，即$^{\Delta t}_{0}S_{ij}$是不随刚体转动而变化的客观张量。

16.4 一正方形单元时间 t 位形上的应力状态为$^t\tau_{ij}$，假定单元以角速度 ω 刚体旋转，并假定在随体坐标内应力状态保持不变，即$^t\bar{\tau}_{ij}={}^t\tau_{ij}$。计算$^t\dot{\tau}_{ij}$和$^t\Omega_{ij}$，并证明$^t\dot{\sigma}^J_{ij}=0$，即$^t\dot{\sigma}^J_{ij}$是不随刚体旋转而变化的客观张量。

16.5 列出 T.L. 格式和 U.L. 格式的算法步骤，并和小位移情况的算法步骤比较，指出它们的相同和不同之处。

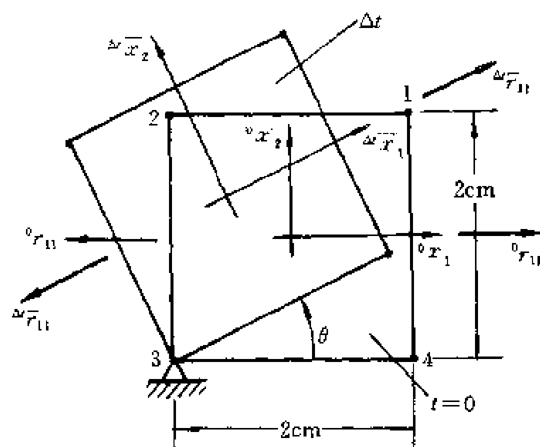


图 16.15

16.6 轴对称截锥单元在大位移情况下的几何关系是：

$$\varepsilon_s = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}(u\sin\varphi + w\cos\varphi) + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{r}\cos\varphi\right)^2$$

$$\kappa_s = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}s^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}$$

导出此单元在承受侧向压力时 T.L. 格式的有限元方程和单元矩阵表达式。

16.7 如果利用上述单元承受外压作用，试导出求解临界压力的步骤及有限元方程。

16.8 从(16.2.30)式导出(16.5.28)式。(提示)

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}{}^t x_i = {}^t\dot{u}_i, \ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}^t x_i = {}^t\mathrm{d}\dot{u}_i = {}^t\dot{u}_{i,l}\,\mathrm{d}^t x_l, \ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}{}^0 x_i = 0$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}^0 x = 0,$$ 其中 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ 表示物质导数)

16.9 在非弹性大应变情况下，为从 U.L. 虚位移原理的一般表达式(16.3.25)式得到(16.5.33)式，验证应用以下表达式

$${}_tD_{ijkl} = D^J_{ijkl} - {}^t\tau_{ik}\,\delta_{jl} - {}^t\tau_{jk}\,\delta_{il}$$

代入(16.3.25)式的必要性，并证明此关系式的正确性。

16.10 导出非弹性大应变情况下用于 T.L. 格式的本构张量 ${}_0D_{ijkl}$。

16.11 导出(16.5.34)式中 $\boldsymbol{K}_{NL2}$ 在二维单元情况的矩阵表达式(参考(16.4.32)式和(16.4.33)式)。

参 考 文 献

1 Surana K S. Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Elements. Inter. J. Numer. Meth. Eng. 1983, 19, 581～615

2 Bellini P X and Chulya A. An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations. Computers and Struc-

tures, 1987, 26, 99~110

3 Crisfield. M A. A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles "Snap-through". Computers and Structures, 1981, 13, 55~62

4 Bathe K L Ramm E, Wilson E L. Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis. Int. J. Num, Meth, Engng 1975, 9, 353~386

5 Forde B W R and Stiemer S F. Improved Arc Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis. Computers and Structures, 1987, 27, 625~630

6 Bathe K J, et al. Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis. PB 231113,1974

主要参考书目

1. Bathe K J and Wilson E. L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, Inc. , 1976
2. Bathe K J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Inc. , 1982
3. Zienkiewicz O C. The Finite Element Method Third Edition. McGraw-Hill, Inc. , 1977
4. Desai C S and Abel J F. Introduction to the Finite Element Method. Van Nostrand Reinhold Co. 1972
5. Zienkiewicz O C, Morgan K. Finite Elements and Approximation. John Wiley & Sons, Inc. 1983
6. Zienkiewicz O C, FRS, Taylor R L. The Finite Element Method, Fourth Edition. Vol. 1, Basic Formulation and Linear Problems. McGraw-Hill, Inc. 1987
7. Owen D R J, Hinton E. Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice. Pineridge Press Limited, 1980
8. Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity Third Edition. Pergamon Press, 1982
9. Huebner K H and Thornton E A. Finite Element Method for Engineers. John Wiley & Sons, Inc. 1982
10. Cook R D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc, 1974
11. Rao S S. The Finite Element Method in Engineering, Pergamon Press, 1982
12. 丁皓江,何福保等编．弹性和塑性力学中的有限单元法．机械工业出版社,1989
13. 朱伯芳.有限单元法原理和应用．水利电力出版社,1979